

LICENCE DE PHYSIQUE :
Parcours Physique et Applications

UNIVERSITÉ PARIS-SUD
ORSAY

CALCUL TENSORIEL

G. ABRAMOVICI

septembre 2010

Table des matières

I	Algèbre	5
A	RAPPELS D'ALGÈBRE LINÉAIRE	5
1	Bases et vecteurs	5
2	Scalars	9
3	Opérateurs	10
B	CAS D'UNE BASE NON ORTHONORMALE	17
1	Métrie	17
2	Bases réciproques	19
3	Composantes covariantes et contravariantes d'un vecteur	23
4	Composantes contravariantes et covariantes d'un tenseur	25
5	Convention d'Einstein	26
C	CHANGEMENTS DE BASE	28
1	Lois de transformation par changement de base	28
2	Application : orthonormalisation de Gram-Schmidt	31
D	TABLEAUX RÉCAPITULATIFS	34
II	Tenseurs	37
A	DÉFINITIONS DES TENSEURS	37
1	Définition opératoire	37
2	Définition intrinsèque	39
B	OPÉRATIONS SUR LES TENSEURS	41
1	Produit tensoriel	41
2	Produit contracté	45
3	Produit scalaire	46
C	SYMÉTRIES	47
1	Tenseurs symétriques et antisymétriques	47
2	Autres symétries des tenseurs	49
3	Produit vectoriel	51
4	Réduction des tenseurs par symétrie	56

Glossaire

voir également certaines définitions dans les tableaux récapitulatifs

\mathbb{R}	ensemble des nombres réels
\mathbb{R}^n	espace des matrices colonnes à coefficients réels
\mathbb{C}	ensemble des nombres complexes
\mathbb{C}^n	espace des matrices colonnes à coefficients complexes
\mathcal{B}	la base canonique
$\underline{\mathcal{B}}$	identification entre quantité vectorielle (à gauche) et matricielle (à droite dans la base \mathcal{B})
$\{\mathbf{0}\}$	espace vectoriel réduit au vecteur nul
\cap	intersection d'espaces
\oplus	addition d'espaces vectoriels (sans intersection)
\mathbb{N}	ensemble des entiers naturels
\mathbb{Z}	ensemble des entiers relatifs
\mathbb{R}_+^*	ensemble des réels strictement positifs
$-$	conjugaison complexe
${}^t A$	transposition matricielle
(\mathbf{u}, \mathbf{v})	produit scalaire ou hermitien en notation classique
$\langle u v\rangle$	produit scalaire ou hermitien en notation de Dirac
$\widehat{\mathbf{u}}\widehat{\mathbf{v}}$	angle entre les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v}
\times	produit vectoriel
\otimes	produit tensoriel
\wedge	produit extérieur
\mathcal{V}	volume (d'un trièdre) ou son aire (en dimension 2)
\mathcal{I}	l'opérateur identité
\mathcal{O}	l'opérateur nul
$\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$	composition des opérateurs \mathcal{A} et \mathcal{B}
AB	produit matriciel des matrices A et B
\mathcal{A}^\dagger	adjoint de l'opérateur \mathcal{A}
A^\dagger	adjoint de la matrice A
$\text{tr}(\mathcal{A})$	trace de l'opérateur \mathcal{A}
$\text{tr}(A)$	trace de la matrice A
$\det(\mathcal{A})$	déterminant de l'opérateur \mathcal{A}
$\det(A)$	déterminant de la matrice A
χ	polynôme caractéristique
\mathcal{A}^{-1}	inverse de l'opérateur \mathcal{A} (au sens de la composition)
A^{-1}	inverse de la matrice A (au sens du produit matriciel)
$\mathcal{P} + \mathcal{Q}$	addition des opérateurs \mathcal{P} et \mathcal{Q} qui commutent

Chapitre I

Algèbre

A RAPPELS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

1 Bases et vecteurs

a Bases orthonormales

Soit \mathcal{E} un espace vectoriel sur \mathbb{R} à trois dimensions, on notera $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ou encore $\mathcal{B} = (|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle)$ une base orthonormale \mathcal{B} , appelée *base canonique*.

En représentation matricielle dans sa propre base \mathcal{B} , on a

$$|e_1\rangle \stackrel{\mathcal{B}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |e_2\rangle \stackrel{\mathcal{B}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |e_3\rangle \stackrel{\mathcal{B}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

on notera $e_{i\mathcal{B}}$ les matrices colonne dans la base \mathcal{B} .

Ces vecteurs sont caractérisés par la propriété suivante :

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \equiv \langle e_i | e_j \rangle = {}^t e_{i\mathcal{B}} e_{j\mathcal{B}} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \equiv \delta_{ij}$$

où t désigne la transposition et le symbole de Kronecker δ permet une écriture formelle.

On peut le vérifier explicitement, par exemple :

$$\langle e_1 | e_2 \rangle = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \langle e_3 | e_3 \rangle = (0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$

b Composantes d'un vecteur

Soit un vecteur $|u\rangle$, on le représente dans la base \mathcal{B} par la matrice colonne $u_{\mathcal{B}} \equiv \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}$. Les coefficients u^i , pour $i = 1, 2, 3$, s'appellent les composantes de $|u\rangle$, il seront **toujours notés avec l'indice en haut** et sont définis par

$$|u\rangle = \sum_{i=1}^3 u^i |e_i\rangle \stackrel{\mathcal{B}}{=} u_{\mathcal{B}}.$$

Dans une base orthogonale, on a $u^i = \langle e_i | u \rangle$.

Démonstration :

$$\langle e_i | u \rangle = \langle e_i | \left(\sum_j u^j |e_j\rangle \right) = \sum_j u^j \underbrace{\langle e_i | e_j \rangle}_{\delta_{ij}} = u^i .$$

Exemple $u^2 = (0 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}$.

c *Bra et ket*

Dans la notation de Dirac, on représente un vecteur \mathbf{u} par le ket $|u\rangle$, qui correspond, matriciellement, à une matrice colonne. Kets et vecteurs sont donc totalement identifiés.

Par contre, un bra n'est pas un vecteur, car il correspond, matriciellement, à une matrice ligne.

On peut faire une bijection parfaite entre bra et ket, car l'un est l'adjoint de l'autre. Matriciellement, l'adjoint A^\dagger d'une matrice A est définie comme la transposée et complexe conjuguée de A , $A^\dagger = {}^t \bar{A}$, où $\bar{}$ représente la conjugaison complexe.

Finalement, on peut écrire $|u\rangle^\dagger = \langle u|$. On représente le bra $\langle u|$ dans la base \mathcal{B} par une matrice ligne, selon

$$\langle u| \stackrel{\mathcal{B}}{\equiv} u_{\mathcal{B}}^\dagger \equiv \left(\begin{matrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{matrix} \right)^\dagger = (\bar{u}^1 \quad \bar{u}^2 \quad \bar{u}^3) ;$$

on remarquera qu'on note la matrice ligne par $u_{\mathcal{B}}^\dagger$ sans introduire d'autre notation.

d *Forme linéaire*

On peut identifier un bra $\langle u|$ à une forme linéaire \mathcal{U} , c'est-à-dire une application de $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$: en effet, à tout vecteur $|x\rangle \in \mathcal{E}$, $|x\rangle \mapsto \mathcal{U}|x\rangle \equiv \langle u|x\rangle \in \mathbb{R}$.

Il faut savoir que la bijection ket \leftrightarrow bra que l'on a établie n'est pas valable en dimension infinie : à tout vecteur $|u\rangle$ est bien associé une forme linéaire $\langle u|$; par contre, la réciproque n'est pas vraie, l'espace des formes linéaires (noté \mathcal{E}^*) est plus grand (en dimension infinie) que \mathcal{E} .

