Licence de Physique Fondamentale et Appliquée
3ème année Parcours Physique et Applications Parcours Mécanique

UNIVERSITÉ PARIS-SUD
ORSAY

THÉORIE DES DISTRIBUTIONS

G. Abramovici

mars 2026

Table des matières

Glossaire

$\Longleftrightarrow$	si et seulement si
$exp_1 \equiv exp_2$	l'expression exp_1 est définie par (ou bien définit) exp_2
$\sim$	équivalent
$\simeq$	à peu près égal
$A \subset B$	l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B
$A \supset B$	l'ensemble A contient l'ensemble B
$A \cap B$	intersection des ensembles A et B
$A \cup B$	union des ensembles A et B
$A \backslash B$	l'ensemble A moins l'ensemble $A \cap B$
$[a, b]$	intervalle fermé ($a < b$ deux réels)
$[a, b[$	intervalle fermé à gauche et ouvert à droite
$]a, b]$	intervalle ouvert à gauche et fermé à droite
$]a, b[$	intervalle ouvert
$\{a\}$	singleton ne contenant que a
$\{a_1, .., a_n\}$	ensemble de n éléments
$\varnothing$	ensemble vide
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels
$\mathbb{Z}$	ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{Q}$	ensemble des nombres rationnels
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes
$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{N} \backslash \{0\}$
$\mathbb{Z}^*$	$\mathbb{Z} \backslash \{0\}$
$\mathbb{Q}^*$	$\mathbb{Q} \backslash \{0\}$
$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R} \backslash \{0\}$
$\mathbb{R}_+$	ensemble des réels positifs
$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$
$\overline{A}$	adhérence de l'ensemble A
$\max(A)$	plus grand élément de l'ensemble A
$\min(A)$	plus petit élément de l'ensemble A
$\sup(A)$	limite supérieure de A
$\inf(A)$	limite inférieure de A
pp	presque partout
cf.	*confere*
etc.	*et cætera*
resp.	respectivement
i.e.	*id est*
C.Q.F.D.	ce qu'il fallait démontrer
ssi	si et seulement si

$\mathbb{i}$	le nombre imaginaire
$\cos$	la fonction cosinus
$\sin$	la fonction sinus
sinc	la fonction sinus cardinal égale à $x \mapsto \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$
e^x	exponentielle de x
$\mathrm{e}^{\mathbb{i}x}$	exponentielle complexe égale à $\cos(x) + \mathbb{i}\sin(x)$
$\log$	logarithme népérien
f'	la dérivée d'une fonction $x \mapsto f(x)$
$\Re(z)$	partie réelle du nombre complexe z
$\Im(z)$	partie imaginaire du nombre complexe z
$\overline{z}$	nombre conjugué de z, égal à $\Re(z) - \mathbb{i}\Im(z)$
x_i	objet x indicé par un entier i
$f(x)$	image de l'**argument** x par la fonction f
x^p	généralement puissance $p^{\text{ème}}$ de x pour le produit ordinaire
$f^{(p)}$	dérivée $p^{\text{ème}}$ de f
$n = i, j$	n peut prendre les valeurs i **ou** j
$n = i..j$	n peut prendre les valeurs de i à j
$\propto$	proportionnel
$\sum\limits_{i=n_1}^{n_2}$	somme des éléments dont l'indice varie de n_1 à n_2
$\sum\limits_{i}$	somme d'éléments d'indice i (plage implicite)
$\prod\limits_{i}$	produit d'éléments d'indice i
$\lim\limits_{x \to x_o}$	limite quand x tend vers x_o
$\lim\limits_{x \to x_o^+}$	limite par valeur positive $= \lim\limits_{\substack{x \to x_o \\ x > x_o}}$
$\lim\limits_{x \to x_o^-}$	limite par valeur négative $= \lim\limits_{\substack{x \to x_o \\ x < x_o}}$
$f(x_o^+)$	$\lim\limits_{x \to x_o^+} f(x)$
$f(x_o^-)$	$\lim\limits_{x \to x_o^-} f(x)$
$\lvert x \rvert$	valeur absolue ou module du nombre x
$\lVert f \rVert$	norme de la fonction f
$\mathrm{Support}(f)$	support de la fonction f
$\check{f}$	transposée de la fonction f
$\hat{f}$	transformée de Fourier de la fonction f
$\mathcal{F}$	transformation de Fourier
$\mathcal{C}^p(\mathbb{R})$	ensemble des fonctions p fois dérivables dont la dérivée $p^{\text{ème}}$ est continue
$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$	ensemble des fonctions infiniment dérivables
$\mathcal{D}(\mathbb{R})$	ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support compact
$\mathcal{D}'(\mathbb{R})$	ensemble des distributions ordinaires
$\mathcal{S}(\mathbb{R})$	ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ rapidement décroissantes
$\mathcal{S}'(\mathbb{R})$	ensemble des distributions tempérées
$\mathcal{I}$	opérateur identité
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$	matrice 2×2
$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$	déterminant de la matrice

Partie I

Transformation de Fourier

A Notions préalables

1 Topologie dans $\mathbb{R}$

a Ensembles

- $\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des entiers naturels, de un à l'infini, qui permet de compter les éléments de chaque ensemble.
- $\mathbb{N}$ est le même ensemble auquel est adjoint le zéro.
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs (on peut le construire comme les différences des éléments de $\mathbb{N}^*$). $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau (ce n'est pas un corps car seul 1 admet un inverse pour la multiplication).
- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels, $\mathbb{Q} = \{\frac{r}{s}, (r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\}$. $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps.
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels. $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps complet.[1]
- $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres imaginaires $z = x + \mathbb{i}y$, où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps complet intègre[2] et algébriquement clos.[3]

b Intervalle

On distinguera sur la droite réelle $\mathbb{R}$ les intervalles $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$ et $[a, b]$, où $a < b$, d'une part, et les intervalles $]a, \infty[$, $[a, \infty[$, $]-\infty, a]$, $]-\infty, a[$ et $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$, d'une autre.

- Les premiers sont des intervalles finis, les bornes sont notées avec un signe [ou] selon qu'elles sont inclues dans l'intervalle ou pas, selon la notation usuelle.
- Les seconds sont des intervalles infinis (on dit parfois semi-infinis sauf pour $\mathbb{R}$ lui-même), avec la même notation pour les bornes finies de ces intervalles.
- Enfin, un singleton $\{a\}$ est un cas particulier d'intervalle fini $[a, a]$.

c Ensemble fini

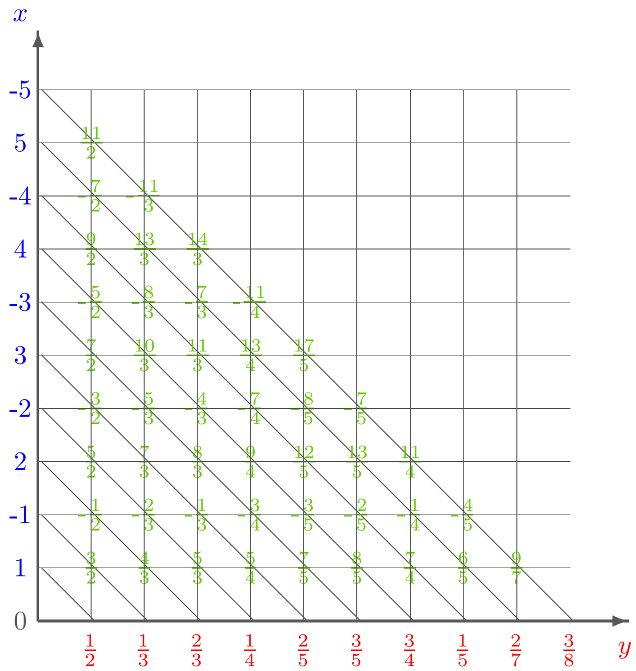
- On appelle ensemble fini un ensemble de n éléments (n étant un entier naturel) $\{a_1, .., a_n\}$ que l'on peut énumérer de 1 à n.
- Le singleton $\{a\}$ est un cas particulier d'ensemble à 1 élément, qui permet d'engendrer tous les ensembles finis par union finie (cf. section suivante).
- Par extension, on inclut le cas particulier $n = 0$, qui correspond à l'ensemble vide.

---

1. Un ensemble est complet si et seulement si toute suite u_n de Cauchy, c'est à dire telle que $\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} |u_m - u_n| = 0$, les deux limites $m \to \infty$ et $n \to \infty$ étant a priori indépendantes, est convergente. Intuitivement, cela signifie qu'il n'y a pas de trou dans l'ensemble.
2. Il n'y a pas de diviseur de 0, *i.e.* $ab = 0 \iff a = 0$ ou $b = 0$.
3. Tous les polynômes sont des produits de polynômes du premier degré.

d Ensemble dénombrable

- On appelle ensemble dénombrable un ensemble infini d'éléments $\{a_i,\ i \in \mathbb{N}^*\}$ que l'on peut énumérer par les entiers naturels > 0.
- Dans $\mathbb{R}$, non seulement $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$ sont dénombrables, mais également $\mathbb{Z}$: un ordre naturel, bien que non canonique, s'écrit $\mathbb{Z} = \{r_i,\ i \in \mathbb{N}^*\}$ avec $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, $r_3 = -1$, $r_4 = 2$, $r_5 = -2$, $r_6 = 3$, ..., $r_n = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$.
- L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est également dénombrable. Voici un ordre possible, qu'on représente dans le secteur $0xy$



(voir la figure suivante) ; sur l'axe *vertical* en bleu x, on représente $\mathbb{Z}$, selon l'ordre décrit ci-dessus ; sur l'axe *horizontal* en rouge y, on écrit les rationnels irréductibles $\sigma_i \in]0,1[$ ($i \in \mathbb{N}^*$), ordonnés en utilisant les suites de Farey. [4].
L'ensemble des rationnels s'écrit $\mathbb{Q} = \{q_i,\ i \in \mathbb{N}^*\}$, avec $q_i = r_j + \sigma_k$. Ce sont les sommes $x + y$, où x est l'ordonnée qu'on lit sur l'axe vertical et y est l'abscisse qu'on lit sur l'axe horizontal.
Pour les ordonner (autrement dit pour construire la relation entre i, j et k du § précédent), on lit les rationnels selon les segments de pente -1, par ordre croissant de taille des segments, puis, pour chaque segment, de haut en bas, ce qui donne : $q_1 = 0$, $q_2 = 1$, $q_3 = \frac{1}{2}$, $q_4 = -1$, $q_5 = \frac{3}{2}$, $q_6 = \frac{1}{3}$, $q_7 = 2$, $q_8 = -\frac{1}{2}$, $q_9 = \frac{4}{3}$, $q_{10} = \frac{2}{3}$, $q_{11} = -2$, $q_{12} = \frac{5}{2}$, $q_{13} = -\frac{2}{3}$, $q_{14} = \frac{5}{3}$, $q_{15} = \frac{1}{4}$, ...

e Union et intersection

α Union

- L'union de deux ensembles A et B est l'ensemble $A \cup B$ des éléments appartenant à l'un ***ou*** à l'autre.
- On définit, de façon analogue, l'union d'un nombre ***fini*** d'ensembles (on écrira plus communément union *finie*).
- L'union s'étend pour un nombre ***infini*** (même non dénombrable) d'ensembles (on écrira plus communément union *infinie*).

4. Les suites de Farey peuvent se construire ainsi : S_0, S_1, ..., $S_{n-1} \subset S_n$, ..., est une suite d'ensembles finis, $S_n = \{\sigma_i^n,\ i = 0..2^n\}$ de cardinal $2^n + 1$; les σ_i^n sont définis par récurrence sur n : $S_0 = \{0, 1\}$; on distingue les indices pairs : $q = 0..2^n$ $\sigma_{2q}^{n+1} = \sigma_q^n$; et les indices impairs : $q = 1..2^n$ $\sigma_{2q-1}^{n+1} = \sigma_{q-1}^n \boxplus \sigma_q^n$; $\boxplus$ est un opérateur défini dans $\mathbb{Q}$ par $\frac{p}{q} \boxplus \frac{r}{s} = \frac{p+r}{q+s}$ ($\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ irréductibles).

Pour finir, on définit $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\delta S_n = S_n \backslash S_{n-1}$ de cardinal 2^{n-1} ; dans chaque ensemble δS_n, les éléments sont ordonnés du plus petit au plus grand ; on trouve, pour les premiers, $\delta S_1 = \{\frac{1}{2}\}$, $\delta S_2 = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$, $\delta S_3 = \{\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}\}$, $\delta S_4 = \{\frac{1}{5}, \frac{2}{7}, \frac{3}{8}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{4}{5}\}$, $\delta S_5 = \{\frac{1}{6}, \frac{2}{9}, \frac{3}{11}, \frac{3}{10}, \frac{4}{11}, \frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{7}{12}, \frac{8}{13}, \frac{7}{11}, \frac{7}{10}, \frac{8}{11}, \frac{7}{9}, \frac{5}{6}\}$; $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \delta S_n$ forme une partition parfaite de $\mathbb{Q} \cap]0, 1[$, qu'on ordonne en énumérant successivement et dans l'ordre les éléments de δS_1, δS_2, ..., δS_n, ...

β Intersection

- L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble $A \cap B$ des éléments appartenant aux deux ensembles à la fois.
- On définit, de façon analogue, l'intersection d'un nombre ***fini*** ou ***infini*** d'ensembles (on écrira plus communément intersection *finie* ou *infinie*).

γ Différence

- La différence entre un ensemble A et un ensemble B est l'ensemble $A \backslash B$ des éléments appartenant à A mais pas à B ; il n'est pas nécessaire que $B \subset A$ car on fait la différence entre A et $A \cap B$.
  $A \backslash B$ est aussi appelé *complémentaire de B dans A*.
- Contrairement à l'union, qui est commutative et associative, ainsi que l'intersection, la différence n'est ni commutative, ni associative.

f Composantes connexes

Par définition, si un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme l'union d'intervalles disjoints, ces intervalles sont appelés les composantes connexes de A.

g Sous-ensemble ouvert

- Par définition, un sous-ensemble ouvert U (on dira simplement un *ouvert*) n'atteint pas ses bornes. [5]
- L'exemple primordial d'ouvert dans $\mathbb{R}$ est l'intervalle fini ouvert $]a, b[$.
- Par ailleurs, si l'on considère les intervalles infinis, $]-\infty, a[$, $]a, \infty[$ et $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$ sont également ouverts.
- De façon plus générale, l'union finie ou infinie d'intervalles ouverts (disjoints ou non) est un ouvert.
- L'intersection d'un nombre ***fini*** d'ouverts est un ouvert.
- Par contre, l'intersection d'un nombre ***infini*** d'ouverts peut être un fermé (voir la définition au § suivant). Par exemple, on a

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\} \ .$$

h Sous-ensemble fermé

α Point d'accumulation

Par définition, un point d'accumulation x_o d'un ensemble A est la limite d'une suite convergente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeur dans A, autrement dit

$$x_o = \lim_{n \to \infty} x_n \qquad \text{avec } x_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \ ;$$

comme par définition la suite est convergente, x_o existe forcément, par contre, il n'appartient pas *a priori* à l'ensemble A.

Par exemple, soit $A =]0, 1]$, et la suite $x_n = \frac{1}{n}$ définie pour tout $n \geqslant 1$. On a $x_n \equiv \frac{1}{n} \in]0, 1] \equiv A \ \forall n \in \mathbb{N}^*$, mais $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0 \notin A$.

5. ce qui s'écrit mathématiquement $\forall x \in U, \exists \epsilon$ tel que $]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset U$.

β Définition d'un fermé

- Par définition, un sous-ensemble fermé (on dira simplement un *fermé*) contient tous ses points d'accumulation.
- L'exemple primordial de fermé dans $\mathbb{R}$ est l'intervalle fini fermé $[a, b]$.
- Un cas particulier d'intervalle fini fermé est le singleton $\{a\}$.
- Par ailleurs, si l'on considère les intervalles infinis, $]-\infty, a]$, $[a, \infty[$ et $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$ sont également fermés.
- De façon plus générale, l'union ***finie*** de fermés (disjoints ou non) est un fermé.
- Par contre, l'union infinie de fermés peut très bien être un ouvert.
- L'intersection d'un nombre ***fini*** ou ***infini*** de fermés est un fermé.

γ Cas de la droite réelle

$\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$ est un cas très particulier, puisqu'il est à la fois ouvert et fermé.

i Fermeture d'un ensemble

- La fermeture $\overline{A}$ d'un ensemble A quelconque est, par définition, le plus petit fermé contenant A.
  Par exemple, la fermeture des intervalles $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$ et $[a, b]$ est $\overline{]a, b[} = \overline{]a, b]} = \overline{[a, b[} = \overline{[a, b]} = [a, b]$.
- Une définition équivalente est $\overline{A} = \{$ points d'accumulation de $A\}$, soit de façon plus explicite : « *la fermeture d'un ensemble A est l'ensemble $\overline{A}$ des limites des suites à valeur dans cet ensemble A.* »

j Sous-ensemble compact

α Sous-ensemble borné

Par définition, un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$ est inclus dans un intervalle fini $[-L, L]$.

β Définition d'un compact dans $\mathbb{R}$

- Pour la topologie dans $\mathbb{R}$, on peut se contenter d'une définition pratique : un sous-ensemble compact (on dira simplement un *compact*) est un ensemble à la fois $\boxed{\text{fermé et borné}}$.
- Les intervalles fermés finis sont donc compacts, mais pas les intervalles infinis.
- Une union ***finie*** de compacts est un compact.
- Une union ***infinie*** de compacts n'est *a priori* pas un compact.
- Une intersection ***finie*** ou ***infinie*** de compacts est un compact.

k Bornes d'un ensemble

α Minimum et maximum

- Par définition, le minimum d'un ensemble A, que l'on note $\min(A)$, est le plus petit[6] élément de A.
- Par définition, le maximum d'un ensemble A, que l'on note $\max(A)$, est le plus grand[6] élément de A.

6. au sens de $<$ car on étudie ici la topologie de $\mathbb{R}$.

- $\min(A)$ ou $\max(A)$ n'existent pas toujours, puisque A ne contient pas nécessairement toutes ses bornes.
- Si A est compact, $\min(A)$ et $\max(A)$ sont bien définis.
- Si A est ouvert, on ne peut définir ni $\min(A)$, ni $\max(A)$.
- Si une borne de A est $-\infty$ (resp. $+\infty$), $\min(A)$ (resp. $\max(A)$) n'est pas défini.

β Limites inférieure et supérieure

- Par définition, la limite inférieure d'un ensemble A, que l'on note $\inf(A)$, est, soit $-\infty$ si A n'est pas borné à gauche, soit $\min(\overline{A})$ s'il l'est.
- Par définition, la limite supérieure d'un ensemble A, que l'on note $\sup(A)$, est, soit $+\infty$ si A n'est pas borné à droite, soit $\max(\overline{A})$ s'il l'est.
- $\inf(A)$ et $\sup(A)$ sont toujours définies.
- Si A est compact, $\min(A)$ et $\inf(A)$ coïncident, de même que $\max(A)$ et $\sup(A)$, car la limite est atteinte dans A.
- Si A est ouvert, $\inf(A)$ et $\sup(A)$ n'appartiennent pas à A.

2 Fonctions

On ne s'intéresse ici qu'aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

a Argument

α Définition

Soit une fonction f $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)$, f associe à tout réel x son image complexe $f(x)$. La variable x est appelée l'***argument*** de f.

β Variable muette

- Si l'on considère $f(x)$, pour x donné, il n'est pas possible de changer le nom de l'argument.
- Par contre, dans de nombreuses expressions génériques, ainsi que dans toutes les formules de sommation[7] comme $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$, le nom de l'argument est arbitraire. On dit que la variable est muette.
- Il faut parfois prendre des précautions, par exemple dans $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx \int_{\mathbb{R}} g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(y)dxdy$ on doit obligatoirement distinguer les variables, quand on transforme le produit d'intégrales simples en intégrale double.
- On respectera toutefois autant que faire se peut les usages de la physique pour les noms de variable : x pour l'espace et k pour les nombres d'onde sont, par exemple, deux variables conjuguées par la transformation de Fourier.

b Support

α Définition

- On appelle support de f : le sous-ensemble $\text{Support}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0\}}$.
- Pourquoi prend-on la fermeture ? Imaginons, par exemple, que f soit réglée mais pas continue en $x = x_o$, et que $\lim\limits_{x \to x_o^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to x_o^+} f(x)$ ne soient pas nulles.

7. ou de produit dans les intégrales de chemin.

Même en posant arbitrairement $f(x_o) = 0$, il faut inclure x_o dans le support. En conséquence, les points d'accumulation (notamment les bords) de Support(f) sont inclus dans le support.
- Comme on prend la fermeture, f peut être nulle sur son support ; cependant, l'ensemble des points x du support pour lesquels $f(x) = 0$ est négligeable.

β Fonction à support compact

On dit que f est à support compact ssi $\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que Support(f) $\subset [a, b]$.

c Continuité

On ne considérera, dans tout ce cours, que le cas de fonctions continues, sauf éventuellement en des points isolés. Les définitions suivantes seront utiles par la suite.

α Fonction réglée

- On dit qu'une fonction f est réglée à droite (resp. à gauche) en x_o si sa limite à droite (resp. à gauche)

$$\boxed{\lim_{x \to x_o^\pm} f(x) \equiv f(x_o^\pm)}$$

  existe ($\pm = +$ si la fonction est réglée à droite, $\pm = -$ si elle l'est à gauche).
- On dit qu'une fonction f est réglée en x_o si elle est à la fois réglée à droite et à gauche en ce point.
- Une fonction réglée en un point x_o est prolongeable par continuité en ce point si et seulement si

$$f(x_o^-) = f(x_o^+) \ .$$

  Pour la prolonger par continuité, il suffit de poser

$$\boxed{f(x_o) = f(x_o^-) = f(x_o^+)} \ . \tag{1}$$

- Attention toutefois que la relation (1) peut être artificiellement violée ; dans ce cas, la valeur $f(x_o)$ de la fonction au point x_o n'a aucune signification.

β Fonction continue

- Une fonction est continue en un point $x \in \mathbb{R}$ si elle est réglée en x et qu'elle vérifie la condition (1) en x.
- Une fonction continue est une fonction continue en tout point $x \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ l'ensemble de telles fonctions.
- On peut définir, par extension, $\mathcal{C}^0(A)$ l'ensemble des fonctions continues en tout point de A (on choisira toujours A connexe, c'est à dire un intervalle).

γ Fonction à dérivée continue

- Une fonction $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ si $f^{(n)}$ sa dérivée n-ème existe et $f^{(n)} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.
- On peut définir, par extension, $\mathcal{C}^n(A)$ l'ensemble des fonctions f telles que $f^{(n)} \in \mathcal{C}^0(A)$.

d Opérations sur les fonctions

Les espaces de fonctions sont tous munis de l'addition et de la multiplication, ainsi que des opérations suivantes, définies par

$$\begin{array}{llll}
\text{addition} & f+g\ \mathbb{R}\to\mathbb{C} & x\mapsto \boxed{(f+g)(x)=f(x)+g(x)}\ ; & \text{(2a)}\\
\text{multiplication} & f\,g\ \mathbb{R}\to\mathbb{C} & x\mapsto \boxed{(f\,g)(x)=f(x)g(x)}\ ; & \text{(2b)}\\
\text{inverse} & 1/f\ \mathbb{R}\to\mathbb{C} & x\mapsto \boxed{(1/f)(x)=1/f(x)}\ ; & \text{(2c)}\\
\text{composition} & f\circ g\ \mathbb{R}\to\mathbb{C} & x\mapsto \boxed{(f\circ g)(x)=f(g(x))}\ . & \text{(2d)}
\end{array}$$

Le produit de convolution sera étudié ultérieurement. Il ne faut pas confondre $1/f$ et f^{-1} qui va être étudié au § suivant.

e Transformations sur les fonctions

Les définitions suivantes nécessitent des conditions particulières (qu'on n'étudiera pas), quand on les applique à des fonctions définies sur $A \subsetneq \mathbb{R}$. On les utilisera généralement pour des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, pour lesquelles aucune restriction n'est nécessaire.

α Inversion

La réciproque d'une fonction f est notée f^{-1} et définie par

$$\boxed{f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=\mathcal{I}}\ , \tag{3}$$

ce qui signifie $f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))=x\ \forall x\in\mathbb{R}$.

β Translation

Soit $a\in\mathbb{R}$, on appelle translatée de la fonction f et on note ${}^af$ la fonction

$${}^af:\ x\mapsto \boxed{{}^af(x)=f(x-a)}\ . \tag{4a}$$

γ Inflation

On définira l'inflation d'un facteur $\lambda\in\mathbb{R}^*$ et on notera f_λ la fonction ainsi dilatée

$$f_\lambda:\ x\mapsto \boxed{f_\lambda(x)=f(x/\lambda)}\ . \tag{4b}$$

δ Transposition

La transposée $\check{f}$ d'une fonction f est définie par une inflation d'un facteur $\lambda=-1$. On dit encore *symétrie* pour transposition et *symétrique* pour transposée. On a donc

$$\check{f}:\ x\mapsto \boxed{\check{f}(x)=f(-x)}\ . \tag{4c}$$

f Parité

α Fonction paire

On dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est paire si et seulement si elle vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(-x) = f(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\check{f} = f}\,. \tag{5a}$$

β Fonction impaire

On dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est impaire si et seulement si elle vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(-x) = -f(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\check{f} = -f}\,. \tag{5b}$$

Décomposition en parties paire et impaire

Soit f une fonction quelconque, f admet une décomposition unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire :

$$\boxed{f = f_{\text{pair}} + f_{\text{imp}}} \qquad \text{avec}$$
$$\boxed{f_{\text{pair}} = \frac{f + \check{f}}{2}} \qquad \boxed{f_{\text{imp}} = \frac{f - \check{f}}{2}}\,. \tag{5c}$$

g Norme

On ne va pas détailler ici les normes qu'on utilise pour les fonctions, cela sera fait plus loin dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue. On rappellera seulement quelques règles élémentaires, ainsi que la norme sup.

On considère une norme de fonction $\| \; \|$ (on ne précise pas dans quel espace de fonctions on se place ici).

α Séparation

Rappelons qu'une norme est d'abord une distance, c'est-à-dire qu'elle doit séparer les fonctions différentes : on a

$$\forall f, g \quad \boxed{f \neq g \iff \|f - g\| \neq 0}\,. \tag{6a}$$

β Inégalité triangulaire

De même, toute norme vérifie l'inégalité triangulaire des distances :

$$\forall f, g \quad \boxed{\Big|\|f\| - \|g\|\Big| \leqslant \|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|}\,. \tag{6b}$$

γ Norme associée à un produit scalaire

- Une norme peut être associée à un produit scalaire, que l'on notera ici $\langle f|g\rangle$.
- Elle vérifie alors les propriétés suivantes :

$$\boxed{\|f\| = \sqrt{\langle f|f\rangle}}\ ; \tag{6c}$$

$$\boxed{|\langle f|g\rangle| \leqslant \|f\|\,\|g\|}\ ; \tag{6d}$$

$$\boxed{\langle f|g\rangle = \frac{\|f+g\| - \|f\| - \|g\|}{2} = \frac{\|f+g\| - \|f-g\|}{4}}\ . \tag{6e}$$

- Pour l'inégalité (6d), appelée *inégalité de Schwarz*, l'égalité est réalisée si et seulement si $f \propto g$.

δ Norme associée à un produit hermitien

Les résultats de la section précédente se généralisent si la norme est associée à un produit hermitien. Toutefois, l'équation (6e), appelée *identité de polarisation*, devient très fastidieuse :

$$\boxed{\langle f|g\rangle = \frac{\|f+g\| - \|f-g\| - \mathbb{i}\|f+\mathbb{i}g\| + \mathbb{i}\|f-\mathbb{i}g\|}{4}}\ . \tag{6f}$$

ϵ Norme sup

La norme sup est la limite supérieure de $\{|f(x)|,\ x \in \mathbb{R}\}$, ce qui s'écrit

$$\boxed{\sup(f) \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|}\ . \tag{6g}$$

h Limite de fonction

α Limite associée à une norme

Contrairement à la limite définie dans $\mathbb{R}$, il n'existe pas une limite unique dans l'espace des fonctions.

À toute norme de fonction $\|\ \|$ est associée une limite par la définition :

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| \to 0 \tag{7a}$$

où la limite dans le terme de droite est prise au sens ordinaire des limites dans $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions.

β Limite simple

- Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions, on dit que f_n tend simplement vers f (ou que f est la limite simple de la suite) quand

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\ . \tag{7b}$$

  On dit encore que f_n tend vers f ***point par point***.
- La limite simple est la limite associée à la norme sup.

i Exemples fondamentaux

α Fonction caractéristique

Soit un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$, on appelle fonction caractéristique de l'ensemble A, et on notera $\mathbb{I}_A$, la fonction définie par

$$\boxed{\mathbb{I}_{\mathcal{A}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathcal{A} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}} \ . \tag{8}$$

β Polynôme

- Un polynôme p est une fonction qui a pour image

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \, x^i \tag{9a}$$

  où n est le degré du polynôme et, par définition, $a_n \neq 0$. Les coefficients a_i sont définis de façon univoque : soient deux polynômes p et q, avec $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \, x^i$ et $q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i \, x^i$, on a

$$p = q \iff a_i = b_i \ \forall i \text{ en particulier } m = n \ . \tag{9b}$$

- On distingue les polynômes à coefficients entiers (ou rationnels, cela revient au même, à un facteur global près) : $a_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i = 0..n$. Ils permettent notamment de définir les nombres transcendants. [8]

γ Fraction rationnelle

- Une fraction rationnelle est la fraction de deux polynômes, $f = p/q$; on choisira les deux polynômes p et q premiers entre eux. [9]
- Soit x_1, ..., x_m, les m racines distinctes de q, alors $f(x)$ diverge quand $x \to x_i$, pour $i = 1..m$. On dit que les x_i sont les pôles de la fonction f.
- Soit α_i la multiplicité de la racine x_i dans q ; au voisinage de x_i on peut écrire

$$f(x) \underset{x_i}{\sim} \frac{c_i}{|x - x_i|^{\alpha_i}}$$

  où c_i est une constante déterminée.

j Comportement à l'infini

On n'a pas rappelé les fonctions exponentielle, gaussienne, etc., bien qu'on utilisera fréquemment ces fonctions. Une caractéristique bien connue de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est que $\mathrm{e}^{-x} \to 0$ quand $x \to +\infty$ plus vite que toute puissance de x. On va introduire plusieurs définitions, qui caractérisent les comportements à l'infini.

α Fonction à croissance lente

- Une fonction f est dite à croissance lente si elle n'est pas plus divergente qu'une fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$ (avec $\alpha \geqslant 0$) au voisinage de $+\infty$ **et** $-\infty$.

8. Les nombres non-transcendants sont les racines de ces polynômes et forment un espace dénombrable.

9. c'est-à-dire qu'ils n'ont aucune racine complexe commune.

