Problème d'électrostatique : condensateur hémisphérique.

On étudie le condensateur $\mathcal{C}$ créé par les faces intérieures de deux hémisphères creuses, conductrices, de rayon R, en regard, distantes de $d \ll R$, d'épaisseur négligeable.

1. On réalise le système précédent de la manière suivante : on prend une sphère métallique de rayon R et d'épaisseur négligeable, centrée en O; les points de la sphère seront décrits par leurs coordonnées sphériques (R, θ, ϕ), définies par rapport aux axes Ox, Oy, Oz, l'axe Oz désignant la verticale. On enlève la bande sphèrique correspondant à $\theta > \theta_{\max}$, où $\theta_{\max}$ est l'angle limite indiqué sur la figure.

   (a) Montrer que, pour obtenir le condensateur $\mathcal{C}$, il convient de prendre : $\mathrm{tg}(\theta_{\max}) = 2R/d$

   (b) Quelle symétrie vérifie le système ?

2. On maintient l'hémisphère nord à $V_1 = V/2$ et l'hémisphère sud à $V_2 = -V/2$. Leur face interne possède la charge Q_1, respectivement Q_2.

   (a) Montrer que les deux faces intérieurs sont en influence totale et, qu'en particulier on a $Q_1 = -Q_2$.

   (b) Montrer que les calottes centrées autour de l'axe Oz, de demi-angle d'ouverture θ au nord et $\pi - \theta$ au sud sont en correspondance.

   (c) Montrer que les couronnes centrées autour de l'axe Oz, de demi-angles d'ouverture θ et $\theta + d\theta$ au nord et $\pi - \theta$ et $\pi - \theta - d\theta$ au sud sont en correspondance.

3. Nous allons vérifier les résultats suivants :

   Les lignes de champ sont des arcs de cercle, dans la région étudiée, dont le centre de courbure appartient au plan xOz. On se restreindra toujours, par la suite, à celles dont le centre de courbure s'écrit $(x, 0, 0)$ et on les notera $C(x)$.

   Soit le cercle Co, de centre O et de rayon R, compris dans le plan xOz, les surface équipotentielles sont des calottes sphériques passant par le cercle Co et dont le centre de courbure appartient à l'axe Oz. Soit $(0, 0, z)$ les coordonnées du centre de courbure, on note la surface $\Sigma(z)$.

   (a) Vérifier que la solution proposée vérifie bien la symétrie du système initial.

   (b) Montrer que les lignes de champ partent orthogonalement à la sphère.

(c) Soit la ligne de champ $C(x)$ passant par un point de l'hémisphère d'angle θ, calculer x la coordonnée de son centre de courbure en fonction de θ.

(d) En déduire $R_c(x)$ le rayon de courbure de cette ligne de champ.

(e) Calculer $r(z)$ le rayon de courbure de la surface équipotentielle $\Sigma(z)$ (noter que $z < 0$ pour les surfaces situées dans la zone nord).

Le théorème de Pythagore admet une réciproque, qui peut s'énoncer : soit un triangle de côtés de longueurs a, b, c, vérifiant $a^2 + b^2 = c^2$, alors il est rectangle.

(f) En déduire que la ligne de champ $C(x)$ de rayon de courbure $R_c(x)$ coupe la surface équipotentielle $\Sigma(z)$ de rayon de courbure $r(z)$ orthogonalement.

(g) En déduire que la solution proposée pour les lignes de champ et les surfaces équipotentielles est la bonne.

4. Soit $K(x)$ la calotte de demi-angle d'ouverture θ (correspondant à x, fixé) dans l'hémisphère nord; on considère le tube de champ s'appuyant sur cette couronne. Pour z donné, on définit $S(z)$ l'intersection du tube avec la surface équipotentielle $\Sigma(z)$. On va décrire le tube comme l'ensemble des surface $S(z)$, quand z varie.

(a) Quel domaine z doit-il décrire ?

On veut calculer $s(z)$ l'aire de $S(z)$. Soit z fixé, on note α l'angle que fait la normale au bord de $S(z)$ avec l'axe Oz.

(b) Calculer x et z en fonction de $r(z)$, $R_c(x)$ et α.

(c) En déduire $r(z)$ et $R_c(x)$ en fonction de x, z et α.

(d) En déduire $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$ en fonction de $r(z)$, $Rc(x)$, x et z.

(e) Calculer l'aire d'une calotte de demi-angle d'ouverture α.

(f) En déduire $s(z)$.

5. On suppose que x varie légèrement, de x à $x + dx$. On considère le tube creux obtenu par intersection des tubes correspondants. Il s'appuie sur la couronne $dK(x)$, obtenue par intersection des calottes correspondantes. Pour z donné, on définit $dS(z)$ l'intersection du tube creux avec la surface équipotentielle $\Sigma(z)$. On décrit le tube comme l'ensemble des surface $dS(z)$, quand z varie.

(a) Calculer $ds(z)$ l'aire de $dS(z)$ en fonction de $r(z)$, α et $d\alpha$.

(b) Toujours à z donné, calculer $d\alpha$ à partir d'une des relations obtenues au 4) que l'on différentiera par rapport à x.

6. On suppose x fixé et on fait maintenant varier z; on va calculer le champ $E(z)$ en tout point de la ligne de champ $C(x)$ en fonction de sa valeur E_o à son extrémité nord.

   (a) Montrer que E_o ne dépend que de θ, sur l'hémisphère. On le notera $E_o(\theta)$.

   (b) Calculer $E(z)$ en appliquant le théorème de Gauss entre la couronne $dK(x)$ et une surface quelconque du tube $dS(z)$.

7. Grâce au calcul précédent, on va pouvoir calculer la densité surfacique $\sigma(\theta)$ sur l'hémisphère nord.

   (a) Calculer dl l'élément de chemin élémentaire sur une ligne de champ $C(x)$ en fonction de $d\alpha$.

   (b) En différentiant par rapport à z une des relations du 4), exprimer $d\alpha$ en fonction de dz, pour x fixé.

   (c) Calculer la circulation de $E(z)$ le long d'une ligne de champ $C(x)$.

   (d) En déduire la valeur de $E_o(\theta)$.

   (e) En déduire $\sigma(\theta)$.

   On va en déduir la capacité du condensateur.

   (f) Intégrer $\sigma(\theta)$ sur toute l'hémisphère et exprimer Q_1 en fonction de V et R.

   (g) En déduire la capacité du condensateur $\mathcal{C}$.