En dimension finie n , par contre, \mathcal{E}^* et \mathcal{E} sont de même dimension, une base de \mathcal{E}^* étant constituée de $(\langle e_1|, \dots, \langle e_n|)$, où on rappelle que

$$\langle e_i| = |e_i\rangle^\dagger \stackrel{\mathcal{B}}{\equiv} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}_i = (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0) .$$

e *Produit scalaire*

On a déjà utilisé plusieurs fois la formule du produit scalaire (on rappelle que l'on travaille dans \mathbb{R}).

On se place dans la base canonique \mathcal{B} orthonormale ; soit $|u\rangle \stackrel{\mathcal{B}}{=} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}$ et $|v\rangle \stackrel{\mathcal{B}}{=} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}$,
le produit scalaire de ces deux vecteurs est donné par :

$$\langle u|v\rangle \equiv (u^1 \quad u^2 \quad u^3) \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = u_{\mathcal{B}}^\dagger v_{\mathcal{B}} = u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3 .$$

Démonstration : On a $\langle u| = \sum_i u^i \langle e_i|$ (en appliquant l'équation (c) où la conjugaison disparaît car on travaille dans \mathbb{R}) et toujours $|v\rangle = \sum_i v^i |e_i\rangle$. D'où

$$\begin{aligned} \langle u|v\rangle &= \left(\sum_i u^i \langle e_i| \right) \left(\sum_j v^j |e_j\rangle \right) \\ &= \sum_{ij} u^i v^j \underbrace{\langle e_i|e_j\rangle}_{\delta_{ij}} \\ &= \sum_i u^i v^i . \end{aligned}$$

f *Produit hermitien*

Tout le cours sur les tenseurs se fera pour des espaces vectoriels réels, car certains résultats du cours se généralisent difficilement au cas complexe.

Il sera pourtant utile de rappeler ici la généralisation du produit scalaire au produit hermitien, dans le cas complexe ; cela servira en ANALYSE COMPLEXE.

Avec la même définition des composantes u^i d'un vecteur $|u\rangle$, dans la base canonique \mathcal{B} orthogonale, on obtient maintenant, d'après (c),

$$|u\rangle = \sum_i u^i |e_i\rangle \iff \langle u| = \sum_i \bar{u}^i \langle e_i| .$$

D'où finalement

$$\begin{aligned} \langle u|v\rangle &= \left(\sum_i \bar{u}^i \langle e_i| \right) \left(\sum_j v^j |e_j\rangle \right) \\ &= \sum_{ij} \bar{u}^i v^j \underbrace{\langle e_i|e_j\rangle}_{\delta_{ij}} \\ &= \sum_i \bar{u}^i v^i . \end{aligned}$$

On a l'égalité fondamentale

$$\boxed{\langle u|v\rangle = \overline{\langle v|u\rangle}} . \quad (1)$$

g *Norme*

Par définition, la norme du vecteur $|u\rangle$ s'écrit, dans une base orthogonale,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\| &= \sqrt{\langle u|u\rangle} \\ &= \sqrt{\sum_i (u^i)^2} . \end{aligned}$$

Bien sûr, dans le cas complexe, on a $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\sum_i \bar{u}^i u^i} = \sqrt{\sum_i |u^i|^2}$.

La linéarité du produit scalaire, que l'on n'a pas rappelée, ou la sesquilinearité¹ éventuel du produit hermitien dans le cas complexe, donne $\|\lambda\mathbf{u}\| = |\lambda| \|\mathbf{u}\|$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\in \mathbb{C}$).

h *Relation entre norme et produit scalaire*

On a, par définition, exprimé la norme en fonction du produit scalaire. Réciproquement, on peut exprimer ce dernier en fonction de la norme. Soient $|u\rangle$ et $|v\rangle$ deux vecteurs, on a :

$$\langle u|v\rangle = \frac{1}{4} (\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2) ; \quad (2)$$

ceci prouve qu'il y a une bijection entre norme et produit scalaire.

i *Géométrie*

On se place ici dans le cas réel. On rappelle que la géométrie est définie par le produit scalaire. En particulier, le cosinus de l'angle entre deux vecteurs $|u\rangle$ et $|v\rangle$ est donné par :

$$\cos(\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}}) = \frac{\langle u|v\rangle}{\|u\| \|v\|} . \quad (3)$$

j *Vecteurs orthogonaux*

De façon cohérente avec la définition de la base canonique, on dit que deux vecteurs $|u\rangle$ et $|v\rangle$ sont orthogonaux si et seulement si $\langle u|v\rangle = 0$.

k *Vecteurs parallèles*

- On rappelle la formule de Cauchy, pour tout couple de vecteurs $|u\rangle$ et $|v\rangle$:

$$|\langle u|v\rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| .$$

Alors, $|u\rangle$ et $|v\rangle$ sont parallèles si et seulement si on a l'égalité, c'est-à-dire

$$|\langle u|v\rangle| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| .$$

- On rappelle la définition formelle du parallélisme :

$$\mathbf{u} \parallel \mathbf{v} \iff \exists(\mu, \nu) \neq (0, 0), \mu \mathbf{u} + \nu \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

qui s'écrit plus simplement, quand $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$,

$$\exists \lambda \neq 0, \quad \mathbf{v} = \lambda \mathbf{u} .$$

- Enfin, spécifiquement à trois dimensions, on a également le critère

$$\mathbf{u} \parallel \mathbf{v} \iff \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

où \times désigne le produit vectoriel.

l *Produit vectoriel*

C'est l'occasion de rappeler la définition du produit vectoriel de deux vecteurs $|u\rangle$ et $|v\rangle$. Dans une base orthonormale, les composantes étant définies comme précédemment, on a

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \stackrel{\mathcal{B}}{=} \begin{pmatrix} u^2 v^3 - u^3 v^2 \\ u^3 v^1 - u^1 v^3 \\ u^1 v^2 - u^2 v^1 \end{pmatrix} .$$

On trouve que ce produit est antisymétrique : $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

1. Rappel : le produit hermitien (\mathbf{u}, \mathbf{v}) vérifie les règles suivantes : $\forall \lambda \in \mathbb{C}, (\lambda \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \bar{\lambda} (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ et $(\mathbf{u}, \lambda \mathbf{v}) = \lambda (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ (on dit qu'il est sesquilinear à gauche).

m *Volume*

Soit \mathcal{B} la base canonique (orthonormée), et \mathcal{B}' une base quelconque, le volume du trièdre formé par les vecteurs $|e'_i\rangle$ de \mathcal{B}' vaut

$$\mathcal{V} = |\det(e'_{1\mathcal{B}} \cdots e'_{n\mathcal{B}})| \quad (4)$$

où on a utilisé les représentations en matrice colonne des vecteurs de base.

À deux dimensions, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = |\det(e'_{1\mathcal{B}} \ e'_{2\mathcal{B}})| &= \left| \begin{pmatrix} e'_{1\mathcal{B}} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e'_{2\mathcal{B}} \\ 0 \end{pmatrix} \right| \\ &= \|e'_1\| \|e'_2\| |\sin(\widehat{e'_1 e'_2})|. \end{aligned}$$

À trois dimensions, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = |\det(e'_{1\mathcal{B}} \ e'_{2\mathcal{B}} \ e'_{3\mathcal{B}})| &= |e'_1 \cdot (e'_2 \times e'_3)| \\ &= |e'_2 \cdot (e'_3 \times e'_1)| \\ &= |e'_3 \cdot (e'_1 \times e'_2)|. \end{aligned}$$

Si la base est orthonormée, on a $\mathcal{V} = 1$.

n *Orientation de l'espace*

On se place ici dans le cas réel.