- Cela s'écrit, en termes mathématiques, $\exists M > 0, \alpha \geqslant 0$ deux réels tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant M|x|^\alpha$.
- Cela inclut aussi bien des fonctions comme sin par exemple ($M = 1$, $\alpha = 0$). Par contre, si la fonction converge vers zéro en $+\infty$ et $-\infty$, on préfère parler de fonction décroissante, que l'on traite aux § suivants.
- On peut montrer le théorème suivant : f est à croissance lente ssi f n'est pas décroissante et il existe un polynôme tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \boxed{|f(x)| \leqslant p(x)}\ ; \tag{10}$$

on notera l'absence de | |, car on peut démontrer qu'il existe toujours un polynôme positif qui convient.
- L'équation (10) est établie globalement sur $\mathbb{R}$ mais on peut très bien la restreindre sur $\mathbb{R}_+$ (resp. sur $\mathbb{R}_-$) si f n'est à croissance lente qu'en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).

β Fonction décroissante ordinaire

- Une fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est décroissante si $|f(x)| \to 0$ quand $x \to \pm\infty$.
- On admet ici qu'on peut trouver des coefficients $M > 0$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ (sauf si $\alpha = 0$ auquel cas $\beta \geqslant 0$), $\gamma \in \mathbb{R}$ (sauf si $\alpha = \beta = 0$ auquel cas $\gamma \geqslant 0$), etc., tels que

$$|f(x)| \leqslant \frac{M}{|x|^\alpha (\log|x|)^\beta (\log|\log|x||)^\gamma ...}\ . \tag{11}$$

- On défini α, β, γ, etc., les coefficients associés à une fonction comme les inf [10] des α, β, γ, etc., définis précédemment.
- Il peut être plus adapté de définir des coefficients α_+, β_+, γ_+, etc., pour le comportement en $+\infty$ et α_-, β_-, γ_-, etc., pour le comportement en $-\infty$. Dans ce cas, $(\alpha, \beta, \gamma, ...)$ est le minimum de $(\alpha_+, \beta_+, \gamma_+, ...)$ et $(\alpha_-, \beta_-, \gamma_-, ...)$ au sens de l'ordre défini précédemment.
- On peut ne définir que les coefficients $(\alpha_+, \beta_+, \gamma_+)$ (resp. $(\alpha_-, \beta_-, \gamma_-)$) si f n'est décroissante qu'au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

γ Fonction à décroissance rapide

- Soit une fonction décroissante (telle que $|f(x)| \to 0$ quand $x \to \pm\infty$). On se place maintenant dans le cas où on ne peut définir les coefficients $(\alpha, \beta, \gamma, ...)$. Cela revient à supposer que $\alpha = +\infty$.
- Dans ce cas, on dit que la fonction est à décroissance rapide.
- Une telle fonction f décroît plus vite que n'importe quelle puissance x^{-p} quand $x \to \infty$.
- On peut ne définir la décroissance rapide qu'au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$ le cas échéant.
- Un exemple typique est la fonction $\mathrm{e}^{-|x|}$ (e^{-x} si la décroissance n'est qu'en $+\infty$, e^{x} si la décroissance n'est qu'en $-\infty$).

10. Au sens d'un ordre mi numérique, mi alphabétique : $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, ...)$ est plus grand que $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, ...)$ dès que $\alpha_1 > \alpha_2$ ou $\alpha_1 = \alpha_2$ et $\beta_1 > \beta_2$ ou $\alpha_1 = \alpha_2$ et $\beta_1 = \beta_2$ et $\gamma_1 > \gamma 2$, etc.

k Pôles d'une fonction quelconque

α Singularité

- Une singularité d'une fonction f est une valeur x_o au voisinage de laquelle $f(x)$ diverge.
- Il n'existe pas de recensement exhaustif de toutes les singularités possibles. On étudiera le cas

$$f(x) \underset{x \to x_o}{\sim} \frac{c}{|x - x_o|^\alpha (\log|x - x_o|)^\beta (\log|\log|x - x_o||)^\gamma ..} \tag{12a}$$

  où c est une constante déterminée.
- La singularité peut être très bien définie séparément à gauche et à droite. Dans ce cas, la constante c doit être remplacée par une constante c_+ ou c_-, et les coefficients α, β, γ, ..., remplacés par des coefficients α_+, β_+, γ_+, ..., ou α_-, β_-, γ_-, ..., selon que l'on observe la singularité en x_o^+ ou x_o^-.
- On peut même observer une singularité d'un côté seulement, la fonction étant réglée (en général) de l'autre côté. Dans ce cas, on posera $\alpha_+ = \beta_+ = \gamma_+ = 0$ ou $\alpha_- = \beta_- = \gamma_- = 0$ du côté où la fonction est non singulière.

β Pôle

- Lorsque la singularité d'une fonction en x_o est du type

$$f(x) \underset{x \to x_o}{\sim} \frac{c}{|x - x_o|^\alpha} , \tag{12b}$$

  on dit que c'est un ***pôle*** de la fonction, de multiplicité α.
- Quand $\alpha = 1$, on dit que le pôle est ***simple***.
- Comme pour les singularités générales, on peut rencontrer des fonctions ayant un comportement différent à droite et à gauche. Dans ce cas, la multiplicité peut être différente à droite et à gauche.
- Toutefois, on pourra définir une multiplicité globale du pôle dès que $\alpha_+ = \alpha_-$.
- C'est une généralisation des pôles des fractions rationnelles.

γ Décomposition en éléments simples

Soit une fraction rationnelle p/q, avec p et q premiers entre eux. Soient x_1, ..., x_m, les m racines distinctes de q de sorte que ce polynôme peut s'écrire

$$q_(x) = a_n \prod_{i=1}^{m} (x - x_i)^{\alpha_i}$$

où n est le degré de q, a_n le coefficient de la puissance n, et chaque α_i est la multiplicité de la racine x_i (on a donc $n = \sum_{i=1}^m \alpha_i$).

On rappelle le résultat suivant : la fraction se décompose en éléments simples ; plus précisément, il existe β_i^j des coefficients définis pour $i = 1..m$, $j = 1..\alpha_i$, tels que, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\frac{p(x)}{q(x)} = r(x) + \sum_{\substack{i=1..m \\ j=1..\alpha_i}} \frac{\beta_i^j}{(x - x_i)^j}} . \tag{13}$$

r est le reste polynomial, de degré $k - n$, où k est le degré de p ; quand $k < n$, $r = 0$.

3 Intégration

Dans ce chapitre, on ne considère que l'intégration au sens de Riemann, celle définie au sens de Lebesgue sera étudiée par la suite.

a Intégrales propre et impropre

- *Stricto sensus*, l'intégrale de Riemann d'une fonction f est toujours définie avec des bornes finies, c'est-à-dire

$$\int_a^b f(x)dx \qquad a < b \text{ réels.}$$

- Les intégrales avec au moins une borne infinie sont dites impropres [11] car on doit les définir par les limites :

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx \ ; \tag{14a}$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx \ ; \tag{14b}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b f(x)dx \ . \tag{14c}$$

b Intégrale convergente ou divergente

Soit une intégrale $I = \int_a^b f(x)dx$. Deux types de divergences peuvent surgir, qui font tendre la valeur de l'intégrale I vers $\pm\infty$.

α Critères de Riemann et de Bertrand pour les singularités

On ne s'intéresse pas ici au cas de divergence à l'infini, soit que a et b soient finis, soit que I soit convergente à l'infini.

- I peut diverger parce qu'il existe une singularité $x_\text{o} \in [a, b]$ (on dit, par abus, un pôle) de la fonction f.
- Si la fonction f possède un comportement singulier du type (12a), on peut appliquer le critère de Riemann (cas d'un vrai pôle) généralisé par Bertrand pour toute singularité :

$$\int_a^b f(x)dx \text{ est localement convergente au voisinage de } x_\text{o}$$

$$\iff \begin{cases} & \boxed{\alpha < 1} & & \\ \text{ou} & \alpha = 1 & \text{et } \beta > 1 & \\ \text{ou} & \alpha = 1 & \beta = 1 & \text{et } \gamma > 1 \\ & \dots & & \end{cases} \tag{15a}$$

- Au cas où le comportement de f est différent à droite et à gauche, il faut appliquer les critères de Riemann ou Bertrand séparément à droite et à gauche. Pour que I soit convergente, il faut qu'elle le soit des deux côtés.

11. En fait, f doit être bornée sur $[a, b]$ et les intégrales convergentes découlant de l'équation (15a) sont également des intégrales impropres, qu'il faut définir, en toute rigueur, par une limite.

β Critères de Riemann et de Bertrand pour les divergences à l'infini

On suppose ici que, soit $a = -\infty$, soit $b = +\infty$, soit les deux ensemble.

- On ne s'intéressera, dans ce cours, qu'au comportement d'une intégrale I à l'infini (définie au sens impropre de Riemann) d'une fonction f qui tend vers 0 quand $x \to \pm\infty$ (le signe étant celui de la borne impropre qu'on étudie).
- I peut diverger à l'infini bien que $|f(x)| \to 0$ pour $x \to \pm\infty$.
- Si la fonction f possède un comportement [12] en $\pm\infty$ donné par

$$f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \frac{c}{|x|^\alpha (\log |x|)^\beta (\log|\log|x||)^\gamma ..} \ , \tag{15b}$$

on peut appliquer le critère de Riemann (cas où seul $\alpha \neq 0$) généralisé par Bertrand :

$$\int_a^b f(x)dx \ (a = -\infty \text{ ou } b = \infty) \text{ est convergente en } \pm\infty$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{llll} & \boxed{\alpha > 1} & & \\ \text{ou} & \alpha = 1 & \text{et } \beta > 1 & \\ \text{ou} & \alpha = 1 & \beta = 1 & \text{et } \gamma > 1 \\ & \cdots & & \end{array} \right. \tag{15c}$$

- Dans le cas $a = -\infty$ ***et*** $b = \infty$, si le comportement de la fonction est différent en $+\infty$ et en $-\infty$, il faut appliquer les critères de Riemann ou Bertrand séparément aux deux bornes. Pour que l'intégrale soit convergente, il faut qu'elle le soit en $+\infty$ et en $-\infty$.

Cas général

Dans le cas général, une fonction peut admettre plusieurs singularités. Pour étudier la convergence, on recense toutes les singularités x_i, puis on étudie la convergence aux différents pôles x_i, ainsi, éventuellement, qu'en $\pm\infty$.

c Majoration d'une intégrale

- Soit une fonction f intégrable au sens de Riemann. On a, en toute généralité (a et b peuvent être $-\infty$ et ∞, à condition que les intégrales convergent),

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx \ . \tag{16}$$

- Le cas d'égalité correspond à une fonction f positive ou nulle sur le domaine d'intégration, c'est-à-dire telle que

$$\forall x \in]a, b[\quad f(x) \geqslant 0 \ .$$

12. Malgré la similitude avec le cas d'une singularité en $x = 0$, il s'agit ici d'un comportement convergent.

d Changement de variable

Il s'agit ici des changements de variable pour l'intégrale de Riemann ; il y a quelques différences avec le cas de l'intégrale de Lebesgue, qu'on étudiera par la suite.

On considère l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x)dx \ .$$

α Translation

- On peut faire le changement de variable $x' = x + x_o$ dans l'intégrale I, où x_o est une constante réelle. On a alors

$$\boxed{dx' = dx} \tag{17a}$$

  et l'intégrale devient

$$I = \int_{a+x_o}^{b+x_o} f(x - x_o)dx \ ;$$

  il est inutile de garder le $\boxed{'}$ car la variable est muette (on l'a donc omis ici).
- On remarque qu'apparaît la translatée ${}^{x_o}f$ dans l'intégrale.
- Les formules précédentes se généralisent aux cas de bornes infinies $a = -\infty$ ou $b = \infty$, à condition d'utiliser les règles d'addition

$$\infty + x_o = \infty \qquad -\infty + x_o = -\infty \ .$$

β Changement d'échelle

- On peut faire le changement de variable $x' = \lambda x$ dans l'intégrale I, où λ est une constante réelle non nulle. On a alors

$$\boxed{dx' = \lambda dx} \tag{17b}$$

  et l'intégrale devient

$$I = \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda a}^{\lambda b} f(x/\lambda)dx$$

  où on a de nouveau omis le $\boxed{'}$.
- On remarque qu'apparaît la dilatée f_λ dans l'intégrale.
- Il faut noter que, dans le cas où $\lambda < 0$, les bornes de l'intégrale sont inversées, de sorte qu'il faudrait mieux écrire alors

$$I = \frac{1}{|\lambda|} \int_{\lambda b}^{\lambda a} f(x/\lambda)dx$$

  et $|\lambda| = -\lambda$ dans ce cas.
- Les formules précédentes se généralisent au cas de bornes infinies $a = -\infty$ ou $b = \infty$, à condition d'utiliser les règles de multiplication

$$\begin{array}{lll} \text{si } \lambda > 0 & \infty\lambda = \infty & -\infty\lambda = -\infty \ ; \\ \text{si } \lambda < 0 & \infty\lambda = -\infty & -\infty\lambda = \infty \ . \end{array}$$

γ Cas général

- Soit le changement de variable général $x' = h(x)$ (on admet que h est une bijection de $]a, b[$ vers $]h(a), h(b)[$), alors

$$\boxed{dx' = h'(x)dx} \tag{17c}$$

et l'intégrale devient

$$I = \int_{h(a)}^{h(b)} f(h^{-1}(x)) \frac{1}{h'(h^{-1}(x))} dx$$

où on a de nouveau omis le $\boxed{\,'\,}$.
- Des problèmes d'inversion des bornes peuvent encore se produire. On peut montrer que cela se produit toujours en coïncidence avec un changement de signe de $h' \circ h^{-1}$.

e Primitive

- Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ (il n'est pas nécessaire que son intégrale impropre soit convergente en $\pm\infty$), alors une primitive F est donnée par les formules suivantes :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{18a}$$

$$\text{ou encore} \qquad F(x) = -\int_x^a f(t)dt \tag{18b}$$

où a est quelconque et peut même valoir $\pm\infty$ selon les cas.
- On peut montrer la formule réciproque suivante : Soit $F(x)$ définie par

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$$

alors, la dérivée de F vaut

$$\boxed{F'(x) = (h'(x) - g'(x))f(x)}\ .$$

f Intégration par partie

On rappelle que, pour f et g deux fonctions telles que $f'\,g$ et $f\,g'$ soient intégrables sur $[a, b]$ (f et g doivent en particulier être continûment dérivables sur $]a, b[$), on a :

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)dx + \int_a^b f'(x)g(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b} \equiv f(b^-)g(b^-) - f(a^+)g(a^+) \tag{19}$$

où on a précisé de quel côté on prend les limites au cas où f ou g ne serait pas continue en a ou b.

B Intégration de Lebesgue

1 Mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$

La mesure d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ permet de quantifier son importance relative. Elle est construite de la façon suivante :

a Mesure d'un intervalle

On définit tout d'abord la mesure de Lebesgue d'un intervalle. La mesure de l'intervalle $[a, b]$ est sa longueur $\mu([a, b]) = \mu([a, b[) = \mu(]a, b]) = \mu(]a, b[) = b - a$; il n'importe pas qu'on choisisse les bornes ouvertes ou fermées.

En particulier, on en déduit que la mesure d'un singleton $\{x_o\}$ vaut $\mu(\{x_o\}) = 0$; un point ne compte pas relativement à la droite réelle. On dit qu'un singleton est **négligeable** pour la mesure de Lebesgue.

b Ensemble négligeable

De façon générale, un ensemble est dit négligeable si sa mesure est nulle. On va étudier deux exemples très différents ci-dessous.

c Mesure d'un ensemble dénombrable

La mesure d'un ensemble dénombrable $\mathcal{N}$ est nulle, $\mu(\mathcal{N}) = 0$, autrement dit, les ensembles dénombrables sont **négligeables** pour la mesure de Lebesgue.

Démonstration : par définition, on a $\mathcal{N} = \{x_i, i \in \mathbb{N}^*\}$, où les x_i sont les éléments de $\mathcal{N}$ que l'on peut énumérer dans l'ordre, x_1, x_2, ...

Soit $\varepsilon > 0$, montrons dans un premier temps que $\mu(\mathcal{N}) < \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Pour cela, on va plonger $\mathcal{N}$ dans un ensemble plus grand, notons le $\mathcal{N}_\varepsilon$, construit de la façon suivante :
$\mathcal{N}_\varepsilon = \bigcup\limits_{i=1,2,..\infty} [x_i - \varepsilon^i, x_i + \varepsilon^i]$. Les intervalles $[x_i - \varepsilon^i, x_i + \varepsilon^i]$ peuvent se recouper, mais on a $\mu(\mathcal{N}_\varepsilon) \leqslant \sum_i \mu([x_i - \varepsilon^i, x_i + \varepsilon^i]) = \sum_{i=1}^{\infty} 2\varepsilon^i = 2\varepsilon/(1-\varepsilon)$. On a finalement$\mu(\mathcal{N}) \leqslant \mu(\mathcal{N}_\varepsilon) \leqslant 2\varepsilon/(1-\varepsilon)$.

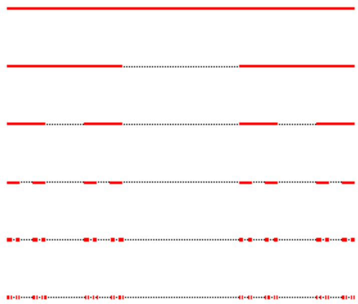
Comme l'inégalité est vraie $\forall \varepsilon > 0$, on peut passer à la limite $\varepsilon \to 0^+$, d'où $\mu(\mathcal{N}) \leqslant 0$, soit finalement $\mu(\mathcal{N}) = 0$.

d Ensemble de Cantor

Il existe également des ensembles **non dénombrables** et négligeables. Le plus caractéristique d'entre eux est l'ensemble de Cantor. On va définir le sous-ensemble de Cantor $\mathcal{C}_1$ restreint à l'intervalle $[0, 1]$.

Il existe une construction géométrique par récurrence : dans une première étape, on exclut de $[0, 1]$ l'intervalle $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$; il reste donc $[0, \frac{1}{3}[\cup]\frac{2}{3}, 1]$. Dans chaque intervalle, on réitère la même exclusion, en recalant l'origine sur sa limite inférieure et en appliquant un facteur d'échelle $1/3$:

à la deuxième étape, il y a exactement deux intervalles, on exclut donc $[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$ et $[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}]$ et il reste quatre composantes connexes. À la $n^{\text{ème}}$ étape, on exclut des segments du type $[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}]$ et il reste exactement 2^n composantes. On peut montrer qu'à l'infini, cette construction engendre un espace non dénombrable mais de mesure nulle.



Il existe également une formulation algébrique, plus aisée mais moins parlante. $\mathcal{C}_1 = \{$les nombres décimaux s'écrivant $0{,}n_1n_2...n_i..$ en base 3 tels que $n_i = 0, 2\}$ (autrement dit, $n_i = 1$ est interdit).

e Mesure d'un sous-ensemble quelconque

On considère un sous-espace A de $\mathbb{R}$ qui admet une décomposition en un nombre dénombrable de composantes connexes :

$$A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} I_i \tag{20}$$

où I_i sont des intervalles disjoints.

α Ensemble mesurable

- A peut être ouvert, fermé ou quelconque.
- Il peut arriver que le nombre de composantes connexes d'un ensemble A ne soit pas dénombrable, bien qu'on puisse le mesurer. C'est le cas notamment de l'espace de Cantor $\mathcal{C}_1$. Cependant, la démonstration qu'il est de mesure nulle passe par une majoration de la mesure d'un ouvert contenant $[0, 1] \backslash \mathcal{C}_1$.
- Dans le cas général, on ne peut mesurer les ensembles qui ont un nombre non dénombrable de composantes connexes. D'ailleurs, l'existence d'une telle décomposition n'est assurée qu'à l'aide du lemme de Zorn, on peut tout aussi bien considérer qu'elle n'est pas toujours assurée.
- Dans le cas où la décomposition en un nombre dénombrable de composantes connexes existe, on dit que A est un ensemble **mesurable**.

β Longueur

- La mesure d'un ensemble mesurable A est sa longueur.
- En posant $\ell_i = \mu(I_i)$ la longueur de chaque intervalle I_i intervenant dans la formule (20), la mesure de A est donnée par

$$\boxed{\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \ell_i} \ . \tag{21}$$

- La mesure $\mu(A)$ peut être infinie.
- Dans ce dernier cas, pour mesurer l'importance relative de A dans $\mathbb{R}$, on calcule la limite

$$\lim_{L \to \infty} \frac{\mu(A \cap]-L, L[)}{2L}$$

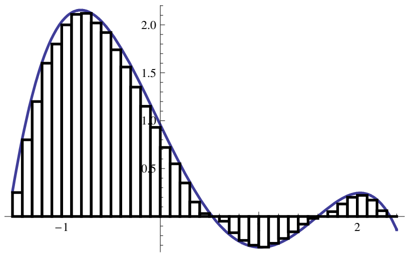
où $2L$ est la mesure de $]-L, L[$.

2 Intégrale de Lebesgue

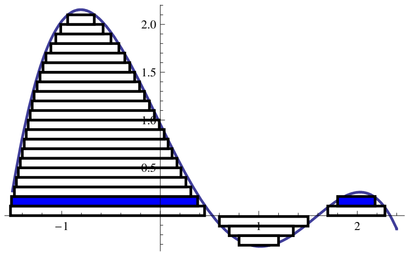
a Principe

Pour calculer l'aire I définie par une fonction réelle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on dispose de deux méthodes qui, bien qu'elles donnent presque toujours le même résultat, sont radicalement différentes.

Dans l'intégration de Riemann, on découpe l'aire en rectangles verticaux et la somme des aires de ces rectangles tend vers I quand leur largeur de base $\to 0$.



Dans l'intégration de Lebesgue, on découpe les aires en bandes rectangulaires horizontales (qui ne sont pas nécessairement connexes, comme celle qui est grisée par exemple). Ici encore la somme des aires de ces rectangles tend vers I quand leur hauteur tend vers 0.



Une conséquence de la construction de l'intégrale de Lebesgue est que ses bornes naturelles d'intégration sont toujours $-\infty$ et $+\infty$. On la notera, pour distinguer de l'intégrale de Riemann, $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt$. On rencontre aussi la notation[13] $\int f(t)dt$.

L'égalité

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \tag{22}$$

signifie que les intégrales de Riemann et de Lebesgue donnent la même aire.

b Propriétés

α Majoration

La formule (16) est valable pour les intégrales de Lebesgue. On a par contre des formules supplémentaires, qui proviennent de la construction de Lebesgue.

Décomposition en partie positive et négative

- Soit une fonction f intégrable au sens de Lebesgue, on peut décomposer f de façon unique en une partie positive et une partie négative, par :

$$f = f_{>0} - f_{<0} \qquad \text{avec}$$
$$f_{>0} = \frac{f + |f|}{2} \qquad f_{<0} = \frac{|f| - f}{2}$$

et les deux fonctions $f_{>0}$ et $f_{<0}$ sont toutes deux positives ou nulles.

- L'intégrale de Lebesgue de f peut alors s'écrire

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f_{>0}(x)dx}_{>0} - \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f_{<0}(x)dx}_{>0} \tag{23}$$

où l'on sépare les aires positives et les aires négatives.

13. Attention à ne pas confondre avec la notation abusive des primitives.

- La formule (23) est *a priori* interdite pour les intégrales de Riemann impropre. Elle provient de la construction de Lebesgue, qui au départ ne s'applique qu'aux fonctions positives, puis est étendue au cas général, justement par la formule (23).
- Cette formule permet d'établir le théorème suivant :

γ Théorème d'existence

- Soit une fonction f, elle est intégrable au sens de Lebesgue si et seulement si son module $|f|$ est intégrable également. Autrement dit

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} f(t)dt \text{ existe} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt \text{ existe}} \ . \tag{24}$$

Démonstration : on a $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt = \int_{\mathbb{R}} f_{>0}(x)dx + \int_{\mathbb{R}} f_{<0}(x)dx$.

- Il existe une version analogue de ce théorème pour les intégrales de Riemann définies proprement sur un intervalle fini (cf. la note 11 de la partie A). Par contre, il est faux pour les intégrales dites impropres.

c Changement de variable

On considère une intégrale de Lebesgue

$$I = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx \ .$$

α Translation

On peut faire le changement de variable $x' = x + x_o$ dans l'intégrale I pour tout $x_o \in \mathbb{R}$. L'équation (17a) pour l'élément différentiel, que l'on a établie pour l'intégrale de Riemann, est valide ici et on a finalement

$$I = \int_{\mathbb{R}} f(x - x_o)dx$$

où on omet systématiquement les primes.

β Changement d'échelle

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on peut faire une inflation $x' = \lambda x$ dans l'intégrale I. La relation (17b) n'est pas valable, on écrit à la place :

$$dx' = |\lambda|dx \tag{25}$$

et on trouve

$$I = \frac{1}{|\lambda|} \int_{\mathbb{R}} f(\frac{x}{\lambda})dx \ .$$

- Notez bien que les bornes sont inchangées, par définition.
- Pour le cas $\lambda < 0$, cela revient bien au même que par l'intégration de Riemann ; le signe de dx/dx' se compense avec celui provenant de l'inversion des bornes, dans l'intégrale de Riemann :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{+\infty}^{-\infty} f(\lambda x)\lambda dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda x)(-\lambda)dx = |\lambda| \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda x)dx \ .$$

Ce résultat est logique puisque le signe d'une aire ne dépend pas de la façon dont on la calcule ; le facteur $|\lambda|$ ne change pas son signe, contrairement à un facteur λ, qui changerait le signe de l'aire !

d Fonction nulle presque partout

On appelle fonction *nulle* ***presque partout*** (ou encore ***pour presque tout*** x) une fonction f telle que $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx = 0$. Une telle fonction n'est pas nécessairement nulle, $f \neq 0$, car il peut exister des points x_0, x_1, ..., x_n, tels que $f(x_i) \neq 0$. L'ensemble des points x_i où la fonction f n'est pas nulle est négligeable, c'est-à-dire de mesure nulle.[14]

Fonction caractéristique d'un ensemble négligeable

- Un exemple fondamental de fonction nulle presque partout est la fonction caractéristique d'un ensemble de mesure nulle. En effet, pour tout $\mathcal{N}$ de mesure nulle, la fonction $\mathbb{I}_{\mathcal{N}}$ est nulle hors de $\mathcal{N}$; or, dans ce cas, mesure et intégrale coïncident.
- Par exemple, soit $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels. D'après ce qui précède, on définit fonction $\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$ par $\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et 0 sinon. Alors, $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(t)dt = 0$: la fonction $\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$ est nulle presque partout.
- Notez bien que montrer que $\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$ est nulle presque partout et montrer que $\mathbb{Q}$ est de mesure nulle sont un seul et même problème, ce qui permet de réunifier de façon synthétique la notion d'ensemble négligeable et la notion de fonction nulle presque partout.

β Égalité presque partout

Soit f et g deux fonctions, on définit l'*égalité* ***presque partout***, qu'on note $f = g$ pp, par $f - g$ nulle presque partout, $f - g = 0$ pp.

- On a alors

$$\boxed{f = g \text{ pp} \quad \Longrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} f(t)dt = \int_{\mathbb{R}} g(t)dt} \,. \tag{26}$$

Démonstration : d'après l'équation (16), on a

$$0 \leqslant \left| \int_{\mathbb{R}} f(t) - g(t)dt \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(t) - g(t)|dt = 0$$

où la dernière équation est la définition de $f - g = 0$ pp.

- La réciproque est fausse ; par contre, on peut écrire

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} |f(t) - g(t)|dt = 0 \quad \Longrightarrow \quad f = g \text{ pp}} \,.$$

e Conditions d'existence

- Il peut arriver que l'intégrale existe au sens de Lebesgue mais pas au sens de Riemann ; c'est par exemple le cas des fonctions nulles presque partout ; on peut créer d'autres exemples en ajoutant à n'importe quelle fonction intégrable une fonction nulle presque partout.
- À l'inverse, il existe des cas où seule l'intégrale de Riemann est définie (il s'agit toujours alors d'intégrale de Riemann **impropre**). Cela provient du théorème (24).
- Contre-exemple fondamental : $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \pi$ est une intégrale convergente, elle est bien définie au sens des intégrales impropres de Riemann. Pour le montrer, il suffit de remarquer que c'est une série alternée de terme général tendant vers 0. Or, $\int_0^{\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$ est divergente (à cause du terme en $\frac{1}{t}$). Donc, d'après le théorème (24), $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(t)}{t} dt$ n'est pas intégrable au sens de Lebesgue.

14. Tandis que la mesure du complémentaire vaut $\mu(\mathbb{R} \backslash \{x_i\}) = \mu(\mathbb{R}) = \infty$, f étant nulle sur ce complémentaire ; pour mieux comprendre, on peut restreindre la fonction à l'intervalle $\subset [0,1]$, on a $\mu(\{x_i \in [0,1]\}) = 0$ et $\mu([0,1] \backslash \{x_i \in [0,1]\}) = \mu([0,1]) = 1$.

- L'aspect le plus paradoxal de ce contre-exemple est que l'on montre en intégrant par parties que cette intégrale est égale à $\int_{\mathbb{R}} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt$, qui, elle, est bien intégrable au sens de Lebesgue. Ceci prouve simplement que l'intégration par parties est une technique **propre à l'intégration de Riemann**.

f Intégrale définie sur un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}$

α Définition

Soit A un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}$, on définit l'intégrale de Lebesgue d'une fonction f sur A par

$$\boxed{\int_A f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_A(x) f(x) dx} \tag{27}$$

où l'on a multiplié f par la fonction caractéristique de A pour annuler l'intégrale sur $\mathbb{R}\backslash A$.

β Égalité des intégrales finies de Riemann et Lebesgue

Pour le cas particulier d'un intervalle[15] $A = [a, b]$, l'égalité entre intégrales de Riemann et de Lebesgue s'écrit, de façon symbolique,

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx} \tag{28}$$

où la dernière intégrale est, par définition, $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{[a,b]}(x) f(x) dx$.

3 Métrique sur les fonctions

On considère ici les fonctions définies dans $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{C}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et on cherche les normes adaptées à ces fonctions.

a Norme $\| \|_p$

α Définition

On utilisera les normes $\| \|_p$, définies par

$$\boxed{\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}} \,. \tag{29}$$

Relation entre normes

- On ne peut pas ordonner ces normes.
- Toutefois, on peut montrer la relation

$$\|f\|_p \leqslant \ell^{\frac{1}{p(p+1)}} \|f\|_{p+1}$$

où ℓ est la longueur du support[16] de f, donnée par la formule (21). Quand ℓ est infini, cette formule est inutilisable.

15. Il n'importe pas de savoir si les bornes sont fermées ou ouvertes puisqu'une intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt$ est inchangée si on change f sur un ensemble négligeable de points.

16. Remarque, pour une fonction réglée par morceaux, Support(f) est toujours mesurable, et ℓ est bien défini (mais peut être infini).

γ Exemples

- Dans la pratique, on n'utilisera que les normes $\| \|_1$ et $\| \|_2$ ainsi que le cas limite suivant :
- On définit la norme $\| \|_\infty$ correspondant à la limite $p \to \infty$ par :

$$\boxed{\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p} \,. \tag{30}$$

δ Lien entre $\| \|_\infty$ et la norme sup

- Si f est une fonction suffisamment continue, on peut montrer

$$\boxed{\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}}(f)} \tag{31}$$

autrement dit, la norme $\| \|_\infty$ est égale à la la norme sup des fonctions.
- Cependant, sup est définie au point près, et donc l'égalité entre $\| \|_\infty$ et la norme sup peut être violée par des fonctions dont la norme supérieure à été artificiellement modifiée en un point.
- Par exemple, soit f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$ $\forall x \neq 0$ et $f(0) = 2$; on a $\|f\|_\infty = 1$ tandis que $\sup_{\mathbb{R}}(f) = 2$.
- Toutefois, il ne s'agit que d'une différence artificielle et, en dehors de cas spécialement construits comme celui-ci, on ne la rencontre jamais.

b Espaces de fonctions

À chaque norme ainsi définie est associé un espace de fonctions.

α Espace $\mathcal{L}_1$

On note $\mathcal{L}_1$ l'ensemble des fonctions intégrables au sens de Lebesgue, $\mathcal{L}_1 = \{f$ telle que $\|f\|_1 < \infty\}$. Ce sont les fonctions pour lesquelles la norme $\| \|_1$ est bien définie et elles sont définies presque partout.

β Espace $\mathcal{L}_2$

On note $\mathcal{L}_2$ l'ensemble des fonctions de carré sommable [17] au sens de Lebesgue, $\mathcal{L}_2 = \{f$ telle que $\|f\|_2 < \infty\}$. Ce sont les fonctions pour lesquelles la norme $\| \|_2$ est bien définie et elles sont définies presque partout.

γ Espace $\mathcal{L}_\infty$

On note $\mathcal{L}_\infty$ l'ensemble des fonctions bornées presque partout, $\mathcal{L}_\infty = \{f$ telle que $\|f\|_\infty < \infty\}$. Ce sont les fonctions pour lesquelles la norme $\| \|_\infty$ est bien définie et elles sont définies presque partout.

c Produits scalaire et hermitien

α Produit scalaire

Pour les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (à valeur dans $\mathbb{R}$), on définit le produit scalaire par

$$\boxed{\langle f|g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)dt} \,. \tag{32a}$$

17. C'est un synonyme de *intégrable* que l'on emploie ici par habitude.

Toutefois, on se placera plutôt, dans ce cours, dans le cas complexe :

β Produit hermitien

Pour les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (à valeur dans $\mathbb{C}$), on définit le produit hermitien par

$$\boxed{\langle f|g\rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)}g(t)dt} \, . \tag{32b}$$

d Propriétés des normes construites avec Lebesgue

α Fonctions égales presque partout

- L'équation (6a) n'est pas vérifiée par les normes construites avec l'intégrale de Lebesgue : l'égalité $f = g$ est remplacée par l'égalité presque partout, $f = g$ pp, ce qui s'écrit, $\forall p$,

$$\boxed{f = g \text{ pp} \quad \Longleftrightarrow \quad \|f - g\|_p = 0} \, . \tag{33}$$

- Ceci est vrai pour $\| \|_\infty$ également.
- Autrement dit, deux fonctions égales presque partout ne peuvent pas être distinguées par leur norme.
- Par contre, la norme sup vérifie l'équation (6a) et distingue les fonctions de façon stricte.

β Inégalité triangulaire

Ces normes vérifient bien l'inégalité triangulaire (6b).

γ $\| \|_2$ et les produits scalaire ou hermitien

- Selon qu'on considère les fonctions à valeur dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, on peut écrire que $\|\|_2$ est la norme associée au produit scalaire ou hermitien.
- La formule de Schwarz (6d) est bien vérifiée et s'écrit donc,

$$\forall (f,g) \in \mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_2 \quad \boxed{\langle f|g\rangle \leqslant \|f\|_2 \|g\|_2} \tag{34a}$$

  où on choisit le produit scalaire ou hermitien selon que les fonctions sont réelles ou complexes.
- Dans le cas réel, l'équation (6e) est vérifiée, on peut l'écrire :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_2 \quad \boxed{\langle f|g\rangle = \frac{\|f+g\|_2 - \|f-g\|_2}{4}} \, . \tag{34b}$$

- Dans le cas complexe, l'équation (6f) est vérifiée, on peut l'écrire :

$$\forall f, g \in \mathcal{L}_2 \quad \boxed{\langle f|g\rangle = \frac{\|f+g\|_2 - \|f-g\|_2 - \mathbb{i}\|f+\mathbb{i}g\|_2 + \mathbb{i}\|f-\mathbb{i}g\|_2}{4}} \, . \tag{34c}$$

- En conséquence, on a le théorème suivant : si $(f,g) \in \mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_2$, alors $\langle f|g\rangle$ existe.

4 Intégrale à paramètres ou variables multiples

a Théorème de convergence dominée

α Définition

Soit une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{L}_1$ tendant simplement vers une fonction f (c'est-à-dire que $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to \infty$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$).

S'il existe $g \in \mathcal{L}_1$, tel que $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et pour presque tout x, alors :

- $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$;
- on a le droit d'intervertir $\lim_n$ et $\int dx$ dans

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx} = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \boxed{\int_{\mathbb{R}} f(x)dx} \; ; \tag{35a}$$

- g est appelé un ***dominant***.

β Application aux intégrales dépendant d'un paramètre

Soit $f(x, \lambda)$ une fonction à deux variables réelles, λ est un paramètre *extérieur*.

S'il existe une fonction $g \in \mathcal{L}_1$ telle que $\forall (x, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ $|f(x, \lambda)| \leqslant g(x)$, alors :

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $f(x, \lambda)$ est Lebesgue-intégrable[18] par rapport à x, autrement dit $\int_{\mathbb{R}} f(x, \lambda)dx$ existe ;
- soit $F(\lambda) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(x, \lambda)dx$, si f est continue par rapport à λ, F est une fonction continue et on peut écrire

$$\lim_{\lambda\to\lambda_o} \int_{\mathbb{R}} f(x, \lambda)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x, \lambda_o)dx \; ; \tag{35b}$$

- il peut exister des λ isolés pour lesquels f n'est pas continue. Dans ce cas, l'égalité (35b) est remplacée par la formule plus générale :

$$\lim_{\lambda\to\lambda_o} \int_{\mathbb{R}} f(x, \lambda)dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{\lambda\to\lambda_o} f(x, \lambda)dx \; ;$$

- g est un dominant grâce auquel on peut intervertir intégrale et limite.

γ Application à la dérivation d'intégrales dépendant d'un paramètre

Soit $f(x, \lambda)$ une fonction à deux variables réelles.

S'il existe une fonction $g \in \mathcal{L}_1$ telle que $\forall (x, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ $\left|\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)\right| \leqslant g(x)$, alors :

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $f(x, \lambda)$ est Lebesgue-intégrable par rapport à x, autrement dit $\int_{\mathbb{R}} f(x, \lambda)dx$ existe ;
- soit $F(\lambda) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(x, \lambda)dx$, si f est dérivable en λ_o, F l'est également et sa dérivée s'écrit

$$\boxed{F'(\lambda_o)} \equiv \frac{dF}{d\lambda}(\lambda_o) \equiv \lim_{\lambda\to\lambda_o} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x, \lambda) - f(x, \lambda_o)}{\lambda - \lambda_o} dx = \boxed{\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda_o)dx} \; ; \tag{35c}$$

18. En notation savante, cela s'écrit $f(\_, \lambda) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

- si $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ est continue par rapport à λ, $F \in \mathcal{C}_1(\mathbb{R})$, et la continuité de sa dérivée s'écrit

$$\boxed{\lim_{\lambda \to \lambda_o} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda_o) dx} \ ; \tag{35d}$$

- il peut exister des λ isolés pour lesquels $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ n'est pas continue. Dans ce cas, l'égalité (35d) est remplacée par la formule plus générale :

$$\lim_{\lambda \to \lambda_o} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{\lambda \to \lambda_o} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) dx \ ;$$

- dans l'interversion entre dérivée et intégrale, notez bien que la dérivée totale devient une dérivée partielle.

b Théorème de Fubini

α Énoncé du théorème

Soit f une fonction de deux variables réelles, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$. S'il existe g et $h \in \mathcal{L}_1$, telles que

$$\begin{array}{lrcl} \forall y \in \mathbb{R} & |f(x,y)| & \leqslant & g(x) \\ \forall x \in \mathbb{R} & |f(x,y)| & \leqslant & h(y) \end{array}$$

alors f est intégrable dans $\mathbb{R}^2$ au sens de Lebesgue et

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dxdy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} (f(x,y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} (f(x,y) dy \right) dx} \ . \tag{36}$$

β Intégrale définie dans le plan

Contrairement à ce qu'on laisse entendre parfois, l'intégrale de f dans le plan est définie **sans** passer par les intégrales simples. La confusion vient de ce que dans tous les exemples usuels, ce sont les termes de droite de l'égalité précédente que l'on utilise en pratique.

Pour construire une intégrale définie dans le plan, on utilise un découpage en surfaces élémentaires (rectangles, secteurs, anneaux, selon la géométrie des coordonnées utilisées) de façon analogue aux intervalles, pour la mesure d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

γ Cas de variables séparées

Soit $(f, g) \in \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_1$, les conditions d'existence de l'intégrale de $h(x,y) = f(x)g(y)$ sont bien réalisées et on a séparation des variables, de sorte que

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} h(x,y)\, dxdy = \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} g(y) dy \right)} \ .$$

5 Valeur Principale

Il s'agit d'une procédure de régularisation des intégrales divergentes, dans un cas simple (un cas plus complexe sera rapidement étudié avec les distributions).

a Régularisation d'un pôle simple

Soit une fonction f admettant un pôle simple x_o au sens de l'équation (12b), c'est-à-dire que $\alpha = 1$. On admettra d'abord que ce pôle est la seule singularité de la fonction.

De plus, on suppose que la constante c est identique à droite et à gauche.

Divergence de l'intégrale

- On considère une intégrale définie au sens de Lebesgue, en utilisant la formule (27). Mais on pourra alternativement l'écrire comme une intégrale de Riemann.
- On suppose que $x_o \in]a,b[$. Alors, l'intégrale

$$\int_{[a,b]} f(x)dx$$

est ***divergente*** d'après le critère de Riemann (15a).
- On peut généraliser ce qui précède pour les cas $a = -\infty$ ou $b = \infty$.

Régularisation de l'intégrale

- On peut régulariser cette intégrale et définir sa **valeur principale**

$$\begin{aligned} \mathrm{vp}\left(\int_a^b f(x)dx\right) &= \lim_{\epsilon \to 0^+}\left(\int_a^{x_o-\epsilon} f(x)dx + \int_{x_o+\epsilon}^b f(x)dx\right) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0^+}\int_{[a,b]\setminus]x_o-\epsilon,x_o\epsilon[} f(x)dx \ . \end{aligned} \tag{37a}$$

- La valeur principale ne diverge pas et permet de donner un sens à l'intégrale.

b Régularisation à l'infini

Soit une fonction f telle que

$$f(x) \sim c/x$$

en $+\infty$ et en $-\infty$, et la constante c est identique en $+\infty$ et en $-\infty$. On admettra d'abord que la fonction n'admet aucune singularité.

Divergence de l'intégrale

L'intégrale, définie exclusivement au sens de Lebesgue,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$$

est ***divergente*** d'après le critère de Riemann (15c).

Régularisation de l'intégrale

- On peut régulariser cette intégrale et définir sa **valeur principale**

$$\mathrm{vp}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)dx\right) = \lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L} f(x)dx \ . \tag{37b}$$

- La valeur principale ne diverge pas et permet de donner un sens à l'intégrale.

c Cas général

- Au cas où une fonction possède plusieurs pôles, ou qu'en plus d'un comportement à l'infini en c/x elle possède au moins un pôle, on peut conjuguer les différentes régularisations et définir sa valeur principale, qui est non divergente et donne un sens à l'intégrale que l'on étudie.
- À titre d'exemple, on peut calculer l'intégrale de la fonction $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}$ en régularisant à la fois en 0 et à l'infini. La valeur principale de cette intégrale est

$$\lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ L \to \infty}} \int_{[-L,L] \setminus]-\epsilon,\epsilon[} \frac{1}{t} dt = 0 \ ;$$

elle est nulle puisque la fonction est impaire !

6 Convolution

a Définition et propriétés

α Définition

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Pour $(f,g) \in \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_1$ ou $(f,g) \in \mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_2$, on définit le produit de convolution de f et de g, noté $f * g$, par

$$\boxed{f * g\,(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt} \ . \tag{38}$$

Existence

Cas de fonctions intégrables Si $(f,g) \in \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_1$, on définit $h(x,t) = f(x)g(t)$ qui vérifie les conditions de Fubini (cas de séparation des variables), donc $\int_{\mathbb{R}} f(x)g(t)dxdt$ existe. On a le droit de faire le changement de variable $(x,t) \to (x',t') = (x+t,t)$, dont le Jacobien s'écrit (on utilise $x = x' - t'$) :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial x}{\partial t'} \\ \frac{\partial t}{\partial x'} & \frac{\partial t}{\partial t'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

d'où $\int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(t)dxdt = \int_{\mathbb{R}^2} f(x'-t')g(t')|J|dx'dt' = \int_{\mathbb{R}^2} f(x-t)g(t)dxdt$. Comme $\int_{\mathbb{R}^2} f(x-t)g(t)dxdt$ existe, d'après le théorème de Fubini $\int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt$ existe également pour presque tout x (et est intégrable !).

Cas de fonctions de carré sommable Si $(f,g) \in \mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_2$, on définit $h = \overline{{}^x\check{f}}$, où $\check{u}$ désigne la transposée d'une fonction u et $\overline{}$ la conjugaison complexe, autrement dit $h(t) = \overline{f(-(t-x))} = \overline{f(x-t)}$; alors $h \in \mathcal{L}_2$ car $\mathcal{L}_2$ est stable par translation, transposition et conjugaison ; donc le produit hermitien $\langle h|g \rangle$ existe ; or, il s'écrit

$$\langle h|g \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{h(t)} g(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt \ .$$

γ Commutativité

Le produit de convolution est commutatif. En effet,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt$$

en faisant le changement de variable $t \to x - t$.

b Convolution de deux fonctions à support compact

α Cas général

Soit f dont le support est $\text{Support}(f) \subset [a,b]$, autrement dit f est nulle en dehors de cet intervalle,[19] soit g dont le support est $\text{Support}(g) \subset [c,d]$, alors :

- $f * g$ existe ;
- $\text{Support}(f * g) \subset [a+c, b+d]$.

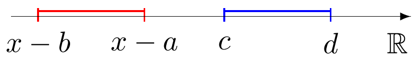
Démonstration :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\mathbb{I}_{[a,b]}(x-t)}_{\substack{\text{non nul pour } a\leqslant x-t\leqslant b \\ \iff x-b\leqslant t\leqslant x-a}} f(x-t) \underbrace{\mathbb{I}_{[c,d]}(t)}_{\text{non nul pour } c\leqslant t\leqslant d} g(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{[x-b,x-a]}(t) f(x-t) \mathbb{I}_{[c,d]}(t) g(t)dt$$

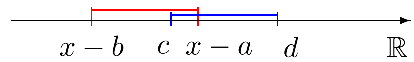
$$= \int_{[x-b,x-a]\cap[c,d]} f(x-t)g(t)dt \ ;$$

et l'intégrale est nulle hors de $[x-b, x-a] \cap [c,d]$. Pour étudier cette intersection, il faut discuter sur les valeurs de x. On trouve six cas :

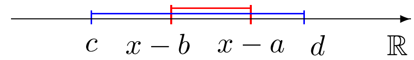
· Pour $x < a+c$, le maximum de $[x-b, x-a]$ est inférieur au minimum de $[c,d]$ et l'intersection est vide. $\varnothing$



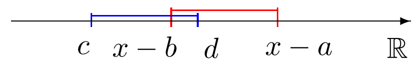
· Pour $a+c \leqslant x < \min(a+d, b+c)$, les intervalles se chevauchent, comme représenté ci-contre. $[c, x-a]$



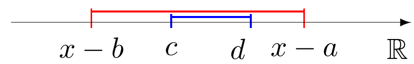
· Pour $b+c \leqslant x < a+d$, l'intervalle $[x-b, x-a]$ est emboîté dans $[c,d]$; (cas valable pour $b+c < a+d$). $[x-b, x-a]$



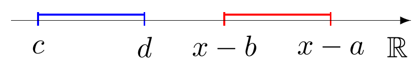
· Pour $\max(a+d, b+c) \leqslant x < b+d$, les intervalles se chevauchent, comme représenté ci-contre. $[x-b, d]$



· Pour $a+d \leqslant x < b+c$, l'intervalle $[c,d]$ est emboîté dans $[x-b, x-a]$; (cas valable pour $a+d < b+c$). $[c,d]$



· Pour $x > b+d$, le maximum de $[c,d]$ est inférieur au minimum de $[x-b, x-a]$ et l'intersection est vide. $\varnothing$



On laisse au lecteur le soin de vérifier qu'il n'y a pas d'autres cas. Lorsque l'intersection est vide, l'intégrale donne 0. Or, dans tous les autres cas, x vérifie $a+b \leqslant x \leqslant b+d$, ce qui prouve bien que $\text{Support}(f * g) \subset [a+c, b+d]$.

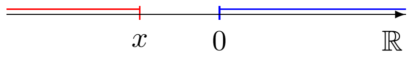
β Cas des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$

On peut, dans l'étude précédente, faire tendre une des bornes vers l'infini. Le cas intéressant est celui des fonctions définies dans $\mathbb{R}_+$ (donc nulles sur $\mathbb{R}_-$).

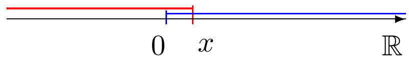
Si on refait les calculs précédents, cela correspond maintenant à $a = 0$, $b = \infty$, $c = 0$ et $d = \infty$. On prendra garde que seuls les deux premiers cas subsistent, il s'agit d'étudier le chevauchement éventuel des intervalles semi-infinis $[x-b, x-a] =]-\infty, x]$ et $[c,d] = [0, \infty[$. On trouve :

19. Mais f peut parfaitement s'annuler dans $[a,b]$, y compris sur un intervalle fini.

· Pour $x < 0$, le maximum de $]-\infty, x]$ est inférieur au minimum de $[0, \infty[$ et l'intersection est vide. $\varnothing$



· Pour $0 \leqslant x$, les intervalles se chevauchent comme représenté ci-contre. $[0, x]$



Pour $x < 0$, l'intégrale donne 0, ce qui prouve que Support$(f \ast g) \subset [0, \infty[$. L'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ est stable par convolution. [20] De plus,la convolution s'écrit plus commodément, dans ce cas spécifique,

$$f \ast g\,(x) = H(x) \int_0^x f(x-t)g(t)dt$$

où H est la fonction de Heaviside, $H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0\ ; & \text{sinon.} \end{cases}$

20. Ce résultat est essentiel pour la définition de la transformation de Laplace. Cette transformation n'est pas à notre programme et généralise celle de Fourier, que nous allons étudier, en remplaçant l'exponentielle complexe par une exponentielle réelle.

C Transformation de Fourier

1 Définition

a Définition générale

Soit $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, on appelle transformée de Fourier de f, et on note $\mathcal{F}[f]$ ou encore $\hat{f}$, la fonction définie par la transformation $\mathcal{F}$ selon

$$\boxed{\mathcal{F}[f](k) = \hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\mathbb{i}\pi kx} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \cos(2\pi kx)f(x)dx - \mathbb{i}\int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi kx)f(x)dx} \ . \quad (39)$$

b Existence

- Si $f \in \mathcal{L}_1$, le théorème de convergence dominée s'applique à la fonction $h(x,k) = \mathrm{e}^{-2\mathbb{i}\pi kx} f(x)$, avec comme dominant $g = |f|$.
- Si $f \in \mathcal{L}_2 \backslash \mathcal{L}_1$, l'existence de $\hat{f}$ provient d'un résultat sur le prolongement analytique de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{L}_2$ ($\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ est dense dans $\mathcal{L}_2$).
- En particulier, pour $f \in \mathcal{L}_2 \backslash \mathcal{L}_1$, l'existence de $\hat{f}(k)$ n'est pas assurée pour tout $k \in \mathbb{R}$, il peut exister un ensemble négligeable de points k_i pour lesquels $\hat{f}(k_i)$ n'existe pas. Au contraire, pour $f \in \mathcal{L}_1$, $\hat{f}(k)$ existe pour tout $k \in \mathbb{R}$.

c Exemple : transformée de Fourier de la fonction porte Π

On appelle fonction porte et on note Π la fonction caractéristique de l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, autrement dit $\Pi = \mathbb{I}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. La fonction $\Pi \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Calculons sa transformée de Fourier :

$$\hat{\Pi}(k) = \int_{\mathbb{R}} \Pi(x)\, \mathrm{e}^{-2\mathbb{i}\pi kx} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-2\mathbb{i}\pi kx} dx = \frac{-1}{2\mathbb{i}\pi k} \left[\mathrm{e}^{-2\mathbb{i}\pi kx} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\sin(\pi k)}{\pi k} \equiv \operatorname{sinc}(k)$$

où la fonction caractéristique a été absorbée dans les bornes (on passe d'une intégrale de Lebesgue à une intégrale de Riemann selon l'équation (27)).

d Opérateur vectoriel

α Fonction de fonctions

$\mathcal{F}$ est une fonction de fonctions, aussi appelée une fonctionnelle, elle agit sur des éléments qui sont eux-mêmes des fonctions (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$).

β Linéarité

$\mathcal{F}$ est linéaire, c'est-à-dire que $\mathcal{F}[f+g] = \mathcal{F}[f] + \mathcal{F}[g]$ et $\mathcal{F}[\lambda f] = \lambda\mathcal{F}[f]$ $\forall\lambda \in \mathbb{C}$; cela provient de la linéarité de l'intégrale.

γ Opérateur

$\mathcal{F}$ est un opérateur : elle associe, à toute fonction f, une autre fonction $\hat{f}$ (on distingue ainsi les opérateurs des formes linéaires, qui à un élément de l'espace de départ associent un nombre complexe ou réel [21]).

δ Opérateur vectoriel

Les deux dernières propriétés se résument de façon synthétique en : *« $\mathcal{F}$ est un opérateur vectoriel. »* Ce type d'opérateur vectoriel est la généralisation en dimension infinie des opérateurs matriciels en dimension finie.

ϵ Autres exemples d'opérateurs vectoriels

Les autres opérateurs vectoriels que vous avez déjà rencontrés sont la translation, l'inflation, la dérivation et, quand cela est possible, la primitivation. [22]

2 Propriétés

a Nature de $\hat{f}$

Si $f \in \mathcal{L}_2$, on a $\hat{f} \in \mathcal{L}_2$ mais parfois $\hat{f} \notin \mathcal{L}_1$. L'exemple le plus typique qui caractérise cette propriété est $f = \Pi \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. En effet, $\hat{\Pi} = \operatorname{sinc} \in \mathcal{L}_2$ mais $\notin \mathcal{L}_1$.

Si $f \in \mathcal{L}_1 \backslash \mathcal{L}_2$, il n'existe aucune propriété simple connue et on peut construire des exemples avec $\hat{f} \notin \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$.

b Continuité

α Classement selon le comportement global d'une fonction

- Soit $f \in \mathcal{L}_1$, d'après (35b) $\hat{f}$ est continue.
- Soit f et $x \mapsto xf(x) \in \mathcal{L}_1$, d'après (35d) $\hat{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
- Soit f, ..., $x \mapsto x^n f(x) \in \mathcal{L}_1$, par récurrence on a $\hat{f} \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$.
- Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n f(x) \in \mathcal{L}_1$, alors $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Il existe des propriétés plus fines, qui font le lien entre le comportement local et la continuité, et sont, par contre, valables pour les fonctions $\in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ et même s'étendent aux distributions.

β Lien entre le comportement local et la continuité

Le comportement à l'infini de $\hat{f}$ est lié au comportement local (sur un voisinage infinitésimal quelconque) de f, et réciproquement, le comportement local de $\hat{f}$ est lié au comportement à l'infini de f.

21. Cette distinction devient subtile dans le cas présent, car on confond habituellement les nombres $\lambda \in \mathbb{C}$ et les fonctions constantes $x \mapsto \lambda$.

22. Mais on peut aussi définir l'addition par une fonction f_o, c'est à dire $f \mapsto f + f_o$, la multiplication $f \mapsto ff_o$, la convolution $f \mapsto f * f_o$, etc.

Soit $f \in \mathcal{L}_1$ ou $\mathcal{L}_2$. On assume de plus que f est décroissante à l'infini. Donc, soit on peut définir des coefficients $(\alpha, \beta, \gamma, ...)$ conformément[23] à la formule (11), soit la fonction est à décroissance rapide, comme défini au § **A 2 j $\boldsymbol{\gamma}$**. On a le résultat suivant

- Si $0 < \alpha \leqslant 1$, alors $\hat{f}$ admet au moins une discontinuité.
- Le cas $\alpha = 0$ (alors $\beta > 0$ ou $\beta = 0$ et $\gamma > 0$ ou etc.) correspond à des fonctions qui ne sont ni dans $\mathcal{L}_1$, ni dans $\mathcal{L}_2$. Leur transformée de Fourier ne peut exister qu'au sens des distributions et présentent une singularité.
- Le cas $0 < \alpha < 1$ ne peut également se définir qu'au sens des distributions.
- Si $1 < \alpha \leqslant 2$, alors $\hat{f} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ mais sa dérivée admet au moins une discontinuité.
- Si $n < \alpha \leqslant n+1$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\hat{f} \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathbb{R})$ et $f^{(n)}$ admet au moins une discontinuité.
- Si $\alpha = \infty$, autrement dit si f est à décroissance rapide, alors $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
- La réciproque s'énonce de façon analogue (en pratique, on échange f et $\hat{f}$).

c $\mathcal{F}$ est une quasi-bijection de $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$

Si on considère l'ensemble de départ $\mathcal{L}_2$, alors l'ensemble d'arrivée est $\mathcal{F}(\mathcal{L}_2)$. On a précisément $\mathcal{F}(\mathcal{L}_2) = \mathcal{L}_2$, $\mathcal{F}$ réalise une bijection de $\mathcal{L}_2$ dans lui-même aux **fonctions nulle pp** près. Autrement dit, on peut écrire

$$\boxed{f = g \text{ pp} \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{f} = \hat{g} \text{ pp}} \,. \tag{40}$$

En termes plus intuitifs, il peut exister des points k pour lesquels $\hat{f}(k)$ et $\hat{g}(k)$ sont différents, de même qu'il peut exister des points x pour lesquels $f(x)$ et $g(x)$ sont différents ; on a aussi vu qu'il peut même exister des points où $\hat{f}$ et $\hat{g}$ ne sont pas définies. Toutefois, ces points forment des ensembles négligeables, et on peut identifier les fonctions (leur distance $\|f - g\|_2 = 0 = \|\hat{f} - \hat{g}\|_2$ est nulle.[24])

d Transformée de Fourier inverse : théorème d'inversion

α Définition de $\bar{\mathcal{F}}$

On note $\bar{\mathcal{F}}$ ou encore $\mathcal{F}^{-1}$ l'opérateur vectoriel : $f \mapsto \bar{\mathcal{F}}[f]$, défini par

$$\boxed{\bar{\mathcal{F}}[f](k) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\mathbb{i}\pi kx} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \cos(2\pi kx) f(x)dx + \mathbb{i}\int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi kx) f(x)dx} \,. \tag{41}$$

Notez que $\bar{\mathcal{F}}$ est définie de façon analogue à $\mathcal{F}$. D'ailleurs, si f est réelle, $\bar{\mathcal{F}}[f]$ est la fonction complexe conjuguée de $\mathcal{F}[f]$.

β Théorème d'inversion

On a les propriétés suivantes :

- $\forall f \in \mathcal{L}_1$ ou $\mathcal{L}_2$, $\bar{\mathcal{F}}[f]$ est la transposée de $\hat{f}$, autrement dit

$$\boxed{\bar{\mathcal{F}}[f](k) = \hat{f}(-k)} \,. \tag{42}$$

23. Le plus souvent, la formule (15b) est vérifié, mais cet énoncé est plus général.
24. On choisit ici la norme $\| \, \|_2$ car on verra que $\mathcal{F}$ est une isométrie de $\mathcal{L}_2$ avec sa norme $\| \, \|_2$.

- Si on la restreint à $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, $\bar{\mathcal{F}}$ est la réciproque de $\mathcal{F}$, c'est pourquoi on la note aussi $\mathcal{F}^{-1}$, autrement dit

$$\forall f \in \mathcal{L}_2 \quad \boxed{\bar{\mathcal{F}}[\mathcal{F}[f]] = \mathcal{F}[\bar{\mathcal{F}}[f]] = f \quad \text{presque partout}}\,, \tag{43}$$

relation dont on donnera une idée de démonstration plus loin et qui est appelée *théorème d'inversion de Fourier.*

γ Corollaire : $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}$

Un corollaire très utile, qui combine la propriété de symétrie et le théorème d'inversion est que $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}$ est l'opérateur de transposition, autrement dit :

$$\forall f \in \mathcal{L}_2 \quad \boxed{\mathcal{F}^2 : f \mapsto \hat{\hat{f}} = \check{f}}\,. \tag{44}$$

e Continuité

$\mathcal{F}$ est continue pour la norme $\mathcal{L}_2$; c'est une conséquence de la propriété d'isométrie, que l'on verra plus loin.

On peut donc écrire, pour $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{L}_2$, et $f_n \to f \in \mathcal{L}_2$ quand $n \to \infty$, que $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{F}[f_n] = \hat{f}$, soit :

$$\text{pour presque tout } k \in \mathbb{R} \quad \boxed{\lim_{f \to f_\circ} \mathcal{F}[f](k) = \hat{f}_\circ(k)}$$

où l'on a utilisé une formulation un peu plus générale. Cette formule peut être étendue aux cas où la limite n'appartient plus à un espace de fonction $\mathcal{L}_2$, à condition de prendre la transformée de Fourier au sens des distributions, comme cela sera étudié ultérieurement.