- Soit \mathcal{B} la base canonique, et \mathcal{B}' une base quelconque, on définit l'orientation de la base \mathcal{B}' (relativement à la base canonique) par le signe du déterminant $\det(e'_{1\mathcal{B}} \cdots e'_{n\mathcal{B}})$. S'il est positif, on dit que la base est orientée positivement, s'il est négatif, on dit qu'elle est orientée négativement.
- À trois dimension, si l'on observe les vecteurs de \mathcal{B}' de façon à former un trièdre aigu (d'angle solide $< 2\pi$), la base est orientée positivement quand les vecteurs tournent selon la règle de la main droite et négativement sinon.

o *Produit tensoriel*

Soit deux vecteurs $|u\rangle$ et $|v\rangle$, alors $|u\rangle\langle v|$ peut être identifié à un opérateur, en écrivant :

$$|x\rangle \mapsto (|u\rangle\langle v|)|x\rangle = (\langle v|x\rangle)|u\rangle \in \mathcal{E};$$

on l'écrira encore $|u\rangle \otimes \langle v|$, et, matriciellement, dans la base \mathcal{B} orthonormale,

$$|u\rangle\langle v| \stackrel{\mathcal{B}}{=} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 & v^2 & v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 v^1 & u^1 v^2 & u^1 v^3 \\ u^2 v^1 & u^2 v^2 & u^2 v^3 \\ u^3 v^1 & u^3 v^2 & u^3 v^3 \end{pmatrix},$$

ce qui fournit la représentation matricielle de cet opérateur.

2 Scalaires

On vient d'étudier deux objets mathématiques différents (produit scalaire et norme) qui possèdent deux propriétés communes :

- Ces objets sont des réels (on exclut a priori les complexes).
- Ces objets sont invariants par changement de base, autrement dit, ils ne dépendent pas d'une représentation dans une base \mathcal{B} particulière (en effet, il serait gênant que la norme d'un vecteur change selon la représentation choisie).

De tels objets sont appelés *scalaires*. Il y a parfois confusion avec les réels, mais cet abus ne sera pas fait dans ce cours, où les scalaires désigneront spécifiquement les objets réels invariants par changement de base.

A contrario, la composante d'un vecteur u^i est aussi un réel, mais elle dépend par définition de la base choisie.

3 Opérateurs

Un opérateur est une application **linéaire** de \mathcal{E} dans \mathcal{E} . L'algèbre des opérateurs est non commutative. De même que l'algèbre des matrices qui les représentent. Bien qu'on se placera dans \mathbb{R} , il est utile de considérer les représentations dans \mathbb{C} , par souci de clarté.

a Représentation matricielle

Soit un opérateur $\mathcal{A} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, $|u\rangle \mapsto \mathcal{A}|u\rangle$.

On définit la matrice A , de composantes A^i_j , par

$$\boxed{\mathcal{A}|e_i\rangle = \sum_j A^j_i |e_j\rangle} \quad (5)$$

où l'on notera systématiquement les indices **sous cette forme diagonale**.

On décompose $|u\rangle$ et $\mathcal{A}|u\rangle$ dans la base canonique \mathcal{B} orthogonale. D'après la linéarité de \mathcal{A} , on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{A}|u\rangle &= \sum_i \left(\sum_j A^i_j u^j \right) |e_i\rangle \\ &\stackrel{\mathcal{B}}{=} \begin{pmatrix} \sum_j A^1_j u^j \\ \sum_j A^2_j u^j \\ \sum_j A^3_j u^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} \equiv A u_{\mathcal{B}} . \end{aligned}$$

Les colonnes de A sont les images des trois vecteurs de base (dans leur propre base). On peut le vérifier sur un exemple :

$$\mathcal{A}|e_1\rangle = A^1_1|e_1\rangle + A^2_1|e_2\rangle + A^3_1|e_3\rangle \iff A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1_1 \\ A^2_1 \\ A^3_1 \end{pmatrix}$$

où l'on observera également l'écriture vectorielle.

On retrouve (5) par :

$$\mathcal{A}|e_i\rangle = \sum_{jk} A^j_k \underbrace{e_i^{\mathcal{B}}]^k}_{\delta^k_i} |e_j\rangle = \sum_j A^j_i |e_j\rangle .$$

où l'on écrira dorénavant les indices de δ en diagonale, comme pour les composantes des opérateurs.

b Formule du sandwich bra-ket

Dans une base orthogonale, les composantes de A sont obtenus par les sandwiches avec les éléments de la base, définis par :

$$A^i_j = \langle e_i | (\mathcal{A}|e_j\rangle) \equiv \langle e_i | \mathcal{A} | e_j \rangle .$$

Contentons-nous de le vérifier sur un exemple :

$$A^1_3 = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} A^1_3 \\ A^2_3 \\ A^3_3 \end{pmatrix} .$$

c *Produit*

La composition des opérateurs $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ correspond au produit matriciel AB (cf. le § **B 2 h** pour la démonstration).

d *Trace*

- Soit un opérateur \mathcal{A} et la matrice A le représentant dans la base \mathcal{B} . On définit la trace de la matrice A , que l'on note $\text{tr}(A)$, par la somme de ses éléments diagonaux :

$$\boxed{\text{tr}(A) = \sum_i A^i_i} . \quad (6)$$

On redémontrera, dans le cadre de ce cours, que la trace est invariante par changement de base. Aussi peut-on définir la trace de l'opérateur \mathcal{A} , et noter $\text{tr}(\mathcal{A})$, la trace de l'une quelconque de ses représentations matricielles.

- La trace vérifie les propriétés suivantes

$$\text{tr}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) = \text{tr}(\mathcal{A}_1) + \text{tr}(\mathcal{A}_2) \quad \text{tr}(\mathcal{A}_1 \circ \mathcal{A}_2) = \text{tr}(\mathcal{A}_2 \circ \mathcal{A}_1)$$
 et ² dans \mathcal{B} , $\text{tr}(A_1 + A_2) = \text{tr}(A_1) + \text{tr}(A_2) \quad \text{tr}(A_1 A_2) = \text{tr}(A_2 A_1)$
 on rappelle que la composition des opérateurs est non commutative, de même que le produit des matrices qui les représentent.
- Quand un opérateur est diagonalisable, la trace est la somme des valeurs propres³.

e *Déterminant*

- Soit un opérateur \mathcal{A} et la matrice A le représentant dans la base \mathcal{B} . On définit le déterminant de la matrice A , que l'on note $\det(A)$, par

$$\boxed{\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} (-1)^{\text{sig}(\sigma)} \prod_i A^i_{\sigma(i)}} . \quad (7)$$

où n est la dimension de l'espace, \mathbb{S}_n l'ensemble des permutations à n éléments et $\text{sig}(\sigma)$ est la signature d'une permutation σ .

- Le déterminant vérifie la propriété suivante : soit les représentations A_1 et A_2 dans la base \mathcal{B} des opérateurs \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 ,

$$\det(A_1 A_2) = \det(A_1) \det(A_2) .$$

- Le déterminant est invariant par changement de base⁴. Aussi on peut définir le déterminant de l'opérateur \mathcal{A} , et noter $\det(\mathcal{A})$, le déterminant de l'une quelconque de ses représentations matricielles.
- La propriété précédente se généralise immédiatement pour les opérateurs :

$$\det(\mathcal{A}_1 \circ \mathcal{A}_2) = \det(\mathcal{A}_1) \det(\mathcal{A}_2) .$$

- Quand ils sont diagonalisables, leur déterminant est le produit des valeurs propres³.