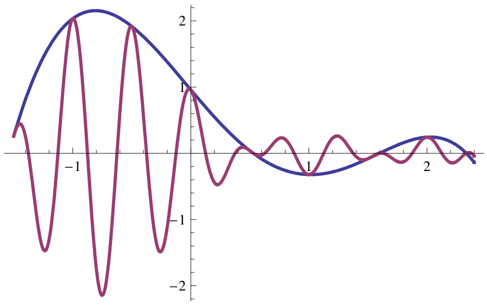
f Comportement à l'infini

Théorème : soit $f \in \mathcal{L}_1$ ou $\mathcal{L}_2$, on a

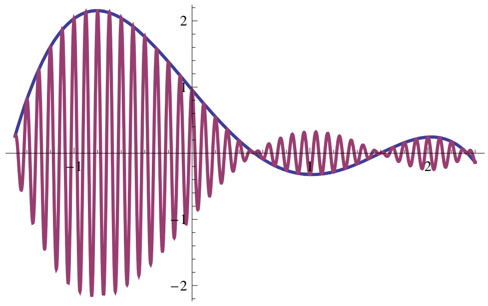
$$\boxed{\lim_{k\to-\infty} \hat{f}(k) = \lim_{k\to+\infty} \hat{f}(k) = 0}\,. \tag{45}$$

Démonstration : considérons pour simplifier le cas d'une fonction f réelle et calculons la partie réelle de $\hat{f}$; quand k devient suffisamment grand, dans l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(2\pi xk)dx$, la fonction cosinus oscille beaucoup plus vite que la fonction f, qui est quasiment constante pendant une période du cosinus. De ce fait, on doit additionner des aires alternativement positives et négatives qui sont, en valeur absolue, presque égales, puisque f ne varie pratiquement pas. Certes, le nombre des aires à ajouter ainsi augmente lui proportionnellement à k, mais on peut se convaincre que ce phénomène de compensation est le plus fort, d'où le résultat, qui est illustré sur les graphes suivants.

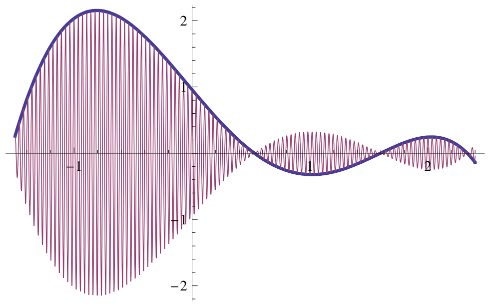
Dans le schéma ci-contre sont tracées une fonction f réelle en bleu et la fonction $f(x)\cos(2\pi xk)$ avec $k = 2$ en rouge (c'est la partie réelle de la fonction $f(x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi xk}$ dont $\hat{f}$ mesure l'aire). Les aires sont alternées et se compensent modérément ; on trouve ici $\hat{f}(2) \simeq -0{,}032$.



Dans le schéma ci-contre, f est inchangée et on trace $f(x)\cos(2\pi xk)$ pour $k = 10$. Les aires alternent beaucoup plus rapidement et se compensent mieux ; on trouve $\hat{f}(10) \simeq 0{,}0011$.



Dans le schéma ci-contre, f est inchangée et on trace $f(x)\cos(2\pi xk)$ pour $k = 28$. Les aires alternent extrêmement vite et se compensent encore mieux ; on trouve $\hat{f}(28) \simeq -0{,}00081$.



3 Opérations sur les transformées de Fourier

a Translation

α Transformée de Fourier d'une translatée

$$\boxed{\mathcal{F}[{}^{x_\circ}f](k) = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi k x_\circ}\hat{f}(k)} \,. \tag{46a}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi k x} f(x - x_\circ)dx &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi k(x+x_\circ)} f(x)dx \\
&\quad \text{où on a posé } x' = x - x_\circ \text{ puis omis le }' \\
&= \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi k x_\circ} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi k x} f(x)dx \,.
\end{aligned}$$

β Transformée de Fourier inverse d'une translatée

$$\boxed{\bar{\mathcal{F}}[{}^{x_\circ}f](k) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k x_\circ}\bar{\mathcal{F}}[f](k)} \,. \tag{46b}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi kx} f(x-x_\mathrm{o})dx &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k(x+x_\mathrm{o})} f(x)dx \\ &\quad \text{où on a posé } x'=x-x_\mathrm{o} \text{ puis omis le }{}' \\ &= \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi kx_\mathrm{o}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi kx} f(x)dx\ .\end{aligned}$$

γ Transformée de Fourier d'une fonction multipliée par $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k_\mathrm{o}x}$

$$\boxed{\mathcal{F}[\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k_\mathrm{o}x} f(x)] = {}^{k_\mathrm{o}}\hat{f}}\ . \tag{46c}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi kx}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k_\mathrm{o}x} f(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi(k-k_\mathrm{o})x} f(x)dx \\ &= \hat{f}(k-k_\mathrm{o}) \quad \text{par définition de } \mathcal{F}\ .\end{aligned}$$

δ Transformée de Fourier inverse d'une fonction multipliée par $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k_\mathrm{o}x}$

$$\boxed{\bar{\mathcal{F}}[\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k_\mathrm{o}x} f(x)] = {}^{-k_\mathrm{o}}\bar{\mathcal{F}}[f]}\ . \tag{46d}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi kx}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k_\mathrm{o}x} f(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi(k+k_\mathrm{o})x} f(x)dx \\ &= \bar{\mathcal{F}}[f](k+k_\mathrm{o}) \quad \text{par définition de } \bar{\mathcal{F}}\ .\end{aligned}$$

b Inflation

α Transformée de Fourier directe d'une dilatée

$$\boxed{\mathcal{F}[f_\lambda] = |\lambda|\hat{f}_{\frac{1}{\lambda}}}\ . \tag{47a}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi kx} f(x/\lambda)dx &= |\lambda| \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi k\lambda x'} f(x')dx' \text{ en posant } x'=x/\lambda \text{ et } dx'=dx/|\lambda| \\ &= |\lambda| \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi(\lambda k)x} f(x)dx \\ &= |\lambda|\hat{f}(\lambda k)\ .\end{aligned}$$

β Transformée de Fourier inverse d'une dilatée

$$\bar{\mathcal{F}}[f_\lambda](k) = |\lambda|\bar{\mathcal{F}}[f](\lambda k)\ . \tag{47b}$$

La démonstration est identique à celle pour la transformation directe.

γ Transformée de Fourier de la transposée

- On rappelle que la transposition est une inflation d'un facteur -1.
- La formule (47a) donne pour la transposition

$$\widecheck{\mathcal{F}[f]} = \mathcal{F}[\check{f}] \quad \text{soit} \quad \hat{f}(-k) = \mathcal{F}[\check{f}](k)\ . \tag{47c}$$

δ Transformée de Fourier inverse de la transposée

On obtient des formules analogues pour $\bar{\mathcal{F}}$.

c Parité et conjugaison complexe

α Transposition et conjugaison

On peut établir des formules analogues aux relations (42) et (47c), qui les généralisent :

$$\boxed{\mathcal{F}[\check{f}] = \bar{\mathcal{F}}[f] = \widecheck{\mathcal{F}[f]}}\ ; \tag{48a}$$

$$\boxed{\overline{\mathcal{F}[f]} = \bar{\mathcal{F}}[\bar{f}] = \widecheck{\mathcal{F}[\bar{f}]} = \mathcal{F}[\check{\bar{f}}]}\ ; \tag{48b}$$

$$\boxed{\overline{\mathcal{F}[\check{f}]} = \mathcal{F}[\bar{f}] = \widecheck{\bar{\mathcal{F}}[\bar{f}]} = \overline{\widecheck{\mathcal{F}[f]}}}\ . \tag{48c}$$

Démonstration : pour la première équation de (48a), on écrit

$$\mathcal{F}[\check{f}](k) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi kx} f(-x)dx = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi kx} f(x)dx$$

en faisant le changement de variable $x \to -x$; puis on applique la relation (42). Pour la première équation de (48b), on écrit

$$\overline{\mathcal{F}[f]}(k) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi kx} \bar{f}(x)dx\ ;$$

puis on applique les relations (42) ou (48a). Pour les relations (48c), on applique simultanément les relations (48a) ou (48b).

β Conservation de la parité

La relation (47c) prouve que la transformation de Fourier conserve la parité :

$$\begin{aligned} f \text{ paire} \quad &\Longleftrightarrow \quad \hat{f} \text{ paire}\,; \\ f \text{ impaire} \quad &\Longleftrightarrow \quad \hat{f} \text{ impaire.} \end{aligned}$$

Fonction hermitienne ou antihermitienne

Soit une fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on introduit les définitions suivantes :

- f est hermitienne si et seulement si

$$\boxed{\bar{\check{f}} = f} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}\ \overline{f(-x)} = f(x)\ ; \tag{49a}$$

- f est antihermitienne si et seulement si

$$\boxed{\bar{\check{f}} = -f} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}\ \overline{f(-x)} = -f(x)\ ; \tag{49b}$$

- cette notion est utile pour synthétiser les propriétés de la transformation de Fourier, comme suit.

δ Formules de conservation par Fourier

- À partir des formules (48a), (48b) et (48c), on peut établir les relations suivantes pour $\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f] \pm \overline{\widecheck{\mathcal{F}[f]}} &= \mathcal{F}[f \pm \bar{f}] \ ; && (50a) \\ \mathcal{F}[f] \pm \overline{\mathcal{F}[f]} &= \mathcal{F}[f \pm \bar{\check{f}}] \ . && (50b) \end{aligned}$$

où on remarque qu'apparaît, dans chaque relation, une partie réelle ou imaginaire de f ou de $\hat{f}$.

- Ces relations permettent d'établir les lois suivantes :

f réelle	$\Longleftrightarrow$	$\hat{f}$ hermitienne
f imaginaire	$\Longleftrightarrow$	$\hat{f}$ antihermitienne
f hermitienne	$\Longleftrightarrow$	$\hat{f}$ réelle
f antihermitienne	$\Longleftrightarrow$	$\hat{f}$ imaginaire

- On peut résumer ces formules d'une façon assez élégante. En conjuguant la décomposition dans $\mathbb{C}$ et la décomposition paire/impaire (5c), on peut décomposer toute fonction f en quatre fonctions :

$$f = f_{\Re\text{pair}} + f_{\Im\text{pair}} + f_{\Re\text{imp}} + f_{\Im\text{imp}} \tag{51}$$

une partie réelle paire, une partie imaginaire pure paire, une partie réelle impaire et une partie imaginaire pure impaire. Alors, en appliquant la même décomposition pour $\hat{f}$, on établit les correspondances suivantes

$$\begin{tikzcd} f \arrow[d] & = & f_{\Re\text{pair}} \arrow[d] & + & f_{\Im\text{pair}} \arrow[d] & + & f_{\Re\text{imp}} \arrow[drr] & + & f_{\Im\text{imp}} \arrow[dll] \\ \hat{f} & = & \hat{f}_{\Re\text{pair}} & + & \hat{f}_{\Im\text{pair}} & + & \hat{f}_{\Re\text{imp}} & + & \hat{f}_{\Im\text{imp}} \end{tikzcd}$$

ce qui s'écrit, de façon plus détaillée,

$$\boxed{\mathcal{F}[f_{\Re\text{pair}}] = \hat{f}_{\Re\text{pair}} \ ; \ \mathcal{F}[f_{\Im\text{pair}}] = \hat{f}_{\Im\text{pair}} \ ; \ \mathcal{F}[f_{\Re\text{imp}}] = \hat{f}_{\Im\text{imp}} \ ; \ \mathcal{F}[f_{\Im\text{imp}}] = \hat{f}_{\Re\text{imp}}} \ .$$

d Dérivation

α Dérivée de la transformée de Fourier directe ou inverse

$$\boxed{\frac{d\hat{f}}{dk} = -2\mathbb{i}\pi\mathcal{F}[xf(x)]} \ ; \tag{52a}$$

$$\boxed{\frac{d\bar{\mathcal{F}}[f]}{dk} = 2\mathbb{i}\pi\bar{\mathcal{F}}[xf(x)]} \ . \tag{52b}$$

Condition d'existence : il faut que $x \mapsto xf(x) \in \mathcal{L}_1$ ou $\mathcal{L}_2$ pour que $\hat{f}$ soit dérivable partout. Toutefois, ces formules se généralisent dans des cas où $\hat{f}$ n'est pas dérivable partout, éventuellement à l'aide de la théorie des distributions.

Démonstration : on suppose que f et $x \mapsto xf(x) \in \mathcal{L}_2$, le cas général se démontre par densité :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dk}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\mathbb{i}\pi kx} f(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial k} \mathrm{e}^{-2\mathbb{i}\pi kx} f(x)dx \\
&\quad \text{on a pu intervertir } \frac{d}{dk} \text{ et } \int_{\mathbb{R}} \text{ par le théorème de convergence dominée} \\
&= \int_{\mathbb{R}} (-2\mathbb{i}\pi x)\, \mathrm{e}^{-2\mathbb{i}\pi kx} f(x)dx \\
&= -2\mathbb{i}\pi \mathcal{F}[xf(x)](k)\ ;
\end{aligned}$$

et pour la dérivée de la transformée de Fourier inverse,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dk}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\mathbb{i}\pi kx} f(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial k} \mathrm{e}^{2\mathbb{i}\pi kx} f(x)dx \\
&\quad \text{on a pu intervertir } \frac{d}{dk} \text{ et } \int_{\mathbb{R}} \text{ par le théorème de convergence dominée} \\
&= \int_{\mathbb{R}} (2\mathbb{i}\pi x)\, \mathrm{e}^{2\mathbb{i}\pi kx} f(x)dx \\
&= 2\mathbb{i}\pi \bar{\mathcal{F}}[xf(x)](k)\ .
\end{aligned}$$

β Transformée de Fourier directe et inverse de la dérivée

$$\boxed{\mathcal{F}[\frac{df}{dx}](k) = 2\mathbb{i}\pi k\hat{f}(k)}\ ; \tag{52c}$$

$$\boxed{\bar{\mathcal{F}}[\frac{df}{dx}](k) = -2\mathbb{i}\pi k\bar{\mathcal{F}}[f](k)}\ . \tag{52d}$$

Condition d'existence : il faut que $df/dx \in \mathcal{L}_1$ ou $\mathcal{L}_2$. On ne peut rien dire de $k \mapsto k\hat{f}(k)$. Par exemple, pour $f(x) = x^{1/4}$, on trouve que cette fonction n'est pas dans $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ alors que f est dans $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$.

Démonstration : on se restreint à $f \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$, le cas général se démontre par densité :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\mathbb{i}\pi kx} \frac{df}{dx}(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\mathbb{i}\pi kx} \frac{df}{dx}(x)dx \\
&\quad \text{intégrale de Riemann calculée par parties :} \\
&= \underbrace{\left[\mathrm{e}^{-2\mathbb{i}\pi x} f(x)\right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{\mathbb{R}} (-2\mathbb{i}\pi k)\, \mathrm{e}^{-2\mathbb{i}\pi k} f(x)dx \\
&= 2\mathbb{i}\pi k\hat{f}(k)\ ;
\end{aligned}$$

et pour la transformée inverse,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\mathbb{i}\pi kx} \frac{df}{dx}(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{2\mathbb{i}\pi kx} \frac{df}{dx}(x)dx \\
&\quad \text{intégrale de Riemann calculée par parties :} \\
&= \underbrace{\left[\mathrm{e}^{2\mathbb{i}\pi x} f(x)\right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{\mathbb{R}} (2\mathbb{i}\pi k)\, \mathrm{e}^{2\mathbb{i}\pi k} f(x)dx \\
&= -2\mathbb{i}\pi k\bar{\mathcal{F}}[f](k)\ .
\end{aligned}$$

e Fonctions gaussiennes

Il aurait été logique d'étudier le cas particulier des fonctions gaussiennes plus tôt, mais on ne disposait pas auparavant des propriétés de transformation, qui permettront une approche plus élégante.

On notera $f_{x_\circ a}$ la fonction gaussienne non normalisée

$$f_{x_\circ a}(x) = \mathrm{e}^{-\pi a(x-x_\circ)^2} .$$

α Invariance de la fonction $\mathrm{e}^{-\pi x^2}$

La fonction f_{01} est invariante par $\mathcal{F}$, c'est-à-dire que sa transformée de Fourier est $\widehat{f_{01}} = f_{01}$.

Démonstration :

- il s'agit de montrer que $\hat{f}_{01}$ est solution de la même équation différentielle que f_{01} ;
- notons d'abord que f_{01} est solution de $f'(x) + 2\pi x f(x) = 0$;
- calculons $\hat{f}_{01}'$. D'après ce qui précède,

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{f}_{01}}{dk}(k) &= -2\mathbb{i}\pi \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\mathbb{i}\pi xk} x f_{01}(x)dx = \mathbb{i}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\mathbb{i}\pi xk}(-2x\pi)\,\mathrm{e}^{-\pi x^2}dx \\
&= \mathbb{i}\underbrace{\left[\mathrm{e}^{-2\mathbb{i}\pi xk}\,\mathrm{e}^{-\pi x^2}\right]_{x=-\infty}^{x=+\infty}}_{=0} - \mathbb{i}\int_{\mathbb{R}} (-2\mathbb{i}\pi k)\,\mathrm{e}^{-2\mathbb{i}\pi xk}\,\mathrm{e}^{-\pi x^2}dx \quad \text{par partie} \\
&= -2\pi k \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\mathbb{i}\pi xk}\,\mathrm{e}^{-\pi x^2}dx = -2\pi k \hat{f}_{01}(k)
\end{aligned}$$

  ce qui prouve que $\hat{f}_{01}' + 2\pi k\hat{f}_{01}(k) = 0$;
- f_{01} et $\hat{f}_{01}$ sont solutions de la même équation différentielle du premier ordre. Les solutions d'une équation du premier ordre forment un espace vectoriel de dimension 1, ce qui signifie ici que $f_{01} \propto \hat{f}_{01}$. Pour démontrer que le coefficient de proportionnalité est 1, calculons enfin $\hat{f}_{01}(0)$;
- $\hat{f}_{01}(0) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\pi x^2}dx = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2}\frac{dt}{\sqrt{\pi}}$ en posant $t = x\sqrt{\pi}$. Enfin, on calcule [25] $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$, d'où $\hat{f}_{01}(0) = 1 = f_{01}(0)$.

---

25. Démonstration : soit $I = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2}dt$, on écrit

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}dx \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2}dy \quad \text{par changement de nom des variables muettes} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}dxdy \quad \text{par le théorème de Fubini (cas de variables séparées)} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\rho^2}\rho d\rho d\theta \qquad \text{avec le changement de variable } (x,y) \to (\rho,\theta) \\
&= 2\pi\left[-\frac{\mathrm{e}^{-\rho^2}}{2}\right]_0^{\infty} = \pi
\end{aligned}$$

d'où le résultat (on a utilisé le jacobien standard du changement de variables cartésiennes en variables polaires $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \rho$, d'où le facteur $|J| = \rho$).

β Transformation d'une gaussienne quelconque

i Montrons que $f_{x_o\,a} = {}^{x_o}\left((f_{01})_{\sqrt{\frac{\pi}{a}}}\right)$ (c'est-à-dire que l'on fait subir une dilatation d'un facteur $\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ à f_{01}, puis une translation de x_o). En effet,

$$(f_{01})_{\sqrt{\frac{\pi}{a}}}(x) \equiv f_{01}(x\sqrt{\tfrac{a}{\pi}}) = \mathrm{e}^{-\pi(x\sqrt{\frac{a}{\pi}})^2} = \mathrm{e}^{-ax^2}$$

et finalement, ${}^{x_o}f_{01}(x\sqrt{\frac{a}{\pi}}) = f_{01}\left((x-x_o)\sqrt{\frac{a}{\pi}}\right) = \mathrm{e}^{-a(x-x_o)^2}$.

ii On calcule $\hat{f}_{x_o\,a}$ en utilisant d'abord la formule de translation,[26]

$$\begin{aligned}
\hat{f}_{x_o\,a}(k) &= \mathrm{e}^{-2\mathbb{i}\pi k x_o}\mathcal{F}[(f_{01})_{\sqrt{\frac{\pi}{a}}}](k) \\
&\text{puis on applique la formule de dilatation} \\
&= \mathrm{e}^{-2\mathbb{i}\pi k x}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\hat{f}_{01}(k\sqrt{\tfrac{\pi}{a}}) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-2\mathbb{i}\pi k x_o}\,\mathrm{e}^{-\pi(k\sqrt{\frac{\pi}{a}})^2} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-2\mathbb{i}\pi k x_o}\,\mathrm{e}^{-\pi^2k^2/a}\ .
\end{aligned}$$

γ Démonstration du théorème d'inversion

Lemme : $\hat{\hat{f}}_{x_0\,a} = \check{f}_{x_0\,a}$.

On calcule $\hat{\hat{f}}_{x_0\,a}(x)$, on a

$$\begin{aligned}
\hat{\hat{f}}_{x_0\,a}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-2\mathbb{i}\pi k x_o}\,\mathrm{e}^{-\pi^2k^2/a}\right](x) \\
&\text{on applique la réciproque de la formule de translation} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-\pi^2k^2/a}\right](x+x_o) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-a'k^2}\right](x+x_o) \text{ en posant } a' = \pi^2/a \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\sqrt{\frac{\pi}{a'}}\,\mathrm{e}^{-\pi^2(x+x_o)^2/a'} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{a}\frac{\pi}{\sqrt{a}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2 a}{\pi^2}(x+x_o)^2} \\
&= \mathrm{e}^{-a(x+x_o)^2} = f_{x_0\,a}(-x) = \check{f}_{x_0\,a}(x)\ .
\end{aligned}$$

Pour vérifier le théorème d'inversion de Fourier pour les fonctions gaussiennes, on écrit finalement

$$\bar{\mathcal{F}}[\hat{f}_{x_0\,a}](x) = \mathcal{F}[\hat{f}_{x_0\,a}](-x) = \hat{\hat{f}}_{x_0\,a}(-x) = \mathrm{e}^{-a((-x)+x_o)^2} = \mathrm{e}^{-a(x-x_o)^2} = f_{x_0\,a}(x).$$

Pour étendre le résultat à tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, on considère $\epsilon > 0$.

L'ensemble des gaussiennes est dense, cela implique qu'il existe (a_1, x_1, c_1), ..., (a_N, x_N, c_N), N triplets dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ tels que, soit la fonction f_N définie par[27] $f_N = \sum_{i=1}^N c_i f_{x_i\,a_i}$ et $\zeta = f - f_N$, on ait f_N et $\zeta \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|\zeta\| \leqslant \epsilon/2$.

26. Remarquez l'inversion de l'ordre des transformations.

27. Autrement dit, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_N(x) = \sum_{i=1}^N c_i\,\mathrm{e}^{a_i(x-x_i)^2}$.

On calcule

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{F}}[\hat{f}] &= \bar{\mathcal{F}}[\hat{\zeta} + \widehat{f_N}] \\
&= \bar{\mathcal{F}}[\hat{\zeta}] + \sum_{i=1}^{N} c_i \bar{\mathcal{F}}[\hat{f}_{x_i\,a_i}] \\
&= \bar{\mathcal{F}}[\hat{\zeta}] + \sum_{i=1}^{N} c_i f_{x_i\,a_i} \\
&= \bar{\mathcal{F}}[\hat{\zeta}] + f_N \\
&= \bar{\mathcal{F}}[\hat{\zeta}] + f - \zeta
\end{aligned}$$

d'où $\bar{\mathcal{F}}[\hat{f}] - f = \bar{\mathcal{F}}[\hat{\zeta}] - \zeta$. On applique l'inégalité triangulaire, ce qui donne $\|\bar{\mathcal{F}}[\hat{f}] - f\|_2 \leqslant \|\bar{\mathcal{F}}[\hat{\zeta}]\|_2 + \|\zeta\|_2$. Or, on va démontrer que $\mathcal{F}$ et $\bar{\mathcal{F}}$ sont des isométries de $L^2(\mathbb{R})$, ce qui implique $\|\bar{\mathcal{F}}[\hat{\zeta}]\|_2 = \|\hat{\zeta}\|_2 = \|\zeta\|_2$ parce que $\zeta \in L^2(\mathbb{R}$ et par conséquent $\hat{\zeta} \in L^2(\mathbb{R})$. On a finalement $\|\bar{\mathcal{F}}[\hat{f}] - f\|_2 \leqslant 2\|\zeta\|_2 \leqslant \epsilon$. Comme ce résultat est démontré $\forall\epsilon > 0$, on obtient par la limite $\epsilon \to 0$ que $\|\bar{\mathcal{F}}[\hat{f}] - f\|_2 = 0 \iff \bar{\mathcal{F}}[\hat{f}] = f$ **presque partout**.

f Produit de convolution

α Transformée de Fourier d'un produit de convolution

Soit $(f, g) \in \mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_2$ ou $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_1$, on a

$$\boxed{\mathcal{F}[f * g] = \hat{f}\,\hat{g}}\ . \tag{53a}$$

Le produit $\hat{f}\hat{g}$ existe dans tous les cas, mais on n'est pas assuré qu'il appartienne à $\mathcal{L}_2$; si $(f, g) \in \mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_2$, on a $\hat{f}$ et $\hat{g} \in \mathcal{L}_2$, donc $\hat{f}\hat{g} \in \mathcal{L}_1$, ce qui permet de lui appliquer (39). Par contre, si $(f, g) \in \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_1$, on sait directement que $f * g \in \mathcal{L}_1$ et que donc $\mathcal{F}[f * g]$ existe. Le reste découle de la démonstration qui suit.

De même, on a

$$\boxed{\bar{\mathcal{F}}[f * g] = \bar{\mathcal{F}}[f]\bar{\mathcal{F}}[g]}\ . \tag{53b}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f * g](k) &= \int_{\mathbb{R}} dx\, \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi kx} \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x-t)\, \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi k(x-t)} g(t)\, \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi kt} dxdt \\
&\text{on fait le changement de variable}^{28}\ (t, x) \to (t, t' = x - t) \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} f(t')\, \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi kt'} g(t)\, \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi kt} dt'dt \\
&= \hat{f}(k)\hat{g}(k)\ .
\end{aligned}$$

β Transformée de Fourier d'un produit de fonctions

On se restreint ici aux fonctions de $\mathcal{L}_2$, ce qui nous permet d'utiliser le théorème d'inversion de Fourier. La validité de la formule qui suit, pour des fonctions aussi générales que dans le cas précédent, n'est pas acquise, malgré une fausse impression de

28. dont le Jacobien vaut (on a $x = t + t'$) $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial t} & \frac{\partial t}{\partial t'} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial t'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

symétrie entre les deux formules. Soit f et $g \in \mathcal{L}_2$, on a

$$\boxed{\mathcal{F}[fg] = \hat{f} * \hat{g}}\ . \tag{53c}$$

De même

$$\boxed{\bar{\mathcal{F}}[fg] = \bar{\mathcal{F}}[f] * \bar{\mathcal{F}}[g]}\ . \tag{53d}$$

Démonstration : posons $F = \hat{f}$ et $G = \hat{g}$ (F et $G \in \mathcal{L}_2$). On peut écrire $\mathcal{F}[F * G] = \hat{F}\hat{G}$. On prend la transformation inverse de cette relation, ce qui donne

$$\bar{\mathcal{F}}[\widehat{F * G}] = \bar{\mathcal{F}}[\hat{F}\hat{G}] = \bar{\mathcal{F}}[\hat{\hat{f}}\ \hat{\hat{g}}] = \bar{\mathcal{F}}[\check{f}\check{g}] = \bar{\mathcal{F}}[\widecheck{fg}] = \widecheck{\bar{\mathcal{F}}[fg]} = \mathcal{F}[fg]$$

où on a appliqué la conservation de la parité par Fourier, et les formules (48a), (48b) et (48c) (la composition de la transposition et de Fourier inverse n'est autre que Fourier direct). Si on applique le théorème d'inversion sur le terme de gauche, il vient finalement

$$F * G = \mathcal{F}[fg] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \hat{f} * \hat{g} = \widehat{fg}$$

ce qui est bien la formule recherchée.

4 Autres propriétés

a Lien entre Fourier et intégrale

α Aire totale d'une fonction

Théorème : Soit $f \in \mathcal{L}_1$ ou $\mathcal{L}_2$, si $\hat{f}$ est continue en $k = 0$, on a :

$$\boxed{\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(t)dt}\ . \tag{54}$$

Démonstration : cela semble trivial puisque, par définition, en $k = 0$, on a

$$\mathcal{F}[f](0) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi 0x} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$$

mais il ne faut pas oublier que l'expression de Fourier n'est valable que presque partout. Plus précisément :

- Si $f \in \mathcal{L}_1$, $\hat{f}$ est continue, en particulier en 0, et la formule est toujours vraie : « *pour les fonctions intégrables, la formule de Fourier est valable pour tout* $x \in \mathbb{R}$ ».
- Si $f \in \mathcal{L}_2$, la condition $\hat{f}$ continue en 0 assure que 0 ne fait pas partie des valeurs de k pour lesquelles la formule $\mathcal{F}[f](k) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi kx} f(x)dx$ faillit.

β Cas général

Dans le cas général, on utilise la valeur principale de l'intégrale de f, définie à l'infini par la formule (37b), qui existe quand $f \in \mathcal{L}_2$ (ou $\mathcal{L}_1$ *a priori*). On a alors

$$\boxed{\mathrm{vp}\left(\int_{\mathbb{R}} f(t)dt\right) = \frac{1}{2}(\hat{f}(0^+) + \hat{f}(0^-))}\ . \tag{55}$$

γ Régularisation

Soit une fonction de $\mathcal{L}_1$ ou de $\mathcal{L}_2$, supposons que f admet une discontinuité en x_o. En appliquant la formule précédente, à l'aide des diverses formules de transformation de Fourier, on montre que

$$\boxed{\bar{\mathcal{F}}[\mathcal{F}[f]](x_\mathrm{o}) = \frac{f(x_\mathrm{o}^+) + f(x_\mathrm{o}^-)}{2}} \tag{56}$$

ce qu'on appelle la formule de régularisation. Un exemple, qui a été étudié en problème les années précédentes, est celui de la fonction de Heaviside H, définie par $H(x) = 1$ $\forall x \geqslant 0$ et $H(x) = 0$ $\forall x < 0$. Par régularisation, la valeur en 0 de H est $\frac{1}{2}$, puisque

$$\bar{\mathcal{F}}[\hat{H}](0) = \frac{H(0^+) + H(0^-)}{2} = \frac{1}{2} \,.$$

(la démonstration nécessite la théorie des distributions).

b $\mathcal{F}$ est une isométrie de $\mathcal{L}_2$

α Isométrie de $\mathcal{L}_2$

Soit une fonction $f \in \mathcal{L}_2$, on a $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$; autrement dit, $\mathcal{F}$ conserve la norme $\| \, \|_2$ des fonctions. On peut l'écrire, plus précisément,

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(k)|^2 dk} \,. \tag{57a}$$

β Conservation du produit hermitien

Comme $\mathcal{F}$ conserve la norme $\| \, \|_2$, en appliquant (34c), il conserve aussi le produit hermitien, qui lui est associé. Cela s'écrit, $\forall (f,g) \in \mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_2$, $\langle \hat{f} | \hat{g} \rangle = \langle f | g \rangle$, soit

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k) dk = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} g(x) dx} \,. \tag{57b}$$

γ Cas particulier des gaussiennes

Comme pour le théorème d'inversion de Fourier, on va démontrer les formules (57a) et (57b) pour les fonctions gaussiennes, sa généralisation pour toutes les autres fonctions découlera de la densité des fonctions gaussiennes dans $\mathcal{L}_2$.

On reprend la notation $f_{x_\mathrm{o}\,a}(x) = \mathrm{e}^{-a(x-x_\mathrm{o})^2}$, dont on a calculé précédemment la transformée de Fourier,

$$\hat{f}_{x_\mathrm{o}\,a}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi k x_\mathrm{o}} \,\mathrm{e}^{-\pi^2 k^2/a}$$

et on calcule séparément, d'une part,

$$\int_{\mathbb{R}} |f_{x_\mathrm{o}\,a}(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2a(x-x_\mathrm{o})^2} dx = \int_{\mathbb{R}} f_{x_\mathrm{o},2a}(x) dx = \hat{f}_{x_\mathrm{o},2a}(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}$$

où on a appliqué la formule (54) ; et, d'autre part,

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}_{x_o\,a}(k)|^2 dk = \left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)^2 \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi^2 k^2/a} dk = \frac{\pi}{a}\int_{\mathbb{R}} f_{\frac{2\pi^2}{a},0}(k)dk = \frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\frac{2\pi^2}{a}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}$$

où le facteur exponentiel a donné un module 1 ; on trouve la formule (57a) pour les fonctions gaussiennes :

$$\int_{\mathbb{R}} |f_{x_o\,a}(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}_{x_o\,a}(k)|^2 dk\ .$$

La formule (57b) pour les gaussiennes découle immédiatement de la précédente et de (34c). Cependant, il peut être instructif d'en faire une démonstration directe. On calcule le produit hermitien entre deux fonctions gaussiennes

$$\begin{aligned}\langle f_{x_1\,a_1}|f_{x_2\,a_2}\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-a_1(x-x_1)^2-a_2(x-x_2)^2}dx = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(a_1+a_2)\left(x-\frac{a_1x_1+a_2x_2}{a_1+a_2}\right)^2-\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}(x_1-x_2)^2}dx \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a_1+a_2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}(x_1-x_2)^2}\end{aligned}$$

et celui entre leurs transformées de Fourier

$$\langle \hat{f}_{x_1\,a_1}|\hat{f}_{x_2\,a_2}\rangle = \frac{\pi}{\sqrt{a_1a_2}}\int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}_{x_1\,a_1}(k)}\hat{f}_{x_2\,a_2}(k)dk = \frac{\pi}{\sqrt{a_1a_2}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k(x_1-x_2)}\,\mathrm{e}^{-\pi^2k^2/a_1-\pi^2k^2/a_2}dk$$

qui est exactement la transformée de Fourier de $f_{0,b}$ en $x_2 - x_1$, où $b = \pi^2\frac{a_1+a_2}{a_1a_2}$, au facteur $\frac{\pi}{\sqrt{a_1a_2}}$ près, soit $\frac{\pi}{\sqrt{a_1a_2}}\hat{f}_{0,b}(x_2-x_1) = \sqrt{\frac{\pi^3}{a_1a_2b}}\,\mathrm{e}^{-\pi^2(x_2-x_1)^2/b}$, qui est égal au produit hermitien entre les deux fonctions gaussiennes, C.Q.F.D.

δ $\mathcal{F}$ est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$

Soit $\epsilon > 0$, soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et les N triplets définis à la section **e**γ, tels que $f_N = \sum_{i=1}^N c_i f_{x_i\,a_i}$ et $\|f - f_N\| < \epsilon/2$. On définit encore $\zeta = f - f_N$, d'où $\hat{\zeta} = \hat{f} - \hat{f}_N$. On utilise un premier lemme :

Lemme : $\|\hat{f}_N\|_2 = \|f_N\|_2$.

Pour le démontrer, on l'écrit au carré :

$$\begin{aligned}(\|\hat{f}_N\|_2)^2 &= \langle \hat{f}_N|\hat{f}_N\langle \\ &= \langle\sum_{i=1}^N c_i\hat{f}_{x_i\,a_i}|\sum_{j=1}^N c_j\hat{f}_{x_j\,a_j}\rangle \\ &= \sum_{\substack{i=1..N\\ j=1..N}} \overline{c_i}c_j\langle \hat{f}_{x_i\,a_i}|\hat{f}_{x_j\,a_j}\rangle\end{aligned}$$

On utilise la conservation du produit hermitien pour les gaussiennes

$$\begin{aligned}&= \sum_{\substack{i=1..N\\ j=1..N}} \overline{c_i}c_j\langle f_{x_i\,a_i}|f_{x_j\,a_j}\rangle \\ &= \langle\sum_{i=1}^N c_i f_{x_i\,a_i}|\sum_{j=1}^N c_j f_{x_j\,a_j}\rangle \\ &= \langle f_N|f_N\rangle \\ &= (\|f_N\|_2)^2\end{aligned}$$

Puis, on calcule

$$\begin{aligned}
\|\hat{f}\|_2 - \|f\|_2 &= \|\hat{f}_N + \hat{\zeta}\|_2 - \|f_N + \zeta\|_2 \\
& \quad \text{On utilise l'inégalité triangulaire} \\
&\leqslant \underbrace{\|\hat{f}_N\|_2}_{=\|f_N\|_2} + \|\hat{\zeta}\|_2 - \Bigg| \underbrace{\|f_N\|_2 - \|\zeta\|_2}_{\text{on le suppose } >0} \Bigg| \\
&= \|f_N\|_2 + \|\hat{\zeta}\|_2 - \|f_N\|_2 + \|\zeta\|_2 \\
&\leqslant \epsilon
\end{aligned}$$

et, avec l'hypothèse similaire $\|\hat{f}_N\|_2 \geqslant \|\hat{\zeta}\|_2$,

$$\begin{aligned}
\|f\|_2 - \|\hat{f}\|_2 &= \|f_N + \zeta\|_2 - \|\hat{f}_N + \hat{\zeta}\|_2 \\
& \quad \text{On utilise l'inégalité triangulaire} \\
&\leqslant \|f_N\|_2 + \|\zeta\|_2 - (\underbrace{\|\hat{f}_N\|_2}_{=\|f_N\|_2} - \|\hat{\zeta}\|_2) \\
&= \|f_N\|_2 + \|\zeta\|_2 - \|f_N\|_2 + \|\hat{\zeta}\|_2 \\
&\leqslant \epsilon
\end{aligned}$$

où la majoration des normes de ζ et $\hat{\zeta}$ a été montré à la section $\mathbf{e}\gamma$. En cummulant les deux inégalités, on obtient

$$\Big| \|\hat{f}\|_2 - \|f\|_2 \Big| \leqslant \epsilon$$

C'est le moment de remarquer que, si les hypothèses supplémentaires ne sont pas vraies, on obtient $\|f_N\|_2 \leqslant \|\zeta\|_2 \leqslant \epsilon/2$ ou $\|\hat{f}_N\|_2 \leqslant \|\hat{\zeta}\|_2 \leqslant \epsilon/2$. Comme $\|\hat{f}_N\|_2 = \|f_N\|_2$, on obtient, respectivement, $\|\hat{f}\|_2 - \|f\|_2 \leqslant \epsilon$ ou $\|f\|_2 - \|\hat{f}\|_2 \leqslant \epsilon$ en jetant le terme négatif, de sorte qu'on trouve bien l'inégalité voulue. Elle est vraie $\forall \epsilon > 0$ et, en prenant la limite $\epsilon \to 0$, on trouve

$$\Big| \|\hat{f}\|_2 - \|f\|_2 \Big| = 0 \iff \|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

ϵ Formule de Parseval-Plancherel

Pour tout couple (f, g) de fonctions dans $\mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_2$, on a

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} f(t)\hat{g}(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)g(t)dt} \,. \tag{58}$$

Démonstration : on pose $F = \overline{\hat{f}}$ et $G = g$, et on applique l'équation (58) : $\langle \hat{F}|\hat{G}\rangle = \langle F|G\rangle$, soit en détail

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\mathcal{F}[\overline{\hat{f}}](u)}\hat{G}(u)du = \int_{\mathbb{R}} \overline{F(v)}G(v)dv$$

où on a mis des variables muettes nouvelles, car on ne peut plus ici distinguer entre espace direct et indirect. On applique la relation (48b), $\overline{\hat{f}}(k) = \int_{\mathbb{R}} \overline{\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi kx} f(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi kx}\overline{f(x)}dx = \bar{\mathcal{F}}[\overline{f(x)}]$ et la première égalité peut se récrire

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \overline{\underbrace{\mathcal{F}[\bar{\mathcal{F}}}_{=\mathcal{I}}[\overline{f(x)}](u)}\hat{g}(u)du = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(v)g(v)dv \quad &\iff \quad \int_{\mathbb{R}} \overline{\overline{f(u)}}\hat{g}(u)du = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(v)g(v)dv \\
&\iff \quad \int_{\mathbb{R}} f(u)\hat{g}(u)du = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(v)g(v)dv \,.
\end{aligned}$$

CQFD.

c Continuité de $\mathcal{F}$

$\mathcal{F}$ est une fonctionnelle continue dans $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, mais pas dans $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$.

D Résumé sur la transformation de Fourier

a Propriétés générales

Fonction dans l'espace réel	Fonction dans l'espace réciproque
$f(x) = \bar{\mathcal{F}}[\hat{f}](x)$ $= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi kx} \hat{f}(k) dk$	$\hat{f}(k) = \mathcal{F}[f](k)$ $= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi kx} f(x) dx$
${}^{x_\circ}f(x) = f(x - x_\circ)$	$\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi k x_\circ} \hat{f}(k)$
$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k_\circ x} f(x)$	${}^{k_\circ}\hat{f}(k) = \hat{f}(k - k_\circ)$
$f_\lambda(x) = f(x/\lambda)$	$\lvert\lambda\rvert \hat{f}_{\frac{1}{\lambda}}(k) = \lvert\lambda\rvert \hat{f}(\lambda k)$
$\check{f}(x) = f(-x)$	$\widetilde{\mathcal{F}[f]}\ (k) = \hat{f}(-k)$
df/dx	$2\mathrm{i}\pi k \hat{f}(k)$
$-2\mathrm{i}\pi x f(x)$	$d\hat{f}/dk$

b Transformées de Fourier courantes

fonction	transformée de Fourier
$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$	$\Pi(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lvert k\rvert \leqslant 1/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
e^{-ax^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, \mathrm{e}^{-\pi^2 k^2/a}$
$\mathrm{e}^{-\lambda\lvert x\rvert}$	$\frac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2 k^2}$

c Formule de Parseval-Plancherel

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) g(t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) \hat{g}(t) dt}$$

Partie II

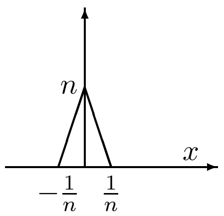
Théorie des distributions

A Distributions ordinaires

1 Introduction : la fonction de Dirac

a Construction d'une fonction de Dirac

La fonction de Dirac, communément notée δ, n'est pas à proprement parler une fonction. On peut la définir comme la limite de diverses suites de fonctions. Par exemple, soit la suite des fonctions f_n définies par morceaux,



$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{1}{n} \ , \\ n^2 x + n & \text{si } -\frac{1}{n} \leqslant x < 0 \ , \\ -n^2 x + n & \text{si } 0 \leqslant x < \frac{1}{n} \ , \\ 0 & \text{si } x \geqslant \frac{1}{n} \ , \end{cases}$$

cette suite tend, dans un sens que l'on va préciser ultérieurement, vers la fonction de Dirac δ.

α Limite de la fonction presque partout

Si on suppose que δ, la limite de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, est une fonction ordinaire, alors cette suite doit au moins tendre **simplement** vers sa limite.

Or, pour tout $x \neq 0$, on a $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$. On constate que la limite **simple** de la suite de fonctions f_n est la fonction nulle presque partout.

Démonstration : soit, par exemple, $x > 0$, soit $n_x \geqslant 1/x$ (par exemple $n_x = 1+$ la partie entière de l'inverse de x), alors, $\forall n \geqslant n_x$, $f_n(x) = 0$, car $x \notin [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$.

De façon analogue, on montre que $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$ pour $x < 0$.

Pour $x = 0$, $f_n(0)$ n'a pas de limite, puisque c'est $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(0) = \lim\limits_{n \to \infty} n = \infty$.

Finalement, on a prouvé que $f_n \to 0$ presque partout. [29]

---

29. Il serait parfaitement possible de construire une suite de fonctions f_n dont la limite serait nulle pour tout x, y compris $x = 0$. Par exemple, on peut choisir

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \text{ ou } x \geqslant \frac{1}{n} \ , \\ 8n^2 x & \text{si} \quad 0 \leqslant x < \frac{1}{2n} \ , \\ -8n^2 x + 8n & \text{si} \quad \frac{1}{2n} \leqslant x < \frac{1}{n} \ , \end{cases}$$

qui tend simplement vers 0, y compris pour $x = 0$, puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 0$.

β Limite de l'intégrale

L'aire de f_n est indépendante de n et vaut 1. On a donc

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(t)dt = \lim_{n\to\infty} 1 = 1\ .$$

γ Contradiction

- Toujours en supposant que la limite simple existe dans l'espace des fonctions, on constate qu'on ne peut pas appliquer le théorème de convergence dominée. On observe en effet que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(t)dt = 1 \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(t)\ dt\ ;$$

  les deux limites sont différentes, et on ne peut intervertir limite et intégrale.
- Il en résulte qu'on ne peut définir δ comme la limite $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$. L'objet des distributions est de donner un sens à cette limite, dont on verra qu'elle n'appartient pas à l'ensemble des fonctions.

δ Limite définie avec la fonction de Dirac

Si l'on calcule l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f_n(t)\varphi(t)dt$, où φ est une fonction suffisamment régulière, on peut montrer que cette suite est convergente :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(t)\varphi(t)dt = \varphi(0)\ .$$

Démonstration : quand n est suffisamment grand, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(t)\varphi(t)dt = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(t)\varphi(t)dt \simeq \varphi(0)\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(t)dt = \varphi(0)$$

car $\varphi(t) \simeq \varphi(0)$ pour $t \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, quand $n \sim \infty$.

b Espace dual

α Définition

Soit E un sous-espace vectoriel de fonctions définies de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ (ses éléments sont donc une certaine catégorie de fonctions f, $x \in \mathbb{R}^p \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^n$).

- L'espace dual E^* est défini par les fonctions de fonctions, qui à une fonction de E associent un nombre complexe, on les appelle formes linéaires, et on les notera $\Psi \in E^*$:

$$\Psi\ :\ E \to \mathbb{C},\ f \mapsto \Psi[f]$$

  où la définition implique $\Psi[f] \in \mathbb{C}$; de plus, Ψ doit être linéaire :

$$\forall (f_1, f_2) \in E^2,\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2,\quad \boxed{\Psi[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2] = \lambda_1\Psi[f_1] + \lambda_2\Psi[f_2]}\ . \qquad (59)$$

- On peut plonger E dans E^*, de la façon suivante : à f, on associe Ψ_f par

$$\Psi_f\ :\ E \to \mathbb{C},\ h \mapsto \Psi_f[h] = \int_{\mathbb{R}} f(x)h(x)dx\ .$$

- Ceci prouve que $E \subset E^*$.

β Espaces duals inclus

On se rappelle que la limite de la fonction de Dirac $\lim_{n\to\infty} f_n$ n'existe pas dans E, de quelque façon qu'on choisisse le sous-espace E. Comme $E^* \supset E$, si l'on choisit intelligemment E, cette limite existera dans E^*.

On a la propriété universelle : soit E et F deux sous-espaces, vérifiant $E \subset F$, alors $E^* \supset F^*$.

Démonstration : soit $\Psi \in F^*$, montrons que $\Psi \in E^*$. Soit $f \in E$, il suffit de montrer que $\Psi[f]$ est bien définie $\forall f$, pour prouver le résultat. Or, $\forall f \in E$, $f \in F$ également, donc $\Psi[f]$ existe par définition (puisque $\Psi \in F^*$). Ceci prouve bien que $\Psi \in E^*$, et finalement, on a prouvé $E^* \supset F^*$.

Cette propriété prend tout son intérêt ici quand on observe que les espaces de fonctions E et F sont de dimension infinie. En dimension finie, on a, au contraire une bijection canonique entre un espace E et son bidual E^{**} ce qui signifie que tous ces espaces sont algébriquement équivalents.

Ainsi, plus on choisit E petit, plus son dual est grand. Il est inutile de choisir un grand sous-espace E. Le but n'est pas seulement d'obtenir un espace E^* grand mais aussi de travailler avec un sous-espace de fonction plus commode. Pour cette raison, on va travailler dans le sous-espace des fonctions $E = \mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$, que l'on va définir maintenant.

2 Espace de fonctions $\mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$

a Définition

Les fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$ sont des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, qui vérifient les propriétés suivantes (on considérera le plus souvent $p = 1$ et $n = 2$, donc les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$) : ces fonctions sont $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact. On les appellera ***fonctions test***.

α Fonction infiniment dérivable

- Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$, pour tout $(n_1, n_2, \cdots, n_p) \in \mathbb{N}^p$, on peut définir

$$\frac{\partial^{n_1} \cdots \partial^{n_p} f}{\partial x_1^{n_1} \cdots \partial x_p^{n_p}}$$

  et de plus, cette fonction est continue.
- Pour $p = 1$, cela signifie simplement que la $n^{\text{ème}}$ dérivée $f^{(n)}$ existe et est continue.

β Fonction à support compact

La notion de fonction à support compact (cf. § **I A 2 b** $\boldsymbol{\beta}$) se généralise $\forall p \in \mathbb{N}^*$.

b Exemple

On va prouver que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$ est non vide, en explicitant un exemple. On se contente de $p = 1$, bien que la généralisation soit élémentaire.

- Soient $a < b \in \mathbb{R}$, soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{(x-a)(x-b)}} & x \in]a, b[\ , \\ 0 & \text{sinon} \ ; \end{cases}$$

notons que $(x-a)(x-b) < 0 \ \forall x \in]a,b[$. On en déduit que

$$\lim_{x\to a^+} \frac{1}{(x-a)(x-b)} = \lim_{x\to b^-} \frac{1}{(x-a)(x-b)} = -\infty \ .$$

et, par conséquent,

$$\lim_{x\to a^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{(x-a)(x-b)}} = \lim_{x\to b^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{(x-a)(x-b)}} = 0 \ .$$

- f est par construction à support compact. Il reste à prouver que f est $\mathcal{C}^\infty$.
- En premier lieu, f est clairement $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty,a[\cup]a,b[\cup]b,\infty[$. Sur $]-\infty,a[$ et sur $]b,\infty[$, f et toutes ses dérivées successives sont identiquement nulles. Sur $]a,b[$, l'expression des dérivées successives de f est du type

$$\text{fraction rationnelle} \times \ \mathrm{e}^{\frac{1}{(x-a)(x-b)}} \ ;$$

or, le facteur exponentiel gagne toujours sur les termes polynômiaux, donc on a, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x\to a^+} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to b^-} f^{(n)}(x) = 0 \ .$$

On a donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(a^-) = f^{(n)}(a^+) = 0$ et $f^{(n)}(b^-) = f^{(n)}(b^+) = 0$, ce qui prouve que f est bien infiniment dérivable en a et b, et finalement sur $\mathbb{R}$ entier.

c Suite régularisante

L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$ est dense dans l'espace des fonctions continues par morceaux. On se restreint, comme souvent, à $p = 1$.

Commençons par définir une suite ρ_n de fonctions dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, qui tend vers la fonction de Dirac.

α Suite ρ_n

- On définit

$$\rho_n(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-1/n^2}} \Big/ \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{1/(t^2-1/n^2)} dt & x \in]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\ , \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- On sait, d'après le § **b** que ρ_n est infiniment dérivable.
- De plus, grâce au facteur *ad hoc*, on a $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(t)dt = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Puis, pour une fonction f quelconque mais à support compact, et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, montrons le résultat suivant : $f * \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

β Convolution d'une fonction à support compact et d'une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

Soit f à support compact ; soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que Support$(f) \subset [a,b]$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que Support$(\varphi) \subset [\alpha,\beta]$.

- Rappelons d'abord que le produit de convolution $f * \varphi$ est à support compact. Cela a été fait en détail au **I B 6 b α** au chapitre sur la convolution des fonctions. Rapidement, on a

$$f * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(x-t)dt \ .$$

Or, les fonctions à l'intérieur de l'intégrale sont non nulles pour $a < t < b$ et $\alpha < x - t < \beta$, autrement dit

$$\begin{gathered} a < t < b \\ x - \beta < t < x - \alpha \ . \end{gathered}$$

Pour que l'intégrale soit non nulle, il faut donc que l'intersection $[a,b] \cap [x-\beta, x-\alpha]$ soit non nulle. Ceci implique, en particulier que $x-\beta < b$ et $x-\alpha < a$; soit finalement $x < b+\beta$ et $x > a+\alpha$.

Ceci prouve que le support de $f * \varphi$ est inclus dans $[a+\alpha, b+\beta]$, donc que cette fonction est à support compact.

- Montrons maintenant que le produit de convolution est infiniment dérivable. Si on veut calculer $\frac{d^p f * \varphi}{dx^p}$, il faut dériver sous le signe somme. Or, comme les fonctions sont à support compact, on peut toujours les majorer, ou leurs dérivées, par leur maximum, qui est bien intégrable sur le support, et par zéro ailleurs. Finalement, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et écrire

$$\begin{aligned}
\frac{d^p f * \varphi}{dx^p}(x) &= \frac{d^p}{dx^p}\int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(x-t)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(t)\frac{\partial^p \varphi}{\partial x^p}(x-t)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(t)\frac{d^p \varphi}{dx^p}(x-t)\underbrace{\frac{d^p x}{d(x-t)^p}}_{\text{égal}^{30}\ \text{à } 1} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi^{(p)}(x-t)dt
\end{aligned}$$

qui est bien définie, puisque φ est infiniment dérivable. Ceci prouve que $f * \varphi$ l'est également. De plus, en examinant le calcul précédent, on prouve, plus précisément,

$$\boxed{(f * \varphi)^{(p)} = f * \varphi^{(p)}}\ . \tag{60}$$

- On en déduit finalement que $\rho_n * \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

On définit finalement la suite régularisante

Suite régularisante

Soit f continue par morceaux, on définit $f_n = (f\mathbb{I}_{[-n,n]}) * \rho_n$.

- Vérifions d'abord que $f_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, par construction, support$f\mathbb{I}_{[-n,n]} \subset [-n,n]$, $f\mathbb{I}_{[-n,n]}$ est à support compact. D'après le § précédent, $f_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
- Montrons maintenant que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. Pour cela, calculons $f_n - f$:

$$\begin{aligned}
f_n(x) - f(x) &= \int_{-n}^{n} f(t)\rho_n(x-t)dt - f(x)\underbrace{\int_{\mathbb{R}} \rho_n(x-t)dt}_{=1} \\
&\qquad \text{on choisit } n \text{ suffisamment grand pour que } x+\frac{1}{n} < n \text{ et } x-\frac{1}{n} > -n \text{ à la fois} \\
&\qquad \text{il suffit de prendre } n > \frac{|x|+\sqrt{x^2+4}}{2} \\
&= \int_{\mathbb{R}} (f(t)-f(x))\underbrace{\rho_n(x-t)}_{=0 \text{ pour } |x-t|>\frac{1}{n}} dt \\
&= \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} (f(t)-f(x))\rho_n(x-t)dt
\end{aligned}$$

30. Pour $p=1$, on écrit $\frac{d\varphi}{dx}(u(x)) = \frac{du}{dx}\Big\rfloor_t \varphi'(u(x))$ et $\frac{du}{dx} = \frac{dx-t}{dx} = 1$ et on généralise $\forall p$ par récurrence.

d'où

$$|f_n(x) - f(x)| < \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} |f(t) - f(x)|\rho_n(x-t)dt \ .$$

Supposons que f est continue en x ; soit ϵ, soit α tel que, pour $|t-x| < \alpha$, $|f(t)-f(x)| < \epsilon$; alors, pour $n > 1/\alpha$ (et vérifiant les conditions précédentes), on a

$$|f(x) - f_n(x)| < \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} \epsilon\rho_n(x-t)dt = \epsilon \ ,$$

ce qui démontre que $f_n(x) \to f(x)$.

- Si x est un point de discontinuité de f, on ne peut prouver le résultat. Mais l'ensemble de ces points est de mesure nulle.
  Finalement, on a prouvé que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to \infty$. On dit que $f_n \to f$ **simplement**.

3 Espace des distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

a Définition

$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est un espace dual de l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, plus précisément, c'est l'ensemble des formes linéaires T de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^p) \to \mathbb{C}$, $\varphi \mapsto T[\varphi]$, où φ est une fonction test quelconque, vérifiant la propriété de continuité suivante :

α Propriété de continuité

Soit I un intervalle quelconque, alors T est continue au sens des distributions si et seulement si il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que, $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$ telle que Support$(\varphi) \subset I$, on ait

$$\boxed{|T[\varphi]| < c\,\|\varphi^{(m)}\|} \ ; \tag{61}$$

(il n'est pas utile de préciser de quelle façon on définit la norme de $\varphi^{(m)}$, car, cette fonction étant à support compact, toutes les normes sont équivalentes. En pratique, on prendra souvent[31] $\|\varphi\|_\infty = \max\limits_{x\in\text{Support}(\varphi)} |\varphi(x)|$).

β Suite de fonctions convergente

Soit une distribution T, la propriété de continuité (61) implique que, si l'on a une suite convergente définie dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$, $\varphi_n \to \varphi$ quand $n \to \infty$, alors, la suite définie dans $\mathbb{C}$: $T[\varphi_n]$ est aussi convergente, et sa limite est $T[\varphi]$.

γ Notation de Dirac

Par la suite, on utilisera la notation de Dirac, $T[\varphi] = \langle T|\varphi\rangle$. Les distributions sont à ***gauche***, les fonctions test à ***droite***.

Quand cela sera nécessaire, on utilisera la notation des physiciens $T(x)$, où x est une variable muette. Dans ce cas, $\langle T(x)|\varphi(x)\rangle$ signifie que T agit sur la fonction test φ.

31. L'égalité est vraie car $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

b Propriétés

α Addition dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^p)$

Soient T_1 et $T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^p)$, la forme linéaire $T_1 + T_2$, définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p) \quad \boxed{\langle T_1 + T_2 | \varphi \rangle = \langle T_1 | \varphi \rangle + \langle T_2 | \varphi \rangle}\ , \tag{62a}$$

est bien une distribution.

Démonstration : soit $I = [\alpha, \beta]$ un intervalle, soit $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}_+^{*\,2}$, et p_1 et p_2 tels que les propriétés de continuité de T_1 et de T_2 s'écrivent

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad |T_1(\varphi)| \leqslant c_1 \|\varphi^{(p_1)}\|_\infty \quad \text{et} \quad |T_2(\varphi)| \leqslant c_2 \|\varphi^{(p_2)}\|_\infty \ ;$$

supposons, par exemple, que $p_1 \leqslant p_2$, notons $p_2 - p_1 = m$. En appliquant récursivement la formule des accroissements finis, on montre que $\max \varphi^{(p_1)} \leqslant (\beta - \alpha)^m \max \varphi^{(p_2)}$, autrement dit, $\|\varphi^{(p_1)}\|_\infty \leqslant (\beta - \alpha)^m \|\varphi^{(p_2)}\|_\infty$, d'où on tire

$$\begin{aligned}
|\langle T_1 + T_2 | \varphi \rangle| &= |\langle T_1 | \varphi \rangle + \langle T_2 | \varphi \rangle| \\
&\leqslant |\langle T_1 | \varphi \rangle| + |\langle T_2 | \varphi \rangle| \\
&\leqslant c_1 \|\varphi^{(p_1)}\|_\infty + c_2 \|\varphi^{(p_2)}\|_\infty \\
&\leqslant c_1 (\beta - \alpha)^m \|\varphi^{(p_2)}\|_\infty + c_2 \|\varphi^{(p_2)}\|_\infty \\
&= \left(c_1 (\beta - \alpha)^m + c_2\right) \|\varphi^{(p_2)}\|_\infty
\end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété de continuité (61) pour $T_1 + T_2$.

β Multiplication par une constante

Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^p)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p) \quad \boxed{\langle \lambda T | \varphi \rangle = \lambda \langle T | \varphi \rangle = \langle T | \lambda \varphi \rangle}\ , \tag{62b}$$

(la dernière égalité utilise le fait que les distributions sont des formes linéaires).

γ Suite

On dit qu'une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^p)$ converge vers T, et on note $T_n \to T$ quand $n \to \infty$, si et seulement si, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$, on a $\langle T_n | \varphi \rangle \to \langle T | \varphi \rangle$ quand $n \to \infty$.

δ Linéarité dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

Ceci est un simple rappel : les distributions sont des formes linéaires, donc, comme on l'a déjà vu dans le rappel sur la dualité, soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^p)$, on a

$$\forall (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p) \quad \boxed{\langle T | \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \langle T | \varphi_1 \rangle + \langle T | \varphi_2 \rangle}\ . \tag{62c}$$

Ceci exclut, par exemple, $\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt$ des distributions.

4 Distributions régulières

On rappelle que E peut être plongé dans E^*. Les distributions régulières sont justement les images des fonctions élémentaires, quand on les plonge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^p)$. On va d'abord définir l'espace des fonctions que l'on peut prolonger comme distribution. On se restreindra, dorénavant, à $p = 1$.

a Espace $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$

On dit que f est localement intégrable et on écrit $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ si et seulement, $\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\int_{[a,b]} |f(t)|dt$ existe. Autrement dit, f n'est pas forcément intégrable, mais $f\mathbb{I}_{[a,b]}$ l'est, $\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On évacue ainsi les problèmes d'intégrabilité à l'infini.

On peut remarquer, par exemple, que $x \mapsto 1 \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

b Définition

Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, on définit la distribution régulière associée à f, que l'on notera $[f]$, par :

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \boxed{\langle [f]|\varphi\rangle \equiv \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt} \ . \tag{63}$$

Vérifions que $\int_{\mathbb{R}} f\varphi dt$ existe bien. Soit $I \supset \text{Support}(\varphi)$ un intervalle $I = [a,b]$ contenant le support de φ ; soit $M = \max\limits_{x\in\text{Support}(\varphi)} |\varphi(x)|$; on a

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(t)\varphi(t)|dt \leqslant M \int_a^b |f(t)|dt$$

qui existe bien, puisque $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Par dessus le marché, on a démontré (61) avec $m = 0$ et $c = \int_I |f(t)|dt$.