2. Si on pose $A = A_1 A_2$ et $\alpha = (A_2)^{-1}$, on a $A_1 A_2 = A$ et $A_2 A_1 = \alpha^{-1} A \alpha = A'$ où A' est la matrice de \mathcal{A} représentée dans une nouvelle base, cf la suite du cours.

3. Ce résultat se généralise mais cela nécessiterait de définir les valeurs propres dans tous les cas à l'aide de la représentation de Jordan.

4. Démonstration : d'après la propriété précédente, on a $\det(A_1 A_2) = \det(A_2 A_1)$ puisque la multiplication est commutative dans \mathbb{C} . Par suite, en utilisant les mêmes notations que pour la note 2, il vient $\det(A') = \det(A)$.

f *Adjoint*

L'adjoint \mathcal{A}^\dagger est défini par $\langle u|\mathcal{A}^\dagger|v\rangle = \overline{\langle v|\mathcal{A}|u\rangle}$. Dans une base orthogonale, il a pour matrice $A^\dagger \equiv {}^t\overline{A}$, ce qui s'écrit, pour les composantes,

$$\boxed{(A^\dagger)^i_j = \overline{A^j_i}} \quad (8)$$

dans le cas complexe, la conjugaison complexe étant inutile dans le cas réel.

Démonstration : soit $|u\rangle \in \mathcal{E}$, posons $|v\rangle = \mathcal{A}|u\rangle$, on a

$$\begin{aligned} |v\rangle = \mathcal{A}|u\rangle &= \sum_{ij} A^i_j u^j |e_i\rangle \\ &\stackrel{\mathcal{B}}{=} \begin{pmatrix} \sum_j u^j A^1_j \\ \vdots \\ \sum_j u^j A^n_j \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \langle v| = \langle u|\mathcal{A}^\dagger &= \sum_{ij} \overline{u^j} A^{\dagger ij} \langle e_i| \\ &\stackrel{\mathcal{B}}{=} (\sum_j \overline{u^j} A^{\dagger j_1} \quad \dots \quad \sum_j \overline{u^j} A^{\dagger j_n}) \\ \text{mais aussi } &\stackrel{\mathcal{B}}{=} (\overline{v^1} \quad \dots \quad \overline{v^n}) \\ &= (\sum_j \overline{u^j A^1_j} \quad \dots \quad \sum_j \overline{u^j A^n_j}) . \end{aligned}$$

Par identification, on obtient l'égalité (8) annoncée.

On remarque que l'équation (5) s'écrit de façon conjuguée :

$$\langle e_i|\mathcal{A} = \sum_j A^i_j \langle e_j| .$$

g *Décomposition en opérateurs élémentaires*

Les opérateurs $|e_i\rangle \otimes \langle e_j|$ forment une base de $\mathcal{E}^{\mathcal{E}}$, matriciellement, ils s'écrivent :

$$|e_i\rangle \langle e_j| \stackrel{\mathcal{B}}{=} i \begin{pmatrix} & & & j & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} .$$

La décomposition d'un opérateur \mathcal{A} quelconque s'écrit dans une base orthonormale :

$$\mathcal{A} = \sum_{ij} A^i_j |e_i\rangle \langle e_j| .$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
 \text{On sait} \quad \mathcal{A}|e_i\rangle &= \sum_j A^j_i |e_j\rangle \\
 \text{qu'on écrit} &= \sum_{jk} A^j_k \underbrace{\delta^k_i}_{=\langle e_k|e_i\rangle} |e_j\rangle \\
 &= \left(\sum_{jk} A^j_k |e_j\rangle \langle e_k| \right) |e_i\rangle
 \end{aligned}$$

ce qui prouve l'égalité pour tous les vecteurs de base $|e_i\rangle$, et donc, par linéarité, pour tout vecteur, et finalement pour \mathcal{A} lui-même.

h *Valeurs propres et vecteurs propres*

On rappelle que, soit \mathcal{A} un opérateur quelconque, λ est une valeur propre de \mathcal{A} , et $|u_\lambda\rangle$ sont les vecteurs propres associés, si et seulement si

$$\mathcal{A}|u_\lambda\rangle = \lambda|u_\lambda\rangle .$$

L'espace vectoriel engendré par l'ensemble des $|u_\lambda\rangle$, pour une valeur propre λ fixée, est noté \mathcal{E}_λ et appelé espace propre⁵. On a, pour tout couple de valeurs propres (λ, λ') ,

$$\mathcal{E}_\lambda \cap \mathcal{E}_{\lambda'} = \{\mathbf{0}\} \iff \lambda \neq \lambda' .$$

i *Inversibilité*

On rappelle le résultat fondamental, en dimension finie : soit \mathcal{A} , un opérateur, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- \mathcal{A} est inversible
- Son déterminant $\det(\mathcal{A}) \neq 0$.
- 0 n'est pas valeur propre⁶ de \mathcal{A} .

On a les cas particuliers suivants :

- En dimension 2, il est utile de connaître l'expression de A^{-1} , à partir de l'expression de A . Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tel que $\det(A) = ad - bc \neq 0$, on a alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} .$$

- En dimension 1, l'inverse est $(a)^{-1} = (\frac{1}{a})$.
- Pour les dimensions supérieures, il faut dégager systématiquement la structure d'une matrice en blocs de dimensions inférieures; en particulier, si les blocs sont de dimensions 1 ou 2, l'expression de l'inverse s'obtient directement, comme dans l'exemple suivant :

$$\text{soit } A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \quad \text{alors } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} & 0 \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{e} \end{pmatrix} .$$

5. Formellement $\mathbf{0} \in \mathcal{E}_\lambda$, mais il est interdit de chercher un vecteur propre $|u_\lambda\rangle$ nul (on recherche en fait une base de \mathcal{E}_λ).

6. On écrit encore que le noyau $\ker(\mathcal{A}) = \{\mathbf{0}\}$, où on rappelle que $\ker(\mathcal{A}) = \{|u\rangle \text{ tel que } \mathcal{A}|u\rangle = 0\}$.

j *Polynôme caractéristique*

Soit \mathcal{A} un opérateur, son polynôme caractéristique est $\chi(X) = \det(\mathcal{A} - X\mathcal{I})$. Alors, les valeurs propres de \mathcal{A} sont les zéros de χ .

k *Isométrie*

- On appelle isométrie ou opérateur unitaire un opérateur \mathcal{A} qui envoie une base orthonormée $(|e_i\rangle)_{i=1..n}$ sur une base orthonormée $(|e'_i\rangle = \mathcal{A}|e_i\rangle)_{i=1..n}$.
- Les isométries préservent également les angles, c'est-à-dire les produits scalaires ($\langle u|v\rangle \mapsto \langle u'|v'\rangle = \langle u|v\rangle$) et, corrolairement, les normes ($\|\mathbf{u}\| \mapsto \|\mathbf{u}'\| = \|\mathbf{u}\|$). De même les isométries conservent tous les volumes, en particulier le volume \mathcal{V} de la base choisie.
- Les isométries sont toujours inversibles et, dans une base orthogonale, elles sont caractérisés par

$$A^\dagger = A^{-1} .$$

- Toutes les valeurs propres d'une isométrie vérifient $|\lambda| = 1$.
Démonstration : soit $|u\rangle$ un vecteur propre associé à une valeur propre λ , on sait que $\|\mathbf{u}\| = \|\mathcal{A}\mathbf{u}\|$, ce qui peut encore s'écrire $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}'\| = \|\lambda\mathbf{u}\| = |\lambda| \|\mathbf{u}\|$, d'où le résultat, en simplifiant.
- Par conséquence, on a $|\det(\mathcal{A})| = 1$.

l *Isométrie réelle*

- Ce sont les isométries \mathcal{A} dont une représentation A (dans une base particulière qui peut être \neq de la base canonique) est réelle (c'est-à-dire que toutes ses composantes A^i_j sont réelles).
- Il peut exister des représentations complexes d'une isométrie réelle, c'est-à-dire que l'on peut trouver une base \mathcal{B}' telle qu'il y ait des composantes A'^i_j complexes. Il peut même arriver que les valeurs propres soient complexes.

Un exemple qui rassemble ces deux cas est le suivant, à deux dimensions :

Soit \mathcal{A} , dont la matrice dans une base orthonormale \mathcal{B} est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Il existe une base \mathcal{B}' qui diagonalise \mathcal{A} , où cette isométrie s'écrit $A' = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}$.

- Le déterminant est réel, puisqu'il peut être calculé dans une représentation réelle (vous vérifierez que cela marche dans l'exemple précédent). Il vaut donc $\det(\mathcal{A}) = \pm 1$.
- On distingue les isométries directes (ou positives) et les isométries indirectes (ou négatives) selon qu'elles conservent ou inversent l'orientation de la base. Les premières correspondent au cas $\det(\mathcal{A}) = 1$, les secondes au cas $\det(\mathcal{A}) = -1$.

À deux dimensions, les isométries positives sont les rotations et les isométries négatives sont les symétries orthogonales.

À trois dimensions, les isométries positives sont les rotations et les isométries négatives sont les symétries miroir (ce sont les symétries orthogonales par rapport à un plan) et l'inversion $\mathcal{A} = -\mathcal{I}$.

m *Projecteurs*

Les projecteurs \mathcal{P} sont caractérisés par $\mathcal{P} \circ \mathcal{P} = \mathcal{P}$. On a une partition de l'espace $\mathcal{E} = \ker(\mathcal{P}) \oplus \mathfrak{S}(\mathcal{P})$ (où \mathfrak{S} désigne l'image, i.e. $\mathfrak{S}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}(\mathcal{E})$); cette partition est

7. Par définition, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$ si, $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{E}$, $\exists!(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ tel que $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$.

également caractéristique d'un projecteur. $\ker(\mathcal{P})$ est l'axe ou le plan parallèlement auquel on projette. $\Im(\mathcal{P})$ est l'axe ou le plan sur lequel on projette (on dit aussi axe ou plan **de** projection).

Dans toute base \mathcal{B} (y compris non orthonormale), \mathcal{P} est caractérisé par $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$. Par exemple $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Le polynôme minimal est $\mathcal{P}^2 - \mathcal{P}$ (cf. § r), sauf cas particuliers pour $\mathcal{P} = \mathcal{I}$ et $\mathcal{P} = \mathcal{O}$, on en déduit que leurs valeurs propres sont exactement 0 et 1.

Un projecteur orthogonal \mathcal{P} vérifie par définition $\ker(\mathcal{P}) \perp \Im(\mathcal{P})$. On le caractérise également par

$$\mathcal{P}^\dagger = \mathcal{P} .$$

Dans une base \mathcal{B} orthonormale, cela s'écrit $\mathcal{P}^\dagger = \mathcal{P}$. Exemple, $\mathcal{P} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Parmi les opérateurs élémentaires, ceux qui s'écrivent $|e_i\rangle\langle e_i|$ sont toujours des projecteurs orthogonaux. Cela est vrai dès que le vecteur $|e_i\rangle$ est normé, y compris quand la base n'est pas orthogonale, car il ne faut pas perdre de vue que $|e_i\rangle$, déjà normé, peut toujours être complété en une base orthonormale (cf. **C2**).

Vérifions plus simplement que, pour tout $|u\rangle$ de norme $\|u\| = 1$, l'opérateur $\mathcal{P}_{|u\rangle} \equiv |u\rangle\langle u|$ est un projecteur orthogonal :

- $\mathcal{P}_{|u\rangle} \circ \mathcal{P}_{|u\rangle} = (|u\rangle\langle u|)(|u\rangle\langle u|) = |u\rangle \underbrace{\langle u|u\rangle}_{=\|u\|^2=1} \langle u| = |u\rangle\langle u| = \mathcal{P}_{|u\rangle}$;
- $\mathcal{P}_{|u\rangle}^\dagger = (|u\rangle\langle u|)^\dagger = (\langle u|)^\dagger (|u\rangle)^\dagger = |u\rangle\langle u| = \mathcal{P}_{|u\rangle}$ où l'on aura remarqué que la formule $(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})^\dagger = \mathcal{B}^\dagger \circ \mathcal{A}^\dagger$ est vraie en toute circonstance (il faut se placer dans une base orthonormale et utiliser la représentation matricielle pour se convaincre qu'il s'agit d'identités strictement algébriques).

Par contre, le cas d'une base orthonormale se distingue par la propriété décrite à la section suivante :

n Relation de fermeture

On dit que des projecteurs $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$ sont **orthogonaux entre eux** si leurs images sont toutes orthogonales deux à deux, i.e. $\Im(\mathcal{P}_i) \perp \Im(\mathcal{P}_j)$, $\forall i \neq j$.

Cela entraîne notamment la commutation des projecteurs, $\mathcal{P}_i \circ \mathcal{P}_j = \mathcal{P}_j \circ \mathcal{P}_i$, ou encore, dans une base \mathcal{B} quelconque (y compris non orthonormale), $P_i P_j = P_j P_i$.

Si l'union des images forment une partition de l'espace⁸, $\mathcal{E} = \Im(\mathcal{P}_1) \oplus \dots \oplus \Im(\mathcal{P}_k)$, on obtient alors une décomposition de l'identité \mathcal{I} , appelée **relation de fermeture**,

$$\mathcal{I} = \mathcal{P}_1 + \dots + \mathcal{P}_k$$

où l'ordre est bien quelconque puisque ces opérateurs commutent.

En particulier, une base orthonormale est également caractérisée par la relation de fermeture

$$\mathcal{I} = |e_1\rangle\langle e_1| + \dots + |e_n\rangle\langle e_n| .$$

La démonstration la plus élégante et instructive fait intervenir la métrique, et sera étudiée dans le chapitre correspondant.

o Opérateurs nilpotents

Un opérateur \mathcal{A} est nilpotent s'il existe $m \geq 1$ tel que $\mathcal{A}^m = \mathcal{O}$ (où la puissance est à comprendre au sens de la composition).

8. La définition est la généralisation de celle donnée à la note précédente.

Dans toute base \mathcal{B} (y compris non orthonormale), \mathcal{A} est caractérisé par $A^m = 0$. On peut montrer que $m \leq n$ la dimension de l'espace. 0 est valeur propre, car ces opérateurs sont non inversibles et $\ker(\mathcal{A}) \neq \{\mathbf{0}\}$; c'est leur seule valeur propre.

Dans une base \mathcal{B} orthonormale, les opérateurs élémentaires, qui s'écrivent $\mathcal{A}_{ij} = |e_i\rangle\langle e_j|$, sont, quand $i \neq j$, des opérateurs nilpotents; ils vérifient plus précisément $\mathcal{A}_{ij}^2 = \mathcal{O}$.

Démonstration : $\mathcal{A}_{ij} \circ \mathcal{A}_{ij} = (|e_i\rangle\langle e_j|)(|e_i\rangle\langle e_j|) = |e_i\rangle \underbrace{\langle e_j|e_i\rangle}_{=0} \langle e_j| = \mathcal{O}$.