Plutôt que d'écrire $[f](x)$, on notera simplement $[f(x)]$, où la variable muette permet de préciser la façon dont on fait l'intégrale. Ainsi, $\langle [f(x)]|\varphi(x)\rangle \equiv \langle [f]|\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$, tandis que $\langle [f(x)]|\varphi(x+y)\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x+y)dx$.

c Produit scalaire

L'espace des fonctions $\mathcal{L}^2$ de carré sommable est muni du produit scalaire (on se restreint dans ce § aux fonctions réelles) :

$$\forall(f,g) \in \mathcal{L}^2 \quad \langle f|g\rangle \equiv \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)dt \ .$$

On remarque que la définition du § précédent d'une distribution régulière généralise le produit scalaire, autrement dit, on serait tenté d'écrire

$$\langle [f]|\varphi\rangle = \langle f|\varphi\rangle \ .$$

Cette identification est formellement exacte, elle permet d'identifier f et la distribution régulière associée $[f]$. Cela dit, on notera toujours $[f]$ de façon propre, sans faire d'abus de notation ; en effet, l'espace $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ est beaucoup plus grand que $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, et l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt$ n'existe que parce que la fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, qui est un espace beaucoup plus restreint. Autrement dit, soit $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, soit $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, alors l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)dt$ n'est généralement pas convergente.

d Propriétés

α Addition

Soient $[h_1]$ et $[h_2]$ deux distributions régulières, on a

$$\boxed{[h_1] + [h_2] = [h_1 + h_2]} \ . \tag{64a}$$

Démonstration : soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
\langle [h_1] + [h_2] | \varphi \rangle &= \langle [h_1] | \varphi \rangle + \langle [h_2] | \varphi \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} h_1(t)\varphi(t)dt + \int_{\mathbb{R}} h_2(t)\varphi(t)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} (h_1(t) + h_2(t))\varphi(t)dt = \langle [h_1 + h_2] \varphi \rangle \ .
\end{aligned}$$

β Multiplication par une constante

De même, soit $\lambda \in \mathbb{C}$, soit $[h]$ une distribution régulière, on a

$$\boxed{\lambda[h] = [\lambda h]} \ . \tag{64b}$$

γ Densité

$\{[h], h \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})\}$ est dense dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^p)$.
Démonstration : soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^p)$, on définit h_n par

$$h_n(y) = \langle T(x) | \rho_n(x - y) \rangle$$

où ρ_n est la suite régularisante définie plus haut ; alors, on trouve

$$\begin{aligned}
\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \langle [h_n] | \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} h_n(y)\varphi(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \langle T(x) | \rho_n(x - y) \rangle \varphi(y)dy \\
&= \langle T(x) | \int_{\mathbb{R}} \rho_n(x - y)\varphi(y)dy \rangle \\
&= \langle T | \rho_n * \varphi \rangle \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle T | \varphi \rangle
\end{aligned}$$

cela est vrai pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, donc $[h_n] \to T$ quand $n \to \infty$. Le passage entre la seconde ligne et la troisième, où on intervertit intégrale et notation de Dirac, peut se comprendre de la façon suivante : l'intégrale peut s'interpréter comme une somme finie de N termes, dont on prend la limite $N \to \infty$. Comme l'interversion est acquise pour un nombre fini de N termes, parce que T est une forme linéaire, il suffit de prouver qu'on peut intervertir limite et notation de Dirac. Or, ceci découle de la continuité de la distribution. On pourrait le montrer à la main, en faisant la différence entre les deux termes et en la majorant à l'aide de (61).

e Distributions régulières particulières

α Distribution nulle

- Soit $h \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, nulle presque partout. Alors, $[h] = 0$ est la distribution nulle.
- Réciproquement, la distribution nulle est bien régulière, puisqu'on peut l'écrire $0 = [0]$.

β Distribution $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

On appelle distribution $\in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ une distribution $T = [f]$ avec $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Pour ces distributions, on notera spécifiquement f au lieu de $[f]$ dès que f intervient dans un produit de distributions, ce qui permet de distinguer cette classe particulière de distributions.

5 Distributions singulières

On va étudier deux exemples de distributions singulières, sans aborder ici la définition formelle, qui sera vue avec l'étude du support d'une distribution.

a Distribution de Dirac

α Définition

On note δ_a ou encore $\delta(x-a)$ la distribution de Dirac centrée en $x=a$, définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \boxed{\delta_a \ : \ \varphi \mapsto \langle \delta_a | \varphi \rangle \equiv \varphi(a)} \, . \tag{65}$$

En particulier, on notera $\delta \equiv \delta_0$ la distribution centrée en $x=0$.

β Suite régularisante à support compact

Soit ρ_n une suite de fonctions, vérifiant les trois propriétés suivantes :

- $\text{Support}(\rho_n) \to \{0\}$; ce qui s'écrit rigoureusement $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\overline{\bigcup_{k\geqslant n} \text{Support}(\rho_k)} \right) = \{0\}$;
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{\mathbb{R}} \rho_n(t)dt = 1$;
- la suite $\int_{\mathbb{R}} |\rho_n(t)|dt$ reste bornée, c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{\mathbb{R}} |\rho_n(t)|dt \leqslant M \ ;$$

(on remarque que la suite $\rho_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ introduite plus haut vérifie bien ces propriétés [32]), alors, au sens des distributions,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} [\rho_n] = \delta} \, .$$

Démonstration : soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, calculons

$$\begin{aligned} \langle [\rho_n] | \varphi \rangle - \langle \delta | \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \rho_n(t)\varphi(t)dt - \varphi(0) \int_{\mathbb{R}} \rho_n(t)dt \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} \rho_n(t)(\underbrace{\varphi(t)-\varphi(0)}_{=t\varphi'(t')})dt \end{aligned}$$

32. La troisième est ici triviale puisque, dans ce cas, $\rho_n(t) \geqslant 0$ pour tout t, et donc $\int_{\mathbb{R}} |\rho_n|dt = \int_{\mathbb{R}} \rho_n dt = 1$.

où $t' \in]0, t[$ d'après le théorème des accroissements finis. Soit $M' = \max_{x \in \text{Support}(\varphi)} |\varphi'(x)|$, on trouve

$$\begin{aligned}
\left|\langle[\rho_n]|\varphi\rangle - \langle\delta|\varphi\rangle\right| &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |\rho_n(t)(\varphi(t) - \varphi(0))|dt \\
&\leqslant M' \int_{\mathbb{R}} |\rho_n(t)||t|dt \\
&\leqslant M' \left(\max_{x \in \text{Support}(\rho_n)} |x|\right) \int_{\mathbb{R}} |\rho_n(t)|dt \\
&\leqslant MM' \underbrace{\max_{x \in \text{Support}(\rho_n)} |x|}_{\to 0 \text{ quand } n \to \infty}
\end{aligned}$$

donc, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\langle[\rho_n]|\varphi\rangle \to \langle\delta|\varphi\rangle$ quand $n \to \infty$; donc, par définition, $[\rho_n] \to \delta$. CQFD.

(Remarquons que la troisième propriété assure que $\int_{\mathbb{R}} t\rho_n(t)dt$ reste bornée ; sans elle, il serait facile de fabriquer des contre-exemples).

b Peigne de Dirac

On appelle peigne de Dirac, et on note $Ш_a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ la distribution suivante :

$$Ш_a = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \delta_{pa} = \lim_{N \to \infty} \sum_{p=-N}^{N} \delta_{pa} \ . \tag{66}$$

Vérifions que cette distribution est bien définie, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle Ш_a|\varphi\rangle = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \varphi(na)$$

or, tous les termes tels que $na \notin \text{Support}(\varphi)$ sont nuls, donc

$$= \sum_{\frac{\min(\text{Support}(\varphi))}{a} \leqslant p \leqslant \frac{\max(\text{Support}(\varphi))}{a}} \varphi(na) \ ,$$

la dernière expression est une somme finie, elle est donc toujours bien définie (pour démontrer la propriété de continuité (61), il suffit de remarquer que, à I fixé, le nombre de termes est fini et déterminé, et d'utiliser l'addition dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$).

On note $Ш = Ш_1$ quand $a = 1$.

6 Multiplication par une distribution $\mathcal{C}^\infty$

a Impossibilité de définir le produit en toute généralité

La multiplication des distributions est très mal définie. Ainsi, il est impossible de définir le produit de deux distributions dans les cas suivants :

- Soit $T = \delta_{x_o}$, avec $x_o \in \mathbb{R}$, il est **impossible** de définir T^2, autrement dit le produit de T par lui-même.
- Soit h_1 et h_2 deux fonctions dans $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, on ne peut définir en toute généralité leur produit au sens des distributions $[h_1][h_2]$, alors que $h_1h_2 \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ et que donc $[h_1h_2]$ est défini.
  En particulier, on ne peut pas identifier *a priori* le produit $[h_1][h_2]$ avec $[h_1h_2]$, car la relation (73) n'est pas vérifiée dans tous les cas.

- Soit $T = \delta_{x_o}$, pour $x_o \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, on ne peut définir le produit $[h]T$ quand h est discontinue en x_o.

Toutefois, on pourra le définir dans des cas particuliers. On procédera en deux temps, on va ici introduire le produit d'une distribution quelconque par une distribution $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

b Produit d'une distribution quelconque par une distribution $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

Soit une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^p)$ quelconques, on définit le produit fT par [33]

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p) \quad \boxed{\langle fT|\varphi\rangle \equiv \langle T|f\varphi\rangle}\;; \tag{67}$$

on remarque que $f\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$ parce que f est $\mathcal{C}^\infty$; ainsi, $\langle T|f\varphi\rangle$ est-il bien défini.

c Multiplication d'une distribution régulière par une distribution $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty$, soit $[h]$ une distribution régulière, on a

$$\boxed{f[h] = [fh]}\;. \tag{68}$$

Démonstration : soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \langle f[h]|\varphi\rangle &= \langle [h]|f\varphi\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(t)f(t)\varphi(t)dt = \langle [fh]|\varphi\rangle\;. \end{aligned}$$

7 Distributions discontinues

- Les distributions discontinues sont des distributions non singulières, définies à partir d'une fonction h, comme les distributions régulières. Mais, contrairement au cas des distributions régulières, h admet une singularité telle qu'elle n'est plus localement intégrable, $h \notin \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Dans ce cas, pour certaines fonctions test φ, $\int_{\mathbb{R}} h(t)\varphi(t)dt$ diverge.
- Pour définir les distributions associées à ces fonctions h, il faut donner un sens aux intégrales $\int_{\mathbb{R}} h(t)\varphi(t)dt$ divergentes. On appelle cela ***régulariser*** l'intégrale.
- Il existe deux méthodes principales de régularisation, *valeur principale* et *partie finie*.
- On va étudier *valeur principale* à travers un exemple fondamental, de façon détaillée.
- *Partie finie* généralise *valeur principale*, mais cette méthode est beaucoup plus sophistiquée et on n'en verra rapidement qu'un seul exemple.

a Valeur Principale de $1/x$

Remarquons tout d'abord que $x \mapsto 1/x \notin \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ car il y a un problème en $x = 0$. On contourne cette divergence en introduisant la définition suivante :

33. Rappel : on note de façon spécifique f et non $[f]$ parce que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

α Définition

On note $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ la distribution définie par [34]

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \qquad \boxed{\langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x})|\varphi\rangle \equiv \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(t)}{t}dt + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t}dt} \, . \tag{69a}$$

Autrement dit, on retire l'intervalle **symétrique** $[-\epsilon, \epsilon]$ dans $\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)}{t}dt$, puis on fait tendre $\epsilon \to 0$.

β Définitions équivalentes

On a deux autres définitions

$$\boxed{\langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x})|\varphi\rangle = \int_{[-c,c]} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}dt} \tag{69b}$$

et

$$\boxed{\langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x})|\varphi\rangle = \int_{0}^{\infty} \frac{\varphi(t)-\varphi(-t)}{t}dt} \, , \tag{69c}$$

où $c > 0$ est tel que $\mathrm{Support}(\varphi) \subset [-c, c]$ (on prend (a, b) tels que $\mathrm{Support}(\varphi) \subset [a, b]$, puis on choisit $c = \max(|a|, |b|)$).

Montrons que (69a) $\iff$ (69c), puis que (69b) $\iff$ (69c). On a

$$\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(t)}{t}dt + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t}dt = \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(t)-\varphi(-t)}{t}dt$$

où l'on a fait le changement de variable $t \to -t$ dans la première intégrale.

Quand on prend la limite $\epsilon \to 0$ de cette égalité, on obtient exactement (69c). Pour (69b), on écrit

$$\begin{aligned}
\int_{[-c,c]} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}dt &= \int_{-c}^{0} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}dt + \int_{0}^{c} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}dt \\
\text{où on coupe l'intégrale en deux.} \quad & \quad \text{On fait } t \to -t \text{ dans le premier terme} \\
&= \int_{0}^{c} \frac{\varphi(-t)-\varphi(0)}{-t}dt + \int_{0}^{c} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}dt \\
&= \int_{0}^{c} \frac{\varphi(t)-\varphi(-t)}{t}dt = \int_{0}^{\infty} \frac{\varphi(t)-\varphi(-t)}{t}dt \, .
\end{aligned}$$

b Partie finie de $1/x^2$

Remarquons tout d'abord que $x \mapsto 1/x^2 \notin \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ car l'intégrale n'est pas convergente au voisinage de $x = 0$. On contourne cette divergence par la définition suivante :

α Définition

On note $\mathrm{pf}(\frac{1}{x^2})$ la distribution définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \qquad \boxed{\langle \mathrm{pf}(\frac{1}{x^2})|\varphi\rangle \equiv \lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{L} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)-t\varphi'(0)}{t^2}dt} \, . \tag{70a}$$

34. Cette définition est liée à la valeur principale des intégrales divergentes définie au **I B 5 b** eq. (37b), on peut écrire

$$\langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x})|\varphi\rangle \equiv \mathrm{vp}\left(\int_{\mathbb{R}} dx \frac{\varphi(x)}{x}\right) \, .$$

β Définition équivalente

On a une définition équivalente

$$\boxed{\langle \mathrm{pf}(\frac{1}{x^2})|\varphi\rangle = \int_0^\infty \frac{\varphi(t)+\varphi(-t)-2\varphi(0)}{t^2}dt} . \tag{70b}$$

8 Dérivée d'une distribution

a Définition

Dans de nombreux paragraphes, on étudiera d'abord le cas des distributions régulières, pour s'inspirer de l'identification entre h et $[h]$ afin de trouver des expressions générales qui préservent cette identification.

Cas des distributions régulières dérivables

Soit $h \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ et h **dérivable.** [35] On cherche une formule compatible avec l'identification, donc

$$\boxed{[h]' = [h']} .$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a alors

$$\begin{aligned}
\langle [h]'|\varphi\rangle &= \langle [h']|\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} h'(t)\varphi(t)dt \\
&= [h(t)\varphi(t)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} h(t)\varphi'(t)dt \\
&\quad \text{où l'on a fait une intégration par partie} \\
&= -\langle [h]|\varphi'\rangle ,
\end{aligned}$$

où l'on se rappelle que φ est nulle à l'infini.

β Formule générale

D'après la dernière formule, on définit, de façon plus générale, pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, sa dérivée T' par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \boxed{\langle T'|\varphi\rangle = -\langle T|\varphi'\rangle} . \tag{71a}$$

On définit de la même façon la dérivé à n'importe quel ordre :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \boxed{\langle T^{(p)}|\varphi\rangle = (-1)^p\langle T|\varphi^{(p)}\rangle} . \tag{71b}$$

35. Toutes les fonctions de $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}$ ne sont pas dérivables.

γ Exemple : dérivée de la distribution de Heaviside

On rappelle que la fonction de Heaviside H est définie par

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geqslant 0 \ , \\ 0 & x < 0 \ . \end{cases}$$

$H \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ mais n'est pas partout dérivable. On lui applique la définition générale : soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \langle [H]' | \varphi \rangle &= -\langle [H] | \varphi' \rangle \\ &= -\int_0^\infty \varphi'(t) dt = -[\varphi]_0^\infty \\ &= \varphi(0) = \langle \delta | \varphi \rangle \ ; \end{aligned}$$

finalement, comme c'est vrai pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a prouvé

$$\boxed{[H]' = \delta} \ .$$

Remarque : H est dérivable presque partout (sur $\mathbb{R}^*$). Or, sa dérivée, définie presque partout, est nulle et définit donc la distribution nulle $[0] = 0$. Heureusement que l'identification ne donne pas simplement $[H]' \neq [H'] = 0$.

b Formule des sauts

C'est une généralisation du cas précédent pour une fonction réglée sur $\mathbb{R}$ dérivable par morceaux. Soient $a_1, a_2, \cdots, a_N \in \mathbb{R}$ tels que $a_1 < a_2 < \cdots < a_N$ et que h soit dérivable sur chaque intervalle $]-\infty, a_1[$, $]a_1, a_2[, \cdots,]a_N, \infty[$. Calculons $[h]'$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \langle [h]' | \varphi \rangle &= -\langle [h] | \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} h(t) \varphi'(t) dt \\ &= -\int_{-\infty}^{a_1} h(t)\varphi'(t)dt - \int_{a_1}^{a_2} h(t)\varphi'(t)dt - \cdots - \int_{a_N}^{\infty} h(t)\varphi'(t)dt \\ \text{par partie} &= -[h(t)\varphi(t)]_{-\infty}^{a_1} - [h(t)\varphi(t)]_{a_1}^{a_2} \cdots - [h(t)\varphi(t)]_{a_N}^{\infty} \\ &\quad + \int_{-\infty}^{a_1} h'(t)\varphi(t)dt + \cdots + \int_{a_N}^{\infty} h'(t)\varphi(t)dt \end{aligned}$$

on peut raccorder les intégrales, par contre, on doit distinguer $h(a_i^+)$ et $h(a_i^-)$

$$\begin{aligned} &= -(h(a_1^-)\varphi(a_1) - 0) - (h(a_2^-)\varphi(a_2) - h(a_1^+)\varphi(a_1)) \cdots - (0 - h(a_N^+)\varphi(a_N)) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} h'(t)\varphi(t)dt \\ &= \varphi(a_1)(h(a_1^+) - h(a_1^-)) + \cdots + \varphi(a_N)(h(a_N^+) - h(a_N^-)) + \langle [h'] | \varphi \rangle \\ &= \langle \delta_{a_1} \Delta h(a_1) + \cdots + \delta_{a_N} \Delta h(a_N) + [h'] | \varphi \rangle \end{aligned}$$

où l'on a définit $\Delta h(a_i) = h(a_i^+) - h(a_i^-)$. Comme cela est vrai pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a prouvé la formule générale

$$\boxed{[h]' = [h'] + \delta_{a_1} \Delta h(a_1) + \cdots + \delta_{a_N} \Delta h(a_N)} \ . \tag{72}$$

*La dérivée de h au sens des distributions est égale à la dérivée au sens des fonctions **plus** la somme des distributions de Dirac aux points de discontinuité de h pondérées par les sauts de h en ces points.*

Remarque : on retrouve directement $[H]' = \delta$, puisque, d'une part $H' = 0$, et d'autre part, le saut en 0 vaut 1.

c Dérivée du produit d'une distribution quelconque et d'une distribution $\mathcal{C}^\infty$

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}^\infty$, on a

$$\boxed{(fT)' = f'T + fT'}\ , \tag{73}$$

où la dérivée de f est prise au sens des fonctions puisqu'il n'y a pas de saut (la dérivation au sens des distributions et au sens des fonctions se confondent). En particulier, la notation f' au lieu de $[f']$ est bien légitime puisque $f' \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Démonstration : soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
\langle (fT)' | \varphi \rangle &= -\langle fT | \varphi' \rangle \\
&= -\langle T | f\varphi' \rangle \\
&= -\langle T | (f\varphi)' - f'\varphi \rangle \\
&= \langle T' | f\varphi \rangle + \langle T | f'\varphi \rangle \\
&= \langle fT' | \varphi \rangle + \langle f'T | \varphi \rangle \\
&= \langle fT' + f'T | \varphi \rangle
\end{aligned}$$

vrai pour toute φ donc on a bien le résultat.

d Primitive d'une distribution

On a le résultat suivant : toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ admet une primitive.

Démonstration : soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, soit $\rho = \rho_1$ définie à la section $2\mathbf{c}\boldsymbol{\alpha}$. On a $\int_{\mathbb{R}} \rho(t)dt = 1$ et $\rho(t) = 0$ pour tout $t \notin [-1, 1]$.

Primitive d'une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

- La fonction $\mathcal{P}(\varphi)$ définie par

$$\mathcal{P}(\varphi)(x) = \int_{-\infty}^{x} \left(\varphi(t) - \rho(t) \int_{\mathbb{R}} \varphi(t')dt' \right) dt$$

  existe et $\in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
- En effet, notons $I = [\min(-1, \min(\mathrm{Support}(\varphi))), \max(1, \max(\mathrm{Support}(\varphi)))]$, la fonction $t \mapsto \varphi(t) - \rho(t) \int_{\mathbb{R}} \varphi(t')dt'$ est nulle en dehors de I, donc bien intégrable.
- C'est, par construction, une fonction infiniment dérivable, et on vérifie que $\mathcal{P}(\varphi)(x)$ est également nulle hors de I. Finalement, on a prouvé que $\mathcal{P}(\varphi) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
- Enfin, $\mathcal{P}(\varphi)$ est une primitive de $\varphi - \rho \int_{\mathbb{R}} \varphi dt$, par construction.

Primitive d'une distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Soit $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on définit sa primitive P par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \langle P | \varphi \rangle = -\langle T | \mathcal{P}(\varphi) \rangle\ ,$$

on trouve alors, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle P' | \varphi \rangle = -\langle P | \varphi' \rangle = \langle T | \mathcal{P}(\varphi') \rangle\ ;$$

comme $\int_{\mathbb{R}} \varphi' dt = 0$, $\mathcal{P}(\varphi')$ est une primitive de φ'. Donc, $\mathcal{P}(\varphi')$ et φ sont égales à une constante près. Comme elles sont nulles à l'infini, elles sont égales. On a donc

$$\langle P' | \varphi \rangle = \langle T | \varphi \rangle$$

vrai pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, donc, finalement, $P' = T$. CQFD.

9 Autres transformations sur les distributions

a Translation

α Translatée d'une distribution régulière

On définit la translatée d'une distribution régulière par

$$\boxed{{}^a[h] = [{}^a h]}\ . \tag{74a}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \langle {}^a[h]|\varphi\rangle &= \langle [{}^a h]|\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} h(t-a)\varphi(t)dt \\ \text{(chgt de var. } t \to t+a\text{)} &= \int_{\mathbb{R}} h(t)\varphi(t+a)dt = \langle [h]|{}^{-a}\varphi\rangle\ . \end{aligned}$$

β Translatée d'une distribution

On définira donc la translatée ${}^aT$ d'une distribution T par

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \boxed{\langle {}^aT|\varphi\rangle \equiv \langle T|{}^{-a}\varphi\rangle}\ , \tag{74b}$$

soit encore $\langle T(x-a)|\varphi(x)\rangle = \langle T(x)|\varphi(x+a)\rangle$.

b Changement d'échelle

α Dilatation d'une distribution régulière

On définit le changement d'échelle d'une distribution régulière par

$$\forall\lambda \in \mathbb{R}^* \qquad \boxed{[h]_\lambda = [h_\lambda]}\ . \tag{75a}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \langle [h]_\lambda|\varphi\rangle &= \langle [h_\lambda]|\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} h(\frac{t}{\lambda})\varphi(t)dt \\ \text{(chgt de var. } t \to \lambda t\text{)} &= |\lambda| \int_{\mathbb{R}} h(t)\varphi(\lambda t)dt = |\lambda|\langle [h]|\varphi_{\frac{1}{\lambda}}\rangle\ . \end{aligned}$$

β Dilatation d'une distribution

On définira donc la dilatation T_λ d'une distribution T par

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \boxed{\langle T_\lambda|\varphi\rangle \equiv |\lambda|\langle T|\varphi_{\frac{1}{\lambda}}\rangle}\ , \tag{75b}$$

soit encore $\langle T(x/\lambda)|\varphi(x)\rangle = |\lambda|\langle T(x)|\varphi(\lambda x)\rangle$.

N.B. : $Ш_a$ n'est pas la dilatée de $Ш$, mais elle est proportionnelle à $(Ш)_a$.

c Transposition

- On définit la transposée d'une distribution régulière $[h]$ par $\widecheck{[h]} = [\check{h}]$.
- On définit la transposée d'une distribution S par

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \boxed{\langle \check{S}|\varphi\rangle \equiv \langle S|\check{\varphi}\rangle}\ , \tag{76}$$

soit encore $\langle S(-x)|\varphi(x)\rangle = \langle S(x)|\varphi(-x)\rangle$.

d Parité

α Distribution paire

Soit $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on dit que S est paire si et seulement $\check{S} = S$.

β Distribution impaire

On dit que S est impaire si et seulement si $\check{S} = -S$.

γ Définitions équivalentes

On montre que
- S paire $\iff \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ impaire, on a $\langle S|\varphi\rangle = 0$.
- S impaire $\iff \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ paire, on a $\langle S|\varphi\rangle = 0$.

Démonstration :
- soit S paire, c'est-à-dire $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction test, on a

$$\langle S|\varphi - \check{\varphi}\rangle = \langle S|\varphi\rangle - \langle \check{S}|\varphi\rangle = \langle S|\varphi\rangle - \langle S|\varphi\rangle = 0$$

  ce qui démontre que S donne 0 pour la partie impaire de φ, donc pour toute fonction test impaire.
- Soit S impaire, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction test, on a

$$\langle S|\varphi + \check{\varphi}\rangle = \langle S|\varphi\rangle + \langle \check{S}|\varphi\rangle = \langle S|\varphi\rangle - \langle S|\varphi\rangle = 0$$

  ce qui démontre que S donne 0 pour la partie paire de φ, donc pour toute fonction test paire.
- Soit S donnant 0 sur toute fonction test impaire, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction test, on a

$$\langle S - \check{S}|\varphi\rangle = \langle S|\varphi\rangle - \langle S|\check{\varphi}\rangle = \langle S|\varphi - \check{\varphi}\rangle = 0$$

  où la dernière fonction test est la partie impaire de φ et donne 0. On en déduit que $\check{S} = S$.
- Soit S donnant 0 sur toute fonction test paire, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction test, on a

$$\langle S + \check{S}|\varphi\rangle = \langle S|\varphi\rangle + \langle S|\check{\varphi}\rangle = \langle S|\varphi + \check{\varphi}\rangle = 0$$

  où la dernière fonction test est la partie paire de φ et donne 0. On en déduit que $\check{S} = -S$.

10 Support d'une distribution

a Support d'une distribution régulière

Il est naturel de définir le support d'une distribution régulière $[h]$ par $\text{Support}([h]) = \text{Support}(h)$. On cherche à caractériser cet espace de façon plus intrinsèque, de façon à généraliser la notion à toutes les distributions.

Introduisons tout d'abord la notion de portage.

b Portage d'une distribution

Soit une distribution T, soit I un intervalle ouvert, ou une union quelconque d'intervalles ouverts disjoints, on dit que I porte la distribution T si et seulement si, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vérifiant $\forall x \in I$, $\varphi(x) = 0$, alors, $\langle T|\varphi\rangle = 0$.

Notons que $\mathbb{R}$, par exemple, porte toutes les distributions !

c Propriété fondamentale

Soit une distribution régulière $[h]$, on a la propriété suivante : I porte $[h]$ si et seulement si $I \supset \text{Support}([h])$.

Vérifions d'abord que $I \supset \text{Support}([h]) \Rightarrow\ I$ porte $[h]$: Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, vérifiant $\forall x \in I$ $\varphi(x) = 0$, on remarque que $\mathbb{R}\backslash I \subset \backslash\mathbb{R}\text{Support}[h]$ et on calcule

$$\langle [h] | \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} h(t)\varphi(t)dt = \int_I h(t) \underbrace{\varphi(t)}_{\substack{=0 \\ \text{sur cet intervalle}}} dt + \int_{\mathbb{R}\backslash I} \underbrace{h(t)}_{\substack{=0 \\ \text{sur cet intervalle}}} \varphi(t)dt = 0 \ .$$

Vérifions maintenant $I \not\supset \text{Support}([h]) \Rightarrow\ I$ ne porte pas $[h]$.

Soit donc un intervalle ouvert $U \neq \varnothing$ inclus dans $\text{Support}([h])$ et exclus de I, on a $\text{Support}([h]) \cap (\mathbb{R}\backslash I) \supset U$; soit $x_{\text{o}} \in U$ et $\epsilon > 0$ tels[36] que $]x_{\text{o}} - \epsilon, x_{\text{o}} + \epsilon[\subset U$ et $\forall x \in]x_{\text{o}} - \epsilon, x_{\text{o}} + \epsilon[$, $h(x) \neq 0$. On définit alors φ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} h(x)\, \mathrm{e}^{\frac{1}{\epsilon^2 - (x - x_{\text{o}})^2}} & |x - x_{\text{o}}| < \epsilon \ , \\ 0 & \text{sinon} \ . \end{cases}$$

φ est bien nulle sur tout l'intervalle I, par construction, et pourtant,

$$\langle [h] | \varphi \rangle = \int_{x_{\text{o}} - \epsilon}^{x_{\text{o}} + \epsilon} h^2(t)\, \mathrm{e}^{\frac{1}{\epsilon^2 - (t - x_{\text{o}})^2}} dt > 0$$

ce qui prouve bien que I ne porte pas, en ce cas, $[h]$.

Finalement, les deux sens de l'implication sont prouvés, et la propriété est vraie. CQFD.

d Définition intrinsèque pour une distribution régulière

Grâce à la propriété fondamentale, on peut maintenant donner la définition du support d'une distribution $[h]$:

$$\text{Support}([h]) = \bigcap_{I \text{ portant } [h]} I \ .$$

α Exemple

Le support de $[\mathbb{I}_{[a,b]}]$ et de $[\mathbb{I}_{]a,b[}]$ est l'intervalle fermé $[a, b]$.

β Propriétés

Si h est dérivable, on a $\text{Support}([h]') = \text{Support}([h']) \subset \text{Support}([h])$.

Bien sûr, si h n'est pas dérivable, on espère généraliser cette propriété, mais cela ne sera possible qu'avec la définition générale du support d'une distribution.

e Support d'une distribution

α Définition

On définit le support d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ par

$$\text{Support}(T) = \bigcap_{I \text{ portant } T} I \ .$$

Par construction, cette définition recoupe celle pour une distribution régulière.

36. Il est toujours possible de trouver un tel intervalle sinon h serait nulle sur U, contrairement aux hypothèses. Il est certes possible de trouver x_{o} tel que h ne soit pas continue en x_{o}. Mais, les discontinuités de h forment, par définition d'une distribution régulière, un ensemble discret, et donc de mesure nulle. Donc, il est toujours possible d'éviter un tel cas, sinon U serait de mesure nulle lui-même, absurde.