Exemple : $A_{13} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie bien $A_{13}A_{13} = 0$.

p *Opérateurs hermitiens*

Les opérateurs hermitiens sont caractérisés par $\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{A}$. Dans une base orthogonale, ceci s'écrit simplement $A^\dagger = A$.

Une des deux propriétés fondamentales des opérateurs hermitiens est que toutes leurs valeurs propres sont réelles.

Démonstration : soit λ une valeur propre, et $|u\rangle$ un des vecteurs propres associés, on applique l'équation (8) à $|u\rangle$ et \mathcal{A} :

$$\begin{aligned} \overline{\langle u|\mathcal{A}|u\rangle} &= \langle u|\mathcal{A}^\dagger|u\rangle \\ \text{et ici} &= \langle u|\mathcal{A}|u\rangle \end{aligned}$$

mais, $|u\rangle$ étant vecteur propre, on peut encore l'écrire

$$\begin{aligned} \overline{\langle u|\lambda|u\rangle} &= \langle u|\lambda|u\rangle \\ \text{soit encore} \quad \overline{\lambda\langle u|u\rangle} &= \lambda\langle u|u\rangle \\ \iff \quad \overline{\lambda}||u||^2 &= \lambda||u||^2 \\ \text{finalement} \quad \overline{\lambda} &= \lambda. \end{aligned}$$

L'autre propriété est liée à la diagonalisation, que nous allons rappeler maintenant.

q *Opérateurs diagonalisables*

Un opérateur \mathcal{A} est dit diagonalisable si et seulement si il existe une base constituée de ses vecteurs propres. On montre alors que les espaces propres forment une partition de \mathcal{E} , autrement dit :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_{\lambda_p}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les p valeurs propres distinctes de \mathcal{A} .

On peut caractériser un tel opérateur de la façon suivante : il existe une base \mathcal{B}' telle que la représentation de \mathcal{A} dans cette nouvelle base soit la matrice D diagonale. On dit que \mathcal{A} est diagonal (ou diagonalisé) dans la base \mathcal{B}' .

On a les résultats suivants :

- Les isométries sont diagonalisables (toutes leurs valeurs propres vérifient $|\lambda| = 1$).
- Les projecteurs sont diagonalisables.
- Les opérateurs hermitiens sont diagonalisables et **on peut choisir une base \mathcal{B}' orthonormale** pour les diagonaliser.

- Les opérateurs nilpotents sont non diagonalisables (sauf \mathcal{O} , qui est un cas très particulier, puisque c'est aussi un projecteur).
- Deux opérateurs diagonalisables qui commutent sont diagonalisables *simultanément*, c'est-à-dire sur une même base.

r *Polynôme minimal*

Il existe pour tout opérateur \mathcal{A} , un polynôme minimal⁹ $P(X)$ tel que $P(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$ (on convient que le terme constant est implicitement multiplié par \mathcal{I} dans cette dernière équation).

S'il n'en existe pas de plus petit, le cas échéant, $P = \chi$ le polynôme caractéristique. On peut montrer de façon générale que P est toujours un diviseur de χ .

Exemples : le polynôme minimal de \mathcal{O} est X , celui de \mathcal{I} est $X - 1$, celui des autres projecteurs est $X^2 - X$, celui d'un opérateur nilpotent est X^m , celui d'une rotation d'un demi-tour est $X^2 - 1$, d'une rotation d'un tiers de tour $X^3 - 1$, etc.

B CAS D'UNE BASE NON ORTHONORMALE

Comme on l'a souvent fait remarquer, de nombreuses propriétés concernant notamment les représentations matricielles, telles qu'on vient de les rappeler, ne sont valables **que dans une base orthonormale**.

Certaines écritures deviennent plus sophistiquées, dans le cas général, et il faut utiliser en permanence des changements de base ; cependant, quand on se place dans \mathbb{R} uniquement, on découvre une algèbre très commode, qui permet de manier les changements de base.

L'étude de ces changements de base constitue le fonds de ce que l'on appelle calcul tensoriel, dit aussi multi-linéaire.

1 Métrique

a *Définition*

Soit une base $\mathcal{B} = (|e_1\rangle, \dots, |e_n\rangle)$ quelconque, on définit la métrique g par

$$\boxed{g_{ij} = \langle e_i | e_j \rangle} \quad (9)$$

où on ne précise pas que cette représentation est écrite dans la base \mathcal{B} car g **n'est définie que pour une base donnée**, et l'on notera que les indices sont en bas. Quand g est inversible, on dit que la métrique est définie.

b *Produit scalaire*

Le produit scalaire de deux vecteurs $|u\rangle$ et $|v\rangle$, dans une base \mathcal{B} quelconque, s'écrit :

$$\boxed{\langle u | v \rangle = \sum_{ij} u^i g_{ij} v^j} \quad (10)$$

où on rappelle qu'on se restreint ici, par définition, au cas réel.

9. plus petit au sens du plus petit degré possible

Démonstration :

$$\begin{aligned}\langle u|v\rangle &= \left(\sum_i u^i \langle e_i|\right) \left(\sum_j v^j |e_j\rangle\right) \\ &= \sum_{ij} u^i v^j \underbrace{\langle e_i|e_j\rangle}_{=g_{ij}}.\end{aligned}$$

Matriciellement, ce produit s'écrit

$$(u^1 \quad u^2 \quad u^3) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}$$

soit, en plus ramassé, $u_{\mathcal{B}}^\dagger g v_{\mathcal{B}}$.

c *Cas d'une base orthonormale*

Comme on le voit aisément, le cas d'une base orthonormale correspond à $g = I$. En effet, dans ce cas, l'équation (10) s'écrit

$$\langle u|v\rangle = \sum_{ij} u^i g_{ij} v^j = \sum_{ij} u^i \delta_{ij} v^j = \sum_i u^i v^i,$$

comme dans le cas d'une base orthonormale.

Réciproquement, si \mathcal{B} est orthonormale, on a immédiatement

$$g_{ij} \equiv \langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij},$$

ce qui achève la démonstration.

d *Norme*

Pour que $\sqrt{\langle u|u\rangle}$ définisse une vraie norme, il faut que g soit définie (sinon, il existe des vecteurs non nuls de longueur nulle!) et, de plus, que toutes ses valeurs propres soient positives (elles le sont alors strictement puisque g est définie).

Dans ce cas, on est muni d'une métrique euclidienne, et on montre que

$$\langle u|u\rangle > 0 \quad \iff \quad |u\rangle \neq 0.$$

e *Propriétés*

- $g^\dagger = g$.

Démonstration : replaçons-nous momentanément dans \mathbb{C} , la propriété générale $\langle e_j|e_i\rangle = \overline{\langle e_i|e_j\rangle}$ s'écrit exactement $g_{ji} = \overline{g_{ij}}$.

- Soit g , cette métrique est définie positive si et seulement si il existe une matrice β (à valeur dans \mathbb{C}) telle que

$$g = \beta^\dagger \beta,$$

où β est inversible.

Démonstration : dans le sens direct, la démonstration la plus naturelle fait intervenir les changements de base, et sera étudiée ultérieurement.

Dans le sens indirect : soit β inversible, telle que $g = \beta^\dagger \beta$, calculons $\|\mathbf{u}\|$ pour $|u\rangle = \sum_i u^i |e_i\rangle \neq 0$:

$$\begin{aligned}
g = \beta^\dagger \beta &\iff g_{ij} = \sum_k \beta_k^\dagger \beta_j^k \\
&= \sum_k \overline{\beta_i^k} \beta_j^k \\
\text{d'où } \|\mathbf{u}\|^2 &= \sum_{ij} \overline{u^i} g_{ij} u^j \\
&= \sum_{ijk} \overline{u^i} \beta_i^k u^j \beta_j^k \\
&= \sum_k \underbrace{\left| \sum_i u^i \beta_i^k \right|^2}_{= v_{\mathcal{B}}^k \text{ avec } v_{\mathcal{B}} = \beta u_{\mathcal{B}}} \\
&= \|v_{\mathcal{B}}\|^2
\end{aligned}$$

or $v_{\mathcal{B}} \neq 0$, sinon, on aurait $\beta u_{\mathcal{B}} = 0 \iff u_{\mathcal{B}}$ vecteur propre de valeur propre 0 $\iff \beta$ non inversible, absurde.

D'où finalement $\|\mathbf{u}\| \stackrel{\mathcal{B}}{=} \|v_{\mathcal{B}}\| > 0$.

Il faut bien interpréter l'égalité $\|\mathbf{u}\| \stackrel{\mathcal{B}}{=} \|v_{\mathcal{B}}\|$: la norme de \mathbf{u} vecteur $\in \mathcal{E}$, muni de la métrique g , est identique à celle de $v_{\mathcal{B}}$, vecteur colonne $\in \mathbb{C}^n$, muni de la métrique canonique euclidienne et du produit hermitien $u_{\mathcal{B}}^\dagger v_{\mathcal{B}} = \sum_i \overline{u^i} v^i$.

- Le volume de la cellule unitaire définie par les vecteurs $|e_i\rangle$ de la base \mathcal{B} s'écrit¹⁰

$$\boxed{\mathcal{V} = \sqrt{\det(g)}}. \quad (11)$$

Démonstration : elle sera étudiée à la section C2.

2 Bases réciproques

a *Définition*

Soit une base $\mathcal{B} = (|e_1\rangle, \dots, |e_n\rangle)$ quelconque, on définit la base réciproque $\tilde{\mathcal{B}} = (|\epsilon^1\rangle, \dots, |\epsilon^n\rangle)$ par

$$\boxed{\langle \epsilon^i | e_j \rangle = \delta^i_j} \quad (12)$$

(et par conséquent $\langle e_i | \epsilon^j \rangle = \delta^j_i$). Matriciellement, cela s'écrit $(\epsilon_{\mathcal{B}}^i)^\dagger g e_{j\mathcal{B}} = \delta^i_j$, où on rappelle que les vecteurs $|e_i\rangle$ ont une représentation triviale dans leur propre

base \mathcal{B} , par exemple $e_{1\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Chaque vecteur ϵ^i étant connu sur la base \mathcal{B} , il sera facile de prouver l'unicité de la base réciproque (cf. la suite du cours).

10. Attention, ce volume ne peut être défini qu'en référence à une base *orthonormée*. Comme la base canonique \mathcal{B} ne l'est a priori pas, il faut en trouver une, cf. section C2, on la notera ici \mathcal{B}_\perp . On a alors

$$\mathcal{V} = \epsilon \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} e_{1\mathcal{B}_\perp}^i e_{2\mathcal{B}_\perp}^j e_{3\mathcal{B}_\perp}^k.$$

Dans le cas orthonormée, on a $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$, on peut choisir $|\epsilon^i\rangle = |e_i\rangle \forall i$ dans la définition (12), ceci prouve que, dans ce cas, la base directe \mathcal{B} et la base réciproque $\tilde{\mathcal{B}}$ sont égales.

b *Passage entre bases directe et réciproque*

On notera les composantes de l'inverse de la métrique avec les indices en haut, c'est-à-dire $(g^{-1})^{ij}$; par exemple, $g^{-1}g = I$ s'écrit :

$$\sum_k (g^{-1})^{ik} g_{kj} = \delta^i_j .$$

On a

$$\boxed{|\epsilon^i\rangle = \sum_j (g^{-1})^{ij} |e_j\rangle} ; \quad (13)$$

matriciellement, comme $e_{1\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, etc., on obtient

$$\epsilon_{\mathcal{B}}^i = \begin{pmatrix} (g^{-1})^{i1} \\ (g^{-1})^{i2} \\ (g^{-1})^{i3} \end{pmatrix} .$$

On forme des colonnes des vecteurs de base, de sorte que l'équation (13) peut s'écrire, synthétiquement,

$$\begin{pmatrix} |\epsilon^1\rangle \\ |\epsilon^2\rangle \\ |\epsilon^3\rangle \end{pmatrix} = g^{-1} \begin{pmatrix} |e_1\rangle \\ |e_2\rangle \\ |e_3\rangle \end{pmatrix} .$$

Démonstration : il est légitime de partir du résultat, du moment que l'on vérifie bien l'équation (12), et grâce à l'unicité de la base réciproque. On calcule

$$\begin{aligned} \langle e_i | \left(\sum_k (g^{-1})^{jk} |e_k\rangle \right) &= \sum_k \langle e_i | (g^{-1})^{jk} |e_k\rangle \\ &= \sum_k (g^{-1})^{jk} \underbrace{\langle e_i | e_k \rangle}_{=g_{ik}=g_{ki}} \\ &= (g^{-1}g)^j_i = \delta^j_i . \end{aligned}$$

Réciproquement, on a

$$\boxed{|e_i\rangle = \sum_j g_{ij} |\epsilon^j\rangle} ; \quad (14)$$

ce qui se démontre de façon analogue :

$$\begin{aligned} \langle e_i | \left(\sum_k g_{jk} |\epsilon^k\rangle \right) &= \sum_k \langle e_i | g_{jk} |\epsilon^k\rangle \\ &= \sum_k g_{jk} \underbrace{\langle e_i | \epsilon^k \rangle}_{=\delta^k_i} \\ &= g_{ji} = g_{ij} . \end{aligned}$$

c *Volume de la cellule unitaire*

Si on note \mathcal{V} le volume de la cellule unitaire définie par les vecteurs $|e_i\rangle$ de la base directe \mathcal{B} , celui de la cellule unitaire définie par les vecteurs $|\epsilon^i\rangle$ de la base réciproque $\tilde{\mathcal{B}}$ vaut $\tilde{\mathcal{V}} = 1/\mathcal{V}$.

Démonstration : elle est analogue au calcul de \mathcal{V} et sera vue en même temps. Il est toutefois possible de déduire le résultat en écrivant ¹¹ :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{V}} &\equiv \tilde{\epsilon} \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \epsilon_{\mathcal{B}_\perp}^1]^i \epsilon_{\mathcal{B}_\perp}^2]^j \epsilon_{\mathcal{B}_\perp}^3]^k \\
&= \tilde{\epsilon} \sum_{\substack{ijk \\ abc}} \epsilon_{ijk} (g^{-1})^{1a} \underbrace{e_{a\mathcal{B}}]^i}_{\delta_a^i} (g^{-1})^{2b} \underbrace{e_{b\mathcal{B}}]^j}_{\delta_b^j} (g^{-1})^{3c} \underbrace{e_{c\mathcal{B}}]^k}_{\delta_c^k} \\
&= \sum_{abc} (g^{-1})^{1a} (g^{-1})^{2b} (g^{-1})^{3c} \epsilon_{abc} \underbrace{\tilde{\epsilon} \epsilon}_{=1} \mathcal{V} \\
&= \det(g^{-1}) \mathcal{V} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det(g)}}.
\end{aligned}$$

d *Décomposition d'un vecteur*

Les composantes d'un vecteur $|u\rangle$ s'écrivent

$$\boxed{u^i = \langle \epsilon^i | u \rangle}; \tag{15}$$

(encore une fois, on retrouve la formule usuelle dans le cas orthonormale, puisqu'on peut alors identifier $|\epsilon^i\rangle$ avec $|e_i\rangle$).