β Propriété

- La propriété fondamentale du §c se généralise à toutes les distributions.
- Soit T une distribution quelconque, on a $\text{Support}(T') \subset \text{Support}(T)$.
  Pour le montrer, il suffit de montrer que, si I porte T, il porte aussi T'. Or, $\varphi(x) = 0$ $\forall x \in I$ implique $\varphi'(x) = 0$ $\forall x \in I$ (ceci n'est valable que parce que I est constitué d'intervalles **ouverts**).

f Distributions singulières

Les supports ponctuels posent un problème particulier. Examinons un cas simple :

α Support de δ_a

Considérons $T = \delta_a$. $\forall I \supset \{a\}$, I ouvert, I porte T. En effet, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, telle que $\forall x \in I$ $\varphi(x) = 0$, on a $\varphi(a) = 0$ en particulier, donc,

$$\langle \delta_a | \varphi \rangle = 0 \ .$$

Finalement, $\bigcap\limits_{I \supset \{a\}} = \{a\}$: le support de la distribution de Dirac est le singleton $\{a\}$.

β Support de $\delta_a^{(p)}$

Il aurait été plus simple de définir directement, dans l'exemple précédent, $\text{Support}(\delta_a)$ comme le plus petit ensemble portant δ_a (en étendant alors la propriété fondamentale aux intervalles fermés).

Cependant, ceci n'aurait pas fonctionné avec δ'_a : Le support de δ'_a est bien $\{a\}$, mais il est facile de construire des fonctions φ telles que

$$\varphi(a) = 0 \qquad \text{et} \qquad \langle \delta'_a | \varphi \rangle = -\varphi'(a) \neq 0 \quad \text{simultanément.}$$

Au contraire, quelque soit I **ouvert** contenant $\{a\}$, chaque fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ nulle sur I a toutes ses dérivées nulles en a, ce qui prouve que I porte $\delta^{(p)}$ $\forall p \in \mathbb{N}$, et finalement

$$\boxed{\text{Support}(\delta_a^{(p)}) = \{a\}} \ . \tag{77}$$

γ Théorème

Réciproquement, soit une distribution T telle que son support s'écrive $\text{Support}(T) = \{a\}$, alors, T est une combinaison linéaire finie des distributions $\delta_a^{(p)}$, $p \in \mathbb{N}$,

$$T = \sum_{p=0}^{N} c_p \delta_a^{(p)} \qquad \text{où } N \in \mathbb{N} \ .$$

δ Définition d'une distribution singulière

- Soit une distribution T, on dit que T est singulière (on dit parfois ***purement*** singulière) si $\exists \{x_i,\ i \in \mathbb{N}^*\}$ un ensemble dénombrable, sans point d'accumulation, tel que
$$\text{Support}(T) = \{x_i,\ i \in \mathbb{N}^*\} \ .$$

- D'après le théorème précédent, il existe des coefficients $(c_{ni}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ tel que

$$\boxed{T = \sum_{i\in\mathbb{N}^*\ n\in\mathbb{N}} c_{ni}\delta^{(n)}(x-x_i)} \ . \tag{78}$$

- Par exemple, la fonction de Dirac est singulière, ainsi que le peigne de Dirac.

ϵ Décomposition d'une distribution

Théorème : « Une distribution T quelconque peut être décomposée de façon unique en une distribution singulière T_{sing} et une distribution T_h, associée à une fonction h, qui peut être soit discontinue (comme $T_h = \text{vp}(1/x)$), soit régulière. »

g Distribution causale

α Définition d'une distribution causale

On dit qu'une distribution T est causale si son support $\text{Support}(T) \subset [a,\infty[$, où $a \in \mathbb{R}$. D'après la propriété fondamentale du §c, cela signifie que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que, $\forall x \geqslant a$, $\varphi(x) = 0$, alors

$$\langle T|\varphi\rangle = 0 \ .$$

β Exemple

$[H]$ est causale, puisque $\text{Support}([H]) = [0,\infty[$.

Action sur des fonctions test anticausales

Soit T causale et $a \in \mathbb{R}$ tel que $\text{Support}(T) \subset [a,\infty[$. Soit une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Remarquons d'abord que si on remplace φ par $x \mapsto H(x-a)\varphi(x)$, on ne change pas le résultat puisque ces deux fonctions ne diffèrent que sur l'intervalle $]-\infty,a[$, qui ne porte pas T.

Ce raisonnement est faux parce que ${}^aH\varphi \notin \mathcal{D}(\mathbb{R})$. S'il y a une discontinuité en $x = a$, l'action de T pourrait induire une erreur. Pour corriger la construction, on va rendre la coupure continue. Pour cela, on définit $\widetilde{H}_n = H(x-\frac{1}{n}) * \rho_n$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et ρ_n est la fonction régularisante définie à la section $2\mathbf{c}\boldsymbol{\alpha}$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on observe que $\langle \widetilde{H}_n(x-a)T(x)|\varphi(x)\rangle = \langle T(x)|\widetilde{H}_n(x-a)\varphi(x)\rangle = \langle T|\varphi\rangle$. La première égalité est vraie parce que ${}^a\widetilde{H}_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et la différence des deux derniers termes s'écrit $\langle T|\chi\rangle$ avec $\chi = ({}^a\widetilde{H}_n - 1)\varphi$. La fonction χ est nulle sur $[a,\infty[$, donc, par définition de $\text{Support}(T)$, $\langle T|\chi\rangle = 0$, ce qui démontre la deuxième égalité.

Finalement, soit une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ anticausale (ce qui signifie que $\text{Support}(\varphi) \subset]-\infty,a]$ où $a \in \mathbb{R}$, c'est l'opposé de la causalité et a priori $\varphi \notin \mathcal{D}(\mathbb{R})$). Remarquons que ${}^a\widetilde{H}_n\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ parce qu'elle est à la fois causale et anticausale[37] et elle coincide avec φ sur $[a,\infty[$. On définit l'action de T sur φ par

$$\langle T|\varphi\rangle \equiv \langle T(x)|\varphi(x)\widetilde{H}_n(x-a)\rangle \ .$$

Si $n \to \infty$, on remarque que ${}^a\widetilde{H}_n\varphi \to^a H\varphi$ mais il ne faut pas atteindre la limite (qui peut être $\notin \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$). Au contraire, dans la plupart des cas, on peut se contenter de $n = 1$.

37. Soit b tel que $\text{Support}(\varphi) \subset]-\infty,b]$, alors $\text{Support}({}^a\widetilde{H}_n\varphi \subset [a-\frac{1}{n},b]$. Si $a > b$, ce support est $\varnothing$ pour n suffisamment grand, ce qui signifie que l'action de T sur φ donne alors 0.

h Définition d'une distribution à support compact

On dit qu'une distribution S est à support compact si son support $\text{Support}(S) \subset [a,b]$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. D'après la propriété fondamentale du §c, cela signifie que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et telle que $\forall x \in [a,b]$, alors

$$\langle S|\varphi\rangle = 0 \ .$$

$\boldsymbol{\alpha}$ Exemple

$[\Pi]$ est causale, puisque $\text{Support}([\Pi]) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Action sur des fonctions test étendues

Soit S à support compact, a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $\text{Support}(S) \subset [a,b]$. Soit une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Remarquons d'abord que si on remplace φ par $x \mapsto \Pi(\frac{1}{b-a}x - \frac{a+b}{2(b-a)})\varphi(x)$, on ne change pas le résultat puisque ces deux fonctions ne diffèrent que sur l'intervalle $]-\infty, a[\cup]b, \infty[$, qui ne porte pas S.

Ce raisonnement est faux parce que ${}^{\frac{a+b}{2(b-a)}}\Pi_{b-a}\varphi \notin \mathcal{D}(\mathbb{R})$. S'il y a une discontinuité en $x = a$ ou en $x = b$, l'action de S pourrait induire une erreur. Pour corriger la construction, on va rendre la coupure continue. Pour cela, on définit $\widetilde{\Pi}_n = \mathbb{I}_{[-\frac{1}{2}-\frac{1}{n}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n}]} * \rho_n$, avec encore la fonction régularisante ρ_n définie à la section $2\mathbf{c}\boldsymbol{\alpha}$. La fonction $\widetilde{\Pi}_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on observe que $\langle\widetilde{\Pi}_n(\frac{1}{b-a}x - \frac{a+b}{2(b-a)})S(x)|\varphi(x)\rangle = \langle S(x)|\widetilde{\Pi}_n(\frac{1}{b-a}x - \frac{a+b}{2(b-a)})\varphi(x)\rangle$ $= \langle S|\varphi\rangle$. La première égalité est vraie parce que ${}^{\frac{a+b}{2(b-a)}}(\widetilde{\Pi}_n)_{b-a} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et la différence des deux derniers termes s'écrit $\langle S|\chi\rangle$ avec $\chi = ({}^{\frac{a+b}{2(b-a)}}(\widetilde{\Pi}_n)_{b-a} - 1)\varphi$. La fonction χ est nulle sur $[a,b]$, donc, par définition de $\text{Support}(S)$, $\langle S|\chi\rangle = 0$, ce qui démontre la deuxième égalité.

Finalement, soit une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ quelconque (donc a priori, $\varphi \notin \mathcal{D}(\mathbb{R})$). Remarquons que ${}^{\frac{a+b}{2(b-a)}}(\widetilde{\Pi}_n)_{b-a}\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (parce que ${}^{\frac{z+b}{2(b-a)}}(\widetilde{\Pi}_n)_{b-a}$ est à support compact) et elle coincide avec φ sur $[a,b]$. On définit l'action de S sur φ par

$$\langle S|\varphi\rangle \equiv \langle S(x)|\varphi(x)\widetilde{\Pi}_n(\frac{1}{b-a}x - \frac{a+b}{2(b-a)})\rangle \ .$$

Si $n \to \infty$, on remarque que ${}^{\frac{a+b}{2(b-a)}}(\widetilde{\Pi}_n)_{b-a}\varphi \to {}^{\frac{a+b}{2(b-a)}}\ \Pi_{b-a}\varphi$ mais il ne faut pas atteindre la limite (qui peut être $\notin \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$). Au contraire, dans la plupart des cas, on peut se contenter de $n = 1$.

i Produit de distributions

On va généraliser le produit de distributions à de nouveaux cas.

Multiplication d'une distribution par une fonction $\mathcal{C}^\infty(U)$

- Soit une distribution T donnée. Soit U un ouvert connexe contenant son support, $U \supset \text{Support}(T)$ et une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Alors, le produit $[f]T$ est bien défini.
  Démonstration : on a

$$\begin{aligned}
\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \langle[f]T|\varphi\rangle &= \langle[f]T|\varphi\mathbb{I}_U\rangle \\
&= \langle T|\varphi f\mathbb{I}_U\rangle \\
&= \langle[f\mathbb{I}_U]T|\varphi\rangle
\end{aligned}$$

  où on a remplacé φ par $\varphi\mathbb{I}_U$, puisque leur différence est nulle sur le support de T et donne 0. Or, finalement $f\mathbb{I}_U \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et comme $[f\mathbb{I}_U]T$ existe bien, $[f]T$ également.

- En pratique, on traite différemment les cas où Support(T) est compact (auquel cas, il n'y a aucune condition à l'infini sur f) des autres cas, par exemple, si T est causale, $f(x)$ doit s'annuler quand $x \to \infty$ (à moins que la distribution ne soit tempérée, auquel cas elle doit décroître rapidement, cf. plus loin).

Multiplication de distributions ayant des supports séparés

- Soit T et T' deux distributions telles que Support(T) $\cap$ Support(T') $= \varnothing$, alors on peut définir leur produit, qui vaut $TT' = 0$.
- Le complémentaire de Support(T') joue le rôle de U pour T, et réciproquement.
- Un exemple élémentaire est
$$\delta_{\mathrm{x}_0}\delta_{\mathrm{x}_1} = 0$$
pour $x_0 \neq x_1$ (on rappelle que ce produit n'existe pas pour $x_0 = x_1$).

Combinaison des cas précédents

Soit T et T', telles que, sur chaque composante connexe U de Support(T) $\cap$ Support(T'), l'une des deux soit une distribution $\mathcal{C}^\infty(U)$, alors on peut définir leur produit en combinant les différents cas déjà étudiés.

Il ne faut guère espérer de meilleure généralisation. Toutefois, on sait définir à la main le produit $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ par lui-même, qui vaut δ.

11 Convolution des distributions

Avant de définir la convolution, étudions rapidement $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

a Distributions de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, soit une fonction test à deux variables $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on notera $\langle T|\varphi\rangle = \langle T(x,y)|\varphi(x,y)\rangle$ à la façon des physiciens. φ est à support compact dans le plan $\mathbb{R}^2$, ce qui signifie qu'on peut inclure son support dans un carré (ou au choix un disque) fini.

α Produit tensoriel

Les seules distributions à deux variables dont nous aurons besoin sont les distributions $S(x)T(y)$; on a une sorte de formule de Fubini, qui s'écrit :

$$\begin{aligned}\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \ \mapsto \langle S(x)T(y)|\varphi(x,y)\rangle &= \Big\langle S(x)\Big|\underbrace{\langle T(y)|\varphi(x,y)\rangle}_{\text{fonction de } x}\Big\rangle \\ &= \Big\langle T(y)\Big|\underbrace{\langle S(x)|\varphi(x,y)\rangle}_{\text{fonction de } y}\Big\rangle \ ;\end{aligned}$$

β Exemple

La distribution de Dirac à deux dimensions $\delta_{a,b} = \delta(x-a)\delta(y-b)$ est définie par

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \quad \boxed{\langle\delta_{a,b}|\varphi\rangle} = \langle\delta(x-a)|\langle\delta(y-b)|\varphi\rangle\rangle = \langle\delta(y-b)|\langle\delta(x-a)|\varphi\rangle\rangle = \boxed{\varphi(a,b)}\,.$$

b Convolution

α Remarque préalable

Soit deux distributions régulières $[h_1]$ et $[h_2]$, $h_i \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$; on ne peut définir la convolution au sens des fonctions $h_1 * h_2$. En effet, pour que

$$h_1 * h_2(x) = \int_{\mathbb{R}} h_1(t)h_2(x-t)dt$$

soit défini, il faudrait que h_1 et h_2 soient intégrables (ou, au moins, qu'elles appartiennent à $\mathcal{L}^2$), ce qui n'est pas toujours le cas.

En conséquence, $[h_1 * h_2]$ n'existe pas, et, plus généralement, on ne pourra pas définir $[h_1] * [h_2]$.

Par contre, lorsque $h_1 * h_2$ existe, on démontrera que

$$\boxed{[h_1] * [h_2] = [h_1 * h_2]}\ , \tag{79}$$

la convolution préserve bien l'identification des fonctions avec les distributions régulières.

β Cas d'existence

On ne va définir, dans ce cours, la convolution de deux distributions que dans les deux cas suivants :

- soit les deux distributions sont causales ;
- soit le support de l'une des deux est borné.

Il est possible de traiter d'autres cas, comme par exemple, la convolution de deux distributions anticausales. Cependant, soit qu'ils n'apportent pas d'idées originales, soit qu'ils soient trop compliqués, on se restreindra aux deux premiers.

γ Définition

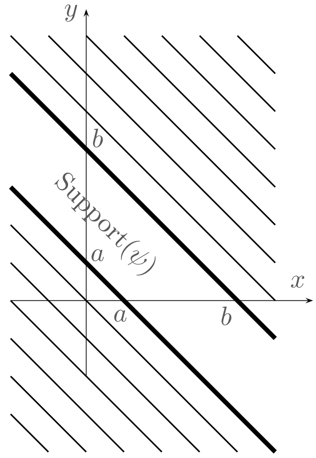
Soient deux distributions S et T, telles qu'on se trouve dans l'un des cas d'existence précédents, on définit alors le produit de convolution par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \boxed{\langle S * T | \varphi \rangle = \langle S(x) | \langle T(y) | \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle T(y) | \langle S(x) | \varphi(x+y) \rangle \rangle} \tag{80}$$

(l'égalité des deux dernières expressions est un résultat démontrable, que nous n'étudierons pas ici.)

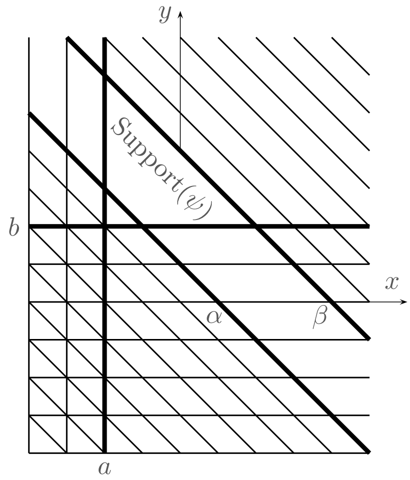
Existence

On a défini implicitement une fonction test de $\mathbb{R}^2$ par $\psi(x,y) \equiv \varphi(x+y)$, où $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Or, soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\text{Support}(\varphi) \subset [a,b]$, $\psi(x+y)$ est constante pour $x+y=c$, avec $c \in [a,b]$ arbitraire. $\text{Support}(\psi)$ contient toutes les droites de pente -1 qui coupent l'axe des ordonnées (ainsi que l'axe des abscisses) en un point $c \in \text{Support}(\varphi)$, comme représenté ci-contre. ψ n'est donc pas à support compact, donc pas une fonction test.

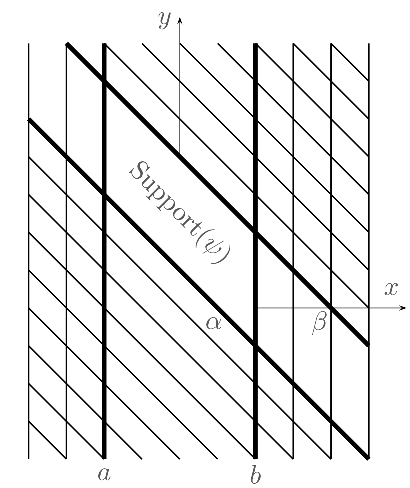


Cependant, on peut utiliser l'action des distributions étendues à des fonctions test $\varphi \notin \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pour montrer que, dans les cas d'existence que nous étudions, la formule (80) est applicable. Les deux cas s'étudie séparément :

- Supposons les deux distributions S et T causales. Soient alors a tel que $\text{Support}(S) \subset [a,\infty[$ et b tel que $\text{Support}(T) \subset [b,\infty[$, on peut remplacer S par ${}^a\widetilde{H}_1 S$ et T par ${}^b\widetilde{H}_1 T$. On peut écrire $\langle S * T|\varphi\rangle =$ $\langle \widetilde{H}_1(x-a)S(x)\widetilde{H}_1(y-b)T(y)|\varphi(x+y)\rangle$ $= \langle S(x)T(y)|\widetilde{H}_1(x-a)\widetilde{H}_1(y-b)\varphi(x+y)\rangle$ et la fonction test ψ implicitement définie par $\psi(x,y) = \widetilde{H}_1(x-a)\widetilde{H}_1(y-b)\varphi(x+y)$ est à support compact, comme on peut l'observer sur la figure ci-contre (où on note ici $[\alpha,\beta]$ l'intervalle qui contient le support de φ), donc $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.



- Supposons la distribution S à support compact. Soient alors a et b tels que $\text{Support}(S) \subset [a,b]$, on peut remplacer S par ${}^{\frac{a+b}{2(b-a)}}(\widetilde{\Pi}_1)_{b-a}S$. On peut écrire $\langle S * T|\varphi\rangle =$ $\langle \widetilde{\Pi}_1(\frac{1}{b-a}x - \frac{a+b}{2(b-a)})S(x)T(y)|\varphi(x+y)\rangle$ $= \langle S(x)T(y)|\widetilde{\Pi}_1(\frac{1}{b-a}(x-\frac{a+b}{2}))\varphi(x+y)\rangle$ et la fonction test ψ implicitement définie par $\psi(x,y) = \widetilde{\Pi}_1(\frac{1}{b-a}(x-\frac{a+b}{2}))\varphi(x+y)$ est à support compact, comme on peut l'observer sur la figure ci-contre (où on note ici $[\alpha,\beta]$ l'intervalle qui contient le support de φ), donc $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.



ϵ Commutativité

D'après (80), le produit de convolution, quand il existe, est commutatif. Par contre, l'associativité est plus délicate à démontrer et fera l'objet d'une section spéciale, plus loin.

c Cas des distributions régulières

α Conditions d'existence

Soient deux fonctions de $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, les conditions d'existence signifient que

- soit les supports des deux fonctions peuvent être inclus dans les intervalles, respectivement $[a,\infty[$ et $[b,\infty[$, auquel cas les distributions associées sont causales.
- soit le support de l'une d'entre elles est inclus dans un intervalle $[a,b]$, auquel cas sa distribution associée est à support compact.

β Produit de convolution des fonctions

Remarquons qu'alors l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} h_1(t)h_2(x-t)dt$ est bien définie. En effet, selon les cas, elle peut se récrire

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_1(t)h_2(x-t)dt = \int_{\mathbb{R}} H(t-a)h_1(t)H(x-t-b)h_2(x-t)dt = \int_a^{x-b} h_1(t)h_2(x-t)dt$
  (h_1 et h_2 étant causales), on voit de plus sur cette expression que la fonction $h_1 * h_2$ est également causale et vérifie Support$(h1 * h_2) \subset [a+b, +\infty[$.
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_1(t)h_2(x-t)dt = \int_a^b h_1(t)h_2(x-t)dt$
  où h_1 est à support compact. Ici, par contre, on ne sait rien du produit $h_1 * h_2$.

Produit de convolution des distributions

Pour finir, démontrons l'égalité (79). Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
\langle [h_1] * [h_2] | \varphi \rangle &= \langle [h_1(x)] | \langle [h_2(y)] | \varphi(x+y) \rangle \rangle \\
&= \langle [h_1(x)] | \int_{\mathbb{R}} h_2(y)\varphi(x+y)dy \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} h_1(x) \Big(\int_{\mathbb{R}} h_2(y)\varphi(x+y)dy \Big) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} h_1(x)h_2(y)\varphi(x+y)dxdy \quad \text{on pose } t = x+y \\
&= \int_{\mathbb{R}} h_1(x)h_2(t-x)\varphi(t)dxdt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \Big(\int_{\mathbb{R}} h_1(x)h_2(t-x)dx \Big) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\ h_1 * h_2(t)dt \\
&= \langle [h_1 * h_2] | \varphi \rangle \,.
\end{aligned}$$

d Exemples

α L'élément neutre de la convolution est δ

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\boxed{\delta * T = T}\,. \tag{81a}$$

Démonstration : soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle \delta * T | \varphi \rangle = \langle \delta(x) | \langle T(y) | \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle T(y) | \varphi(0+y) \rangle = \langle T | \varphi \rangle \,.$$

β L'opérateur de translation est $T \mapsto \delta_a * T$

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\boxed{\delta_a * T = {}^aT}\,. \tag{81b}$$

Démonstration : soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle \delta_a * T | \varphi \rangle = \langle \delta(x-a) | \langle T(y) | \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle T(y) | \varphi(a+y) \rangle = \langle T | {}^{-a}\varphi \rangle \ = \langle {}^aT | \varphi \rangle \,.$$

γ L'opérateur de dérivation est $T \mapsto \delta' * T$

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\boxed{\delta' * T = T'} \ . \tag{81c}$$

Démonstration : soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \delta' * T | \varphi \rangle &= \langle \delta'(x) | \langle T(y) | \varphi(x+y) \rangle \rangle \\
&= -\frac{d}{dx} \langle T(y) | \varphi(x+y) \rangle \Big]_{x=0} \\
&= -\langle T(y) | \frac{\partial \varphi(x+y)}{\partial x} \rangle \Big]_{x=0} \\
&= -\langle T(y) | \frac{d\varphi}{dx+y}(x+y) \underbrace{\frac{\partial x+y}{\partial x}}_{=1} \rangle \Big]_{x=0} \\
&= -\langle T(y) | \varphi'(x+y)]_{x=0} \rangle = -\langle T(y) | \varphi'(y) \rangle = \langle T' | \varphi \rangle \ .
\end{aligned}$$

e Associativité

Soit R, S, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, vérifiant l'une de ses deux conditions :

- soit elles sont toutes causales.
- soit deux au moins d'entre elles sont à support compact.

alors, on peut démontrer que

$$\boxed{R * (S * T) = (R * S) * T} \ , \tag{82}$$

nous ne le ferons pas mais noter que $R * S$, $R * T$ et $S * T$ sont bien définies.

α Application à la dérivation

Soit S et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, si $S * T$ existe, autrement dit, soit qu'elles sont toutes deux causales, soit que l'une est à support compact, alors, δ', S et T vérifient les conditions précédentes (en effet, dans le premier cas, elles sont toutes causales, y compris δ', et dans le second, deux sont bien à support compact, en particulier δ'). On a

$$(\delta' * S) * T = S * (\delta' * T) = \delta' * (S * T)$$

donc

$$\boxed{S' * T = S * T' = (S * T)'} \ ; \tag{83a}$$

« *pour dériver un produit de convolution, il suffit de dériver l'un des facteur.* »

On peut généraliser la formule à tout ordre, et écrire, $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$,

$$\boxed{S^{(p)} * T^{(q)} = S^{(p+q)} * T = S * T^{(p+q)} = (S * T)^{(p+q)}} \ . \tag{83b}$$

β Application à la primitive d'une distribution causale

Soit une distribution causale $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, alors, une primitive P de T s'écrit tout simplement $P = [H] * T$.

Démonstration : $P' = ([H] * T)' = [H]' * T = \delta * T = T$.

γ Contre-exemple

$[H]$, δ' et $[1]$ ne vérifient pas les conditions pour lesquelles on a prouvé l'associativité. Or, les produits $([H]*\delta')*[1]$ et $[H]*(\delta'*[1])$ existent et sont différents. En effet,

$$\begin{aligned} ([H]*\delta')*[1] &= \quad [H]'*[1] = \delta*[1] \quad = [1] \ ; \\ [H]*(\delta'*[1]) &= \quad [H]*[1]' = [H]*0 \quad = 0 \ . \end{aligned}$$

De plus, il faut noter que le troisième produit $\delta'*([H]*[1])$ n'existe pas, car $[H]*[1]$ n'existe pas !

δ Application à la translation

Soit S et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, telles que $S*T$ existe. De façon identique à l'application de l'associativité à la dérivation, δ_a, S et T vérifient les conditions d'application de l'associativité. On a

$$(\delta_a * S) * T = S*(\delta_a * T) = \delta_a *(S*T)$$

donc

$$\boxed{{}^aS * T = S * {}^aT = {}^a(S*T)} \ ; \tag{84}$$

« pour translater un produit de convolution, il suffit de translater l'un des facteurs. »

On peut généraliser la formule et écrire, $\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$${}^aS * {}^bT = {}^{a+b}S * T = S * {}^{a+b}T = {}^{a+b}(S*T) \ .$$

12 Continuité

a Principe

Les applications, définies dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, associées respectivement à l'addition, la multiplication par une constante complexe, la multiplication par une distribution $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, la translation par une constante, l'inflation par une constante, la dérivation, la convolution par une distribution, sont continues.

b Applications

En pratique, on utilise la continuité lorsque l'on étudie une suite convergente dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ $S_n \to S$. Elle implique que l'on peut inverser la limite et l'application en question.

Soit donc une suite convergente $S_n \to S$. La continuité des applications sus-citées implique la convergence des suites suivantes :

Addition

Soit $T_\text{o} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, la suite $S_n + T_\text{o}$ est convergente, et sa limite est $S + T_\text{o}$.

Multiplication par une constante complexe

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, la suite λS_n est convergente, et sa limite est λS.

Multiplication par une distribution $\mathcal{C}^\infty$

Soit f une fonction infiniment dérivable, la suite fS_n est convergente, et sa limite est fS.

Translation

Soit $a \in \mathbb{R}$, la suite ${}^{a}S_n$ est convergente, et sa limite est ${}^{a}S$.

Inflation

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite $(S_n)_\lambda$ est convergente, et sa limite est S_λ.

Dérivation

La suite S'_n est convergente, et sa limite est S'.

Convolution par une distribution

Soit T, telle que $S_n * T$ existe ; (soit les distributions S_n y compris S et T sont toutes causales, soit T est à support compact, soit les distributions S_n sont toutes, y compris S, à support compact).

La suite $S_n * T$ est convergente, et sa limite est $S * T$.

En particulier, si S_n est une suite régularisante à support compact $[\rho_n]$, telle que $[\rho_n] \to \delta$, pour toute $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, la suite $[\rho_n] * T$ est convergente, et sa limite est $\delta * T = T$.

B Transformation de Fourier

1 Introduction

Dans l'espace des fonctions, la transformée de Fourier d'un produit de convolution est le produit simple des transformées de Fourier. Dans l'espace des distributions, le produit ordinaire et le produit de convolution posent les problèmes que l'on vient d'étudier ; cela présage de grande difficultés.

En fait, l'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^p)$ est trop large pour définir correctement la transformation de Fourier. Suivant les notions qui ont été rappelées au **A 1 b**, on va considérer un espace de fonction $\mathcal{S}(\mathbb{R}^p) \supset \mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$, et son dual associé $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^p)$, qui vérifie donc $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^p) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^p)$. On appellera $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^p)$ l'espace des distributions tempérées.

2 Espace de fonctions $\mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$

On dit qu'une fonction $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_p) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$ si et seulement si $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^p)$ et, $\forall (m_1, n_1, \cdots, m_p, n_p) \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{|x_1^{m_1} \cdots x_p^{m_p} \frac{\partial^{n_1}}{\partial x_1^{n_1}} \cdots \frac{\partial^{n_p}}{\partial x_p^{n_p}} \varphi(x_1, \cdots, x_p)|,\ x_i \in \mathbb{R}\}$ est borné.

Le cas $p = 1$ sur lequel nous nous restreindrons la plupart du temps s'écrit plus simplement $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et, $\forall (m, n) \in \mathbb{N}$, $\{|x^m \varphi^{(n)}(x)|, x \in \mathbb{R}\}$ est borné : φ et toutes ses dérivées sont à décroissance rapide (cf. §**I A 2 j γ**, elles tendent vers zéro, quand $x \to \pm\infty$, plus vite que toute puissance de x).

3 Espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est le dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, mais muni d'une propriété de continuité plus délicate que sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$; on ne la détaillera pas ici.

a Restriction à l'espace de fonctions $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

On a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, donc toute distribution tempérée $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est une distribution ordinaire, et pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on peut définir

$$\langle S|\varphi\rangle \ ;$$

en pratique, on exprimera les choses en sens inverse : soit une distribution quelconque $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, est-elle tempérée, autrement dit, a-t-on $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$?

b Exemples

Pour mieux comprendre la notion de distribution tempérée, donnons quelques exemples :

- δ_a est tempérée, de même que les dérivées $\delta_a^{(p)}$.

- Le peigne de Dirac, $Ш_a$, est tempéré. Vérifions le. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle Ш_a|\varphi\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(na) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(na) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(-na) \ ;$$

  les deux suites sont convergentes ; en effet, $\varphi(na)$ tend vers 0 plus vite que $1/n^2$; on peut donc les majorer par des suites convergentes. CQFD.
- $\exp Ш_a$ n'est, par contre, pas tempérée : soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle \exp Ш_a|\varphi\rangle = \langle Ш_a(x)|\, \mathrm{e}^x\varphi(x)\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{na}\varphi(na) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{na}\varphi(na) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-na}\varphi(-na) \ ;$$

  or, cette fois-ci, la suite de terme $\mathrm{e}^{na}\varphi(na)$ n'est pas forcément convergente (puisqu'on peut choisir $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(x) \sim \mathrm{e}^{-x}$ quand $x \sim \infty$).

c Addition des distributions tempérées

L'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est stable par addition. Soient donc S et T deux distributions tempérées, alors $S + T$ est tempérée.

Démonstration : il suffit de sommer les majorations afférant à chacun des cas.

d Multiplication d'une distribution tempérée par une distribution $\mathcal{C}^\infty$

Les deux derniers exemples du **b** démontrent que, contrairement à l'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, il n'est pas possible de définir la multiplication par une distribution $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, puisque $Ш_a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et que $\exp Ш \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$; par contre, pour $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $f\ \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, on a $fS \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Toutefois, on peut définir le produit de $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ par une distribution associée à un polynôme p, ou à toute fonction f à croissance lente[38] ; par extension, on dira que $[f]$ est une distribution à croissance lente.

e Transformations dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est stable par les transformations suivantes : Soit $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a

- $\check{S} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
- ${}^aS \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
- $S_\lambda \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
- $S' \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

4 Définition de la transformée de Fourier

a Stabilité de l'espace de fonctions $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ par Fourier

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors la transformée de Fourier $\hat{\varphi}$ existe, et de plus, $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ce qui permet de définir la transformée de Fourier réciproque de $\hat{\varphi}$.

Cela provient des résultats du **I c 2 $\boldsymbol{\beta}$** : comme $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{C}}^\infty(\mathbb{R})$, sa transformée $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ est à décroissance rapide. Comme $\boldsymbol{\varphi}$ est à décroissance rapide, $\hat{\boldsymbol{\varphi}} \in \boldsymbol{\mathcal{C}}^\infty(\mathbb{R})$.

38. C'est une fonction telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| < p(x)$, cf. équation (10).

b Définition

Soit $\boldsymbol{S} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier $\widehat{\boldsymbol{S}} = \mathcal{F}[\boldsymbol{S}]$ par

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \boxed{\langle \widehat{\boldsymbol{S}} | \boldsymbol{\varphi} \rangle \equiv \langle \boldsymbol{S} | \hat{\boldsymbol{\varphi}} \rangle} \tag{85a}$$

et la transformée inverse de Fourier par

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \boxed{\langle \bar{\mathcal{F}}[\boldsymbol{S}] | \boldsymbol{\varphi} \rangle \equiv \langle \boldsymbol{S} | \bar{\mathcal{F}}[\boldsymbol{\varphi}] \rangle} \; . \tag{85b}$$

c Variables

Attention, si on appelle $\boldsymbol{x}$ la variable de l'espace direct, et $\boldsymbol{k}$ celle de l'espace réciproque, dans ces formules, $\widehat{\boldsymbol{S}}$ agit dans l'espace réciproque, donc sur une fonction $\varphi(\boldsymbol{k})$, tandis que $\boldsymbol{S}$ agit dans l'espace direct, donc sur une fonction $\hat{\varphi}(\boldsymbol{x})$.

Ainsi, il faut inverser espace direct et espace réciproque quand on passe des distributions aux fonctions, et introduire

$$\mathcal{F} \;:\; \varphi(\boldsymbol{k}) \mapsto \mathcal{F}[\varphi](\boldsymbol{x}) = \hat{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\mathbb{i}\pi \boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} \varphi(\boldsymbol{k}) \boldsymbol{dk}$$

et

$$\bar{\mathcal{F}} \;:\; \hat{\varphi}(\boldsymbol{x}) \mapsto \bar{\mathcal{F}}[\hat{\varphi}](\boldsymbol{k}) = \varphi(\boldsymbol{k}) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\mathbb{i}\pi \boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} \varphi(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{dx}$$

où le seul changement par rapport aux formules habituelles est l'inversion $\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{k}$.

Par exemple, les formules (52a) et (52c) de dérivation avec la transformation de Fourier s'écrivent maintenant

- $\mathcal{F}[\dfrac{\boldsymbol{d}\varphi}{\boldsymbol{dk}}](\boldsymbol{x}) = \mathbf{2}\mathbb{i}\pi \boldsymbol{x} \mathcal{F}[\varphi](\boldsymbol{x}) = \mathbf{2}\mathbb{i}\pi \boldsymbol{x} \hat{\varphi}(\boldsymbol{x})$.
- $\dfrac{\boldsymbol{d}\hat{\varphi}}{\boldsymbol{dx}}(\boldsymbol{x}) = -\mathbf{2}\mathbb{i}\pi \mathcal{F}[\boldsymbol{k}\varphi(\boldsymbol{k})](\boldsymbol{x})$.

De même, les formules (46a) et (46c) de translation ou (47a) d'inflation avec la transformation de Fourier s'écrivent maintenant

- ${}^{\boldsymbol{x}_\circ}\hat{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{F}[\,\mathrm{e}^{2\mathbb{i}\pi \boldsymbol{k}\boldsymbol{x}_\circ} \varphi(\boldsymbol{k})](\boldsymbol{x})$.
- $\mathcal{F}[{}^{\boldsymbol{k}_\circ}\varphi(\boldsymbol{k})](\boldsymbol{x}) = \mathrm{e}^{-2\mathbb{i}\pi \boldsymbol{k}_\circ \boldsymbol{x}} \hat{\varphi}(\boldsymbol{x})$.
- $\mathcal{F}[\varphi_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{k})](\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{\lambda}| \hat{\varphi}_{\frac{1}{\boldsymbol{\lambda}}}(\boldsymbol{x})$.

d Propriétés

α Dérivation

Soit $\boldsymbol{S} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a les formules suivantes :

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{d}\widehat{\boldsymbol{S}}}{\boldsymbol{dk}} = -(\mathbf{2}\mathbb{i}\pi)\widehat{\boldsymbol{x}\boldsymbol{S}}} \; . \tag{86a}$$

Démonstration : soit $\varphi(\boldsymbol{k}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \frac{\boldsymbol{d}\widehat{\boldsymbol{S}}}{\boldsymbol{dk}} | \varphi \rangle &= -\langle \widehat{\boldsymbol{S}} | \varphi' \rangle \\
&= -\langle \boldsymbol{S} | \widehat{\frac{\boldsymbol{d}\varphi}{\boldsymbol{dk}}} \rangle \\
&= -\langle \boldsymbol{S} | \mathbf{2}\mathbb{i}\pi \boldsymbol{x} \hat{\varphi}(\boldsymbol{x}) \rangle \\
&= \langle (-\mathbf{2}\mathbb{i}\pi \boldsymbol{x}) \boldsymbol{S} | \hat{\varphi} \rangle \\
&= \langle (-\mathbf{2}\mathbb{i}\pi) \widehat{\boldsymbol{x}\boldsymbol{S}} | \varphi \rangle \; ;
\end{aligned}$$

en appliquant la relation (52c) telle qu'écrite à la section **c** précédente ; comme cela est vrai $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, le résultat est démontré. CQFD.

$$\boxed{\mathcal{F}\left[\frac{d\boldsymbol{S}}{d\boldsymbol{x}}\right] = \mathbf{2i}\pi \boldsymbol{k}\widehat{\boldsymbol{S}}}\ . \tag{86b}$$

Démonstration : soit $\varphi(\boldsymbol{k}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}\left[\frac{d\boldsymbol{S}}{d\boldsymbol{x}}\right] | \varphi(\boldsymbol{k})\rangle &= \langle \frac{d\boldsymbol{S}}{d\boldsymbol{x}} | \hat{\varphi}(\boldsymbol{x})\rangle \\
&= -\langle \boldsymbol{S} | \frac{d\hat{\varphi}}{d\boldsymbol{x}}\rangle \\
&= -\langle \boldsymbol{S} | -\mathbf{2i}\pi\mathcal{F}[\boldsymbol{k}\varphi(\boldsymbol{k})]\rangle \\
&= \langle \mathbf{2i}\pi\widehat{\boldsymbol{S}} | \boldsymbol{k}\varphi(\boldsymbol{k})\rangle \\
&= \langle \mathbf{2i}\pi\boldsymbol{k}\widehat{\boldsymbol{S}} | \varphi\rangle\ ;
\end{aligned}$$

en appliquant la relation (52a) telle qu'écrite à la section **c** précédente ; comme cela est vrai $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, le résultat est démontré. CQFD.

$\boldsymbol{\beta}$ Translation

Soit $\boldsymbol{S} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a les formules suivantes :

$$\boxed{\mathcal{F}[{}^{\boldsymbol{x}_\circ}\boldsymbol{S}] = \mathrm{e}^{-\mathbf{2i}\pi \boldsymbol{k}\boldsymbol{x}_\circ}\widehat{\boldsymbol{S}}}\ . \tag{87a}$$

Démonstration : soit $\varphi(\boldsymbol{k}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}[{}^{\boldsymbol{x}_\circ}\boldsymbol{S}] | \varphi(\boldsymbol{k})\rangle &= \langle {}^{\boldsymbol{x}_\circ}\boldsymbol{S} | \hat{\varphi}(\boldsymbol{x})\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{S} | {}^{-\boldsymbol{x}_\circ}\hat{\varphi}(\boldsymbol{x})\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{S} | \mathcal{F}[\mathrm{e}^{-\mathbf{2i}\pi \boldsymbol{k}\boldsymbol{x}_\circ}\varphi(\boldsymbol{k})](\boldsymbol{x})\rangle \\
&= \langle \widehat{\boldsymbol{S}} | \mathrm{e}^{-\mathbf{2i}\pi \boldsymbol{k}\boldsymbol{x}_\circ}\varphi(\boldsymbol{k})\rangle \\
&= \langle \mathrm{e}^{-\mathbf{2i}\pi \boldsymbol{k}\boldsymbol{x}_\circ}\widehat{\boldsymbol{S}} | \varphi\rangle\ ;
\end{aligned}$$

en appliquant la relation (46c) telle qu'écrite à la section **c** précédente ; comme cela est vrai $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, le résultat est démontré. CQFD.

$$\boxed{{}^{\boldsymbol{k}_\circ}\widehat{\boldsymbol{S}} = \mathcal{F}[\mathrm{e}^{\mathbf{2i}\pi \boldsymbol{k}_\circ\boldsymbol{x}}\boldsymbol{S}]}\ . \tag{87b}$$

Démonstration : soit $\varphi(\boldsymbol{k}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
\langle {}^{\boldsymbol{k}_\circ}\widehat{\boldsymbol{S}} | \varphi(\boldsymbol{k})\rangle &= \langle \widehat{\boldsymbol{S}} | {}^{-\boldsymbol{k}_\circ}\varphi(\boldsymbol{k})\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{S} | \mathcal{F}[{}^{-\boldsymbol{k}_\circ}\varphi(\boldsymbol{k})](\boldsymbol{x})\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{S} | \mathrm{e}^{\mathbf{2i}\pi \boldsymbol{k}_\circ\boldsymbol{x}}\hat{\varphi}(\boldsymbol{x})\rangle \\
&= \langle \mathrm{e}^{\mathbf{2i}\pi \boldsymbol{k}_\circ\boldsymbol{x}}\boldsymbol{S} | \hat{\varphi}(\boldsymbol{x})\rangle \\
&= \langle \mathcal{F}[\mathrm{e}^{\mathbf{2i}\pi \boldsymbol{k}_\circ\boldsymbol{x}}\boldsymbol{S}] | \varphi\rangle\ ;
\end{aligned}$$

en appliquant la relation (46a) telle qu'écrite à la section précédente ; comme cela est vrai $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, le résultat est démontré. CQFD.

On remarque que les fonctions $\boldsymbol{k} \to \mathrm{e}^{\pm\mathbf{2i}\pi \boldsymbol{k}\boldsymbol{x}_\circ}$ et $\boldsymbol{x} \to \mathrm{e}^{\pm\mathbf{2i}\pi \boldsymbol{k}_\circ\boldsymbol{x}}$ sont majorées, en module, par 1, et donc que la multiplication de $\boldsymbol{S}$ par ces fonctions est bien légitime.

γ Dilatation

Soit $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a la formule suivante :

$$\boxed{\mathcal{F}[S_\lambda] = |\lambda|\widehat{S}_{\frac{1}{\lambda}}}\ . \tag{88a}$$

Démonstration : soit $\varphi(k) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[S_\lambda]|\varphi\rangle &= \langle S_\lambda|\hat{\varphi}(x)\rangle \\ &= |\lambda|\langle S|\hat{\varphi}_{\frac{1}{\lambda}}(x)\rangle \\ &= \langle S|\mathcal{F}[\varphi_\lambda(k)](x)\rangle \\ &= \langle \widehat{S}|\varphi_\lambda(k)\rangle \\ &= |\lambda|\langle \widehat{S}_{\frac{1}{\lambda}}|\varphi\rangle \end{aligned}$$

où on a utilisé les règles d'inflation (47a) (telle qu'écrite à la section **c** précédente) et (75b) pour une homothétie de rapport $\frac{1}{\lambda}$; comme cela est vrai $\forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, le résultat est démontré. CQFD.

δ Transposition

Soit $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a

$$\boxed{\widetilde{\mathcal{F}[S]} = \mathcal{F}[\check{S}]}\ . \tag{88b}$$

Démonstration : soit $\varphi(k) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{\mathcal{F}[S]}|\varphi\rangle &= \langle \widehat{S}|\check{\varphi}\rangle \\ &= \langle S|\mathcal{F}[\check{\varphi}]\rangle \\ &= \langle S|\check{\hat{\varphi}}\rangle \\ &= \langle \check{S}|\hat{\varphi}\rangle \\ &= \langle \mathcal{F}[\check{S}]|\varphi\rangle\ ; \end{aligned}$$

où on a utilisé la relation (47c) ; comme cela est vrai $\forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, le résultat est démontré. CQFD.

Continuité

La transformation de Fourier est continue dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Autrement dit, soit une suite de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, convergente : $S_n \to S$ quand $n \to \infty$, alors la suite $\widehat{S}_n$ est également convergente, et on a $\widehat{S}_n \to \widehat{S}$ quand $n \to \infty$.

5 Cas des distributions régulières

On cherche tout d'abord à quelles conditions une distribution régulière $[h]$ est tempérée. On distingue les quatre cas suivants :

a Conditions pour qu'une distribution régulière soit tempérée

Soit $h \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, $[h]$ est tempérée quand

i $h \in \mathcal{L}^1$, h est intégrable.

ii $|h(x)| < p(x)$, où p est un polynôme (h est à croissance lente).

iii $h = h_1 + h_2$, où $h_1 \in \mathcal{L}^1$ et $|h_2(x|) < p(x)$, h est la somme de fonctions appartenant aux deux premiers cas.

iv h est périodique.

Cas d'une fonction intégrable

Dans le premier cas, non seulement on a bien que $\int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt$ existe $\forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, d'où $[h]$ est ***tempérée*** ; mais on peut même définir $\widehat{[h]}$ directement à partir de $\hat{h}$, qui existe au sens des fonctions, on a alors

$$\boxed{\widehat{[h]} = [\hat{h}]} \,.$$

Démonstration : soit h intégrable, soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle\widehat{[h]}|\varphi\rangle = \langle[h]|\hat{\varphi}\rangle = \int_{\mathbb{R}} h(t)\hat{\varphi}(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{h}(t)\varphi(t)dt = \langle[\hat{h}]|\varphi\rangle \,,$$

où l'on utilise l'égalité de Parseval-Plancherel (58).

Cas d'une fonction majorée par un polynôme

Soit h majorée par le polynôme p, soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, l'intégrale $\left|\int_{\mathbb{R}} h(t)\varphi(t)dt\right|$ est majorée par $\int_{\mathbb{R}} p(t)|\varphi(t)|dt$ qui existe, c.f. le § **3 d**. Donc, $[h]$ est bien tempérée.

Mélange des deux cas précédents

Les deux cas précédents peuvent être mélangés, selon la règle du § **3 c**.

Cas d'une fonction périodique

Les fonctions périodiques sont souvent bornées et entrent alors dans le second cas. Toutefois, s'il y a des divergences (périodique !), comme pour $x \mapsto \sqrt{|\tan(x)|}$, qui est bien localement intégrable, ce cas se distingue des précédents et mérite une démonstration propre. Soit h de période a, et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, montrons que $\int_{\mathbb{R}} h(t)\varphi(t)dt$ est bien définie. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{-ma}^{ma} |h(t)\varphi(t)|dt &= \sum_{p=-m}^{m-1} \int_{pa}^{pa+a} |h(t)\varphi(t)|dt \\
&= \sum_{p=-m}^{m-1} \int_0^a |h(t)\varphi(t+pa)|dt \quad \text{. Soit } M \text{ tel que } |\varphi(t+pa)| < \frac{M}{p^2+1} \\
&< \sum_{p=-m}^{m-1} \frac{M}{p^2+1} \int_0^a |h(t)|dt
\end{aligned}$$

où M existe car $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. La dernière expression est bien définie, et converge quand $m \to \infty$. Quand on applique le théorème de convergence dominée, on en déduit bien que $\int_{\mathbb{R}} h(t)\varphi(t)dt$ existe, donc $[h]$ est bien tempérée.

Posons h_o la fonction restreinte sur une seule période, par exemple,

$$h_o(x) = \mathbb{I}_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]} h(x) \,,$$

alors, $[h_o]$ est tempérée (premier cas) et on a

$$[h] = [h_o] * \text{Ш}_a \,.$$

b Exemples

$[1]$, $[H]$, $[x]$ sont tempérées (second cas). $[\log]$ est aussi tempérée, en appliquant le troisième cas : on pose $h_1(x) = \mathbb{I}_{[-1,1]}\log(x)$ et $h_2(x) = (1 - \mathbb{I}_{[-1,1]})\log(x)$. h_1 est à support compact, donc intégrable. Et on vérifie $|h_2(x)| \leqslant |x|-1 \leqslant x^2 - 1 \leqslant x^2$ (car $|x| \geqslant 1$ sur le support de h_2).

6 Exemples de transformée de Fourier

- $\boxed{\widehat{[1]} = \delta}$.
- $\boxed{\hat{\delta} = [1]}$.
- $\boxed{(-2\mathrm{i}\pi)^p\widehat{[x^p]} = \delta^{(p)}}$.
- $\boxed{\widehat{\delta^{(p)}} = [(2\mathrm{i}\pi k)^p]}$.
- $\boxed{\widehat{\delta_a} = [\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi ak}]}$.
- $\boxed{\widehat{[\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi ax}]} = \delta_a}$.

7 Théorème d'inversion de Fourier

Alors qu'il est faux dans $\mathcal{L}_1\backslash\mathcal{L}_2$, le théorème d'inversion que l'on vérifie sur les exemples précédents est vrai en toute généralité dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Le paradoxe n'est qu'apparent. Les cas de violation de ce théorème ne se produisent que lorsque $\hat{f} \notin \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$. Il est alors impossible de calculer la transformée réciproque au sens des fonctions, mais cela est possible au sens des distributions.

Démonstration : soit $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, soit une fonction test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}\langle \hat{\hat{S}}\,|\varphi\rangle &= \langle \hat{S}|\hat{\varphi}\rangle \\ &= \langle S|\hat{\hat{\varphi}}\,\rangle \\ &= \langle S|\check{\varphi}\rangle \\ &= \langle \check{S}|\varphi\rangle\end{aligned}$$

où on a appliqué le théorème d'inversion pour φ. Comme cela est vrai pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, le résultat est démontré (ou plutôt son corrolaire $\hat{\hat{S}} = \check{S}$, qui lui est équivalent).

8 Transformation de Fourier et convolution

a Transformée de Fourier d'une distribution à support compact

On a le théorème suivant : *la transformée de Fourier d'une distribution à support compact est* ***régulière***, et dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$; autrement dit, soit $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ à support compact, il existe $s \in \mathcal{C}^\infty$, telle que $\hat{S} = [s]$.

De plus, on montre que s est à croissance lente ($|s|$ majorée par un polynôme).

α Transformée de Fourier d'un produit de convolution

On peut définir la transformée de Fourier d'un tel produit dans les deux cas suivants :

- Soit $\boldsymbol{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ tempérée et $\boldsymbol{S}$ à support compact, la transformée de Fourier de $\boldsymbol{S} * \boldsymbol{T}$ existe ; soit $\boldsymbol{s} \in \mathcal{C}^\infty$ telle que $\widehat{\boldsymbol{S}} = [\boldsymbol{s}]$, on a

$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{S} * \boldsymbol{T}} = \widehat{\boldsymbol{S}}\,\widehat{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{s}\widehat{\boldsymbol{T}}}\ . \tag{89a}$$

- Soit $\boldsymbol{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, et $\boldsymbol{S} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier de $\boldsymbol{S} *[\boldsymbol{f}]$ existe, et vaut

$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{S} *[\boldsymbol{f}]} = \widehat{[\boldsymbol{f}]}\widehat{\boldsymbol{S}} = \widehat{\boldsymbol{f}}\widehat{\boldsymbol{S}}}\ . \tag{89b}$$

- On ne sait pas calculer $\widehat{\boldsymbol{S} * \boldsymbol{T}}$ dans le cas général, car $\widehat{\boldsymbol{S}}\,\widehat{\boldsymbol{T}}$ n'existe pas a priori.

β Transformée de Fourier d'un produit $\boldsymbol{fT}$

On suppose que $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^\infty(\mathbb{R})$. Alors, on sait que $\boldsymbol{S} = \widehat{[\boldsymbol{f}]}$ est à support compact et

$$\widehat{\boldsymbol{fT}} = \boldsymbol{S} * \widehat{\boldsymbol{T}}$$

où le produit de convolution est toujours bien défini puisque $\boldsymbol{S}$ est à support compact.

La généralisation à d'autres cas est extrêmement pénible à écrire en terme généraux, mais, dès que $\boldsymbol{fT}$ et $\widehat{[\boldsymbol{f}]} * \widehat{\boldsymbol{T}}$ existent, cette formule est vérifiée.

b Transformée de Fourier d'une distribution périodique

On dit qu'une distribution $\boldsymbol{T}$ est périodique de période $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}_+^*$ si et seulement si ${}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}$.

La formule **5 a $\boldsymbol{\delta}$**, valable pour les distributions régulières périodiques, se généralise ; on montre qu'il existe $\boldsymbol{S}$ de support compact, telle que

$$\boxed{\boldsymbol{T} = Ш_{\boldsymbol{a}} * \boldsymbol{S}}\ , \tag{90}$$

où on peut imposer, de plus, que le support est de taille $\boldsymbol{a}$.

Démonstration : on peut prendre $\boldsymbol{S_n} = (\boldsymbol{\rho_n} * \mathbb{I}_{[-\frac{1}{n},\boldsymbol{a}+\frac{1}{n}]})\boldsymbol{T}$. et faire la limite quand $\boldsymbol{n} \to \infty$.

On en déduit que toutes les distributions périodiques sont tempérées : on calcule la transformée de Fourier de $\boldsymbol{T}$ en appliquant les formules précédentes,

$$\widehat{\boldsymbol{T}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}} Ш_{\frac{1}{a}}\boldsymbol{s} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}} \sum_{\boldsymbol{p}=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{s}(\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{a}})\boldsymbol{\delta}_{\frac{p}{a}}\ ,$$

où $\widehat{\boldsymbol{S}} = [\boldsymbol{s}]$ et on a utilisé la transformée de Fourier du peigne de Dirac, qui est démontrée au paragraphe suivant.

c Transformée de Fourier du peigne de Dirac

Soit $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$, on a

$$\boxed{\widehat{Ш_{\boldsymbol{a}}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}} Ш_{\frac{1}{a}}}\ . \tag{91}$$

Démonstration : remarquons tout d'abord que, $Ш_{\boldsymbol{a}}$ est périodique, de période $\boldsymbol{a}$, autrement dit, ${}^{\boldsymbol{a}}Ш_{\boldsymbol{a}} = Ш_{\boldsymbol{a}}$.

La transformée de Fourier de cette relation est $\mathbf{e}^{\mathbf{2i}\boldsymbol{\pi a k}}\ \widehat{Ш_{\boldsymbol{a}}} = \widehat{Ш_{\boldsymbol{a}}}$, soit encore $(\mathbf{e}^{\mathbf{2i}\boldsymbol{\pi a k}} - \mathbf{1})\ \widehat{Ш_{\boldsymbol{a}}} = \mathbf{0}$.

Montrons maintenant que $\widehat{\text{Ш}_a}$ est périodique, de période $\frac{1}{a}$. Calculons tout d'abord $e^{2i\pi x/a}\text{Ш}_a$:

$$e^{2i\pi x/a}\text{Ш}_a = \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi x/a}\delta_{pa} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi pa/a}\delta_{pa} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta_{pa} = \text{Ш}_a ,$$

d'où également $(e^{2i\pi x/a} - 1)\text{Ш}_a = 0$. Si l'on calcule la transformée de Fourier de cette relation, on obtient directement $\frac{1}{a}\widehat{\text{Ш}_a} = \widehat{\text{Ш}_a}$.

Si on applique la relation énoncée au c, on en déduit qu'il existe S, de support borné de taille $1/a$, telle que

$$\widehat{\text{Ш}_a} = \text{Ш}_{\frac{1}{a}} * S .$$

On peut même choisir le support de S, on prendra ici $\mathbf{Support}(S) = [0, \frac{1}{a}]$.

La formule $(e^{2i\pi ak} - 1)\widehat{\text{Ш}_a} = 0$ peut s'écrire maintenant $(e^{2i\pi ak} - 1)\text{Ш}_{\frac{1}{a}} * S = 0$. Or, la restriction à $[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}]$ du terme de gauche s'écrit tout simplement $(e^{2i\pi ak} - 1)S$, elle est également nulle (ce n'est pas tout à fait exact, cf. l'examen du 7 septembre 2005, mais le vrai résultat ne change rien à la suite).

Il se trouve que l'on peut décomposer la fonction $(e^{2i\pi ak} - 1) = kf(k)$, où f **ne s'annule pas** sur $[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}]$. On obtient ainsi $kf(k)S = 0$. L'équation $kT = 0$ a pour solution $T = c\delta$, donc, ici on trouve $fS = c\,\delta$. Finalement, $S = c\,\delta/f(0) = d\,\delta$, avec $d = c/f(0)$.

Si on remplace dans l'expression de la transformée de Fourier du peigne, on obtient

$$\widehat{\text{Ш}_a} = d\,\text{Ш}_{\frac{1}{a}} * \delta = d\,\text{Ш}_{\frac{1}{a}} .$$

Il ne reste plus qu'à déterminer la constante d.

La fonction $\varphi(k) = e^{-\pi a^2 k^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ a pour transformée de Fourier $\hat{\varphi}(x) = \frac{1}{a}e^{-\pi x^2/a^2}$ (avec l'inversion des variables $x \leftrightarrow k$). On calcule

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{\text{Ш}_a} | e^{-\pi a^2 k^2} \rangle &= \langle \text{Ш}_a | \frac{1}{a} e^{-\pi x^2/a^2} \rangle \quad \text{mais aussi} \\
&= \langle d\text{Ш}_{\frac{1}{a}} | e^{-\pi a^2 k^2} \rangle \qquad \text{d'où} \\
\frac{1}{a}\sum_{p=-\infty}^{\infty} \langle \delta_{pa} | e^{-\pi x^2/a^2} \rangle &= d \sum_{p=-\infty}^{\infty} \langle \delta_{\frac{p}{a}} | e^{-\pi a^2 k^2} \rangle \\
\Longleftrightarrow \frac{1}{a}\sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{-\pi (pa)^2/a^2} &= d \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{-\pi a^2 (\frac{p}{a})^2} ,
\end{aligned}$$

les deux sommes étant égales, on en déduit $d = 1/a$. CQFD.

d Formule sommatoire de Poisson

Soit $a > 0$, on en déduit la formule remarquable

$$\boxed{\sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi pax} = \frac{1}{a}\sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(x - \frac{p}{a})} . \tag{92}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\widehat{\text{Ш}_a} &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \hat{\delta}_{pa} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi pax} \quad \text{mais aussi} \\
&= \frac{1}{a}\text{Ш}_{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a}\sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(x - \frac{p}{a}) .
\end{aligned}$$

e Théorème d'échantillonnage

Soit $\boldsymbol{S}$ à support compact, et $[\boldsymbol{s}]$ sa transformée de Fourier. On a le théorème suivant : « $\boldsymbol{s}$ *(et donc* $\boldsymbol{S}$*) est déterminée par les coefficients* $\{\boldsymbol{s}(\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{a}}), \boldsymbol{p} \in \mathbb{Z}\}$ *pour tout* $\boldsymbol{a}$ *plus grand que la longueur de* $\mathbf{Support}(\boldsymbol{S})$. »

Dans certaines conditions restrictives, on a, plus précisément,

$$\boxed{\boldsymbol{s}(\boldsymbol{t}) = \sum_{\boldsymbol{p} \in \mathbb{Z}} \boldsymbol{s}(\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{a}})\, \mathbf{e}^{-2\mathbb{i}\pi \boldsymbol{x}_{\mathbf{o}} \boldsymbol{t}} \frac{(-1)^{\boldsymbol{p}}}{\pi} \frac{\sin(\pi \boldsymbol{a} \boldsymbol{t})}{\boldsymbol{a}\boldsymbol{t} - \boldsymbol{p}}} \tag{93}$$

où $\boldsymbol{x}_{\mathbf{o}}$ est le centre de $\mathbf{Support}(\boldsymbol{S})$.

Index des équations

Références

- Pierre Meunier, *Exercices d'algèbre et d'analyse corrigés et commentés : classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques, premiers cycles universitaires*, ed. P.U.F. (1997).
- Michel Coursace, *Cours de mathématiques spéciales*, ed. P.U.F. (2004).
- Jean-Michel Bony, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, ed. Polytechnique (2004).
- Jean-Michel Bony, *Cours d'analyse : Théorie des distributions et analyse de Fourier*, ed. Polytechnique (2001).
- Robert Dalmasso & Patrick Witomski, *Analyse de Fourier et applications : exercices corrigés*, ed. Dunod (2000).
- Claude Gasquet & Patrick Witomski, *Analyse de Fourier et applications*, ed. Dunod (2003).
- Michel Hervé, *Transformation de Fourier et distributions*, ed. P.U.F. Mathématiques (1986).
- François Roddier, *Distributions et transformation de Fourier*, ed. McGraw-Hill (1978), *ibidem* Ediscience (1971).