Démonstration : on a

$$\begin{aligned}
\langle \epsilon^i | u \rangle &= \sum_k \langle e_k | (g^{-1})^{ik} \sum_l u^l |e_l\rangle \\
&= \sum_{kl} (g^{-1})^{ik} \underbrace{\langle e_k | e_l \rangle}_{=g_{kl}} u^l \\
&= \sum_l \underbrace{\sum_k (g^{-1})^{ik} g_{kl}}_{=\delta_l^i} u^l \\
&= u^i.
\end{aligned}$$

e *Décomposition d'un opérateur*

Soit un opérateur \mathcal{A} , on peut le décomposer sous la forme :

$$\boxed{\mathcal{A} = \sum_{ij} A^i_j |e_i\rangle \langle \epsilon^j|} \tag{16}$$

où les composantes sont données par

$$\boxed{A^i_j = \langle \epsilon^i | \mathcal{A} | e_j \rangle}. \tag{17}$$

11. On fait le calcul dans la base orthonormale \mathcal{B}_\perp introduite à la note précédente. $\tilde{\epsilon}$ désignera le signe de $\det(\epsilon_{\mathcal{B}_\perp}^1 \ \epsilon_{\mathcal{B}_\perp}^2 \ \epsilon_{\mathcal{B}_\perp}^3)$ et ϵ celui de $\det(e_{1\mathcal{B}_\perp} \ e_{2\mathcal{B}_\perp} \ e_{3\mathcal{B}_\perp})$. On vérifiera que $\tilde{\epsilon} = \epsilon$.

Démonstration : on va partir de (16) et retrouver la définition (5) des composantes.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}|e_i\rangle &= \sum_{jk} A^j_k |e_j\rangle \underbrace{\langle \epsilon^k | e_i \rangle}_{=\delta^k_i} \\ &= \sum_j A^j_i |e_j\rangle . \end{aligned}$$

En conséquence, on vérifie

$$\begin{aligned} \langle \epsilon^i | \mathcal{A} | e_j \rangle &= \langle \epsilon^i | \left(\sum_{kl} A^k_l |e_k\rangle \langle \epsilon^l | \right) | e_j \rangle \\ &= \sum_{kl} A^k_l \underbrace{\langle \epsilon^i | e_k \rangle}_{\delta^i_k} \underbrace{\langle \epsilon^l | e_j \rangle}_{\delta^l_j} \\ &= A^i_j . \end{aligned}$$

f *Relation de fermeture*

Montrons enfin que la relation de fermeture que l'on écrit avec les vecteurs de base n'est valable que dans le cas d'une base \mathcal{B} orthonormale.

Notons $\mathcal{S} = \sum_i |e_i\rangle \langle e_i|$, et calculons les images des vecteurs de base par \mathcal{S} . On trouve :

$$\mathcal{S}|e_i\rangle = \sum_j |e_j\rangle \langle e_j | e_i \rangle = \sum_j g_{ji} |e_j\rangle \stackrel{\mathcal{B}}{=} \begin{pmatrix} g_{1i} \\ \vdots \\ g_{ni} \end{pmatrix} ,$$

i.e. les représentations matricielles des images des vecteurs de base sont les colonnes $(g_{ij})_{ij=1..n}$. Comme, par ailleurs, les représentations matricielles des vecteurs de base sont les colonnes $(\delta_{ij})_{ij=1..n}$, cela prouve que $\mathcal{S} = \mathcal{I}$ si et seulement si $g = I$.

g *Relation de fermeture généralisée*

Il existe une forme de la relation de fermeture, valable dans n'importe quelle base \mathcal{B} , qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \sum_i |e_i\rangle \langle \epsilon^i | \\ &= \sum_i |\epsilon^i\rangle \langle e_i | \\ &= \sum_{ij} |e_i\rangle (g^{-1})^{ij} \langle e_j | \\ &= \sum_{ij} |\epsilon^i\rangle g_{ij} \langle \epsilon^j | . \end{aligned}$$

Pour démontrer la première égalité, il suffit d'appliquer l'opérateur à droite de l'égalité à un vecteur $|e_i\rangle$:

$$\left(\sum_j |e_j\rangle \langle \epsilon^j | \right) |e_i\rangle = \sum_j |e_j\rangle \underbrace{\langle \epsilon^j | e_i \rangle}_{=\delta^j_i} = |e_i\rangle$$

et, comme elle est vraie pour tout vecteur de base, elle se généralise par linéarité à tout vecteur.

La seconde se démontre de la même façon, mais en appliquant l'opérateur à un vecteur $|\epsilon^i\rangle$.

Les deux dernières relations se démontrent à partir des premières en appliquant (13) ou (14).

h *Isomorphisme de groupe*

La représentation dans une base quelconque \mathcal{B} est un isomorphisme de groupe. Cela signifie que l'application $\mathcal{A} \rightarrow A$, qui, à tout opérateur \mathcal{A} associe sa représentation matricielle A dans \mathcal{B} , est **compatible** avec la composition. On écrit :

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{B} \rightarrow AB$$

et on remarque que la composition des opérateurs correspond au produit matriciel.

Démonstration : soient \mathcal{A} et \mathcal{B} , deux opérateurs, on note C la matrice représentant le produit $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$. Elle a pour composantes

$$\begin{aligned} C^i_j &= \langle \epsilon^i | \mathcal{A} \circ \mathcal{B} | e_j \rangle \\ &= \langle \epsilon^i | \mathcal{A} \left(\sum_k B^k_j | e_k \rangle \right) \\ &= \langle \epsilon^i | \sum_{kl} B^k_j A^l_k | e_l \rangle \\ &= \sum_{kl} B^k_j A^l_k \underbrace{\langle \epsilon^i | e_l \rangle}_{=\delta^i_l} \\ &= \sum_k A^i_k B^k_j \\ &= AB^i_j \end{aligned}$$

et comme c'est vrai $\forall i, j$, on a finalement $C = AB$.

3 Composantes covariantes et contravariantes d'un vecteur

a *Définition*

Les composantes u^i d'un vecteur $|u\rangle$, qui interviennent dans la décomposition du vecteur dans la base directe $(|e_i\rangle)$,

$$\boxed{|u\rangle = \sum_i u^i |e_i\rangle}, \quad (18)$$

sont appelées composantes contravariantes.

Parallèlement, les composantes covariantes de $|u\rangle$ interviennent dans la décomposition du vecteur dans la base $(|\epsilon^i\rangle)$,

$$\boxed{|u\rangle = \sum_i u_i |\epsilon^i\rangle}. \quad (19)$$

On notera bien que les composantes contravariantes seront toujours notées avec un indice en *haut*, tandis que les composantes covariantes seront toujours notées avec un indice en *bas*.

Bien sûr, dans le cas d'une base \mathcal{B} orthonormale, composantes covariantes et contravariantes sont égales, puisque $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$.

b *Changement de base*

La transformation $\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ est celle du changement de base $\mathcal{B} \mapsto \tilde{\mathcal{B}}$, i.e. base directe \rightarrow base réciproque, qui est très spécifique.

Par ailleurs, tout le calcul tensoriel est basé sur l'étude des changements de base généraux, aussi celui-là **ne sera jamais qualifié de changement de base** afin d'éviter toute confusion.

À la place, on dira que «l'on passe des composantes contravariantes aux composantes covariantes».

La transformation des composantes contravariantes (u^i) vers les composantes covariantes (u_i) peut s'écrire directement à l'aide de la métrique :

$$\boxed{u_i = \sum_j g_{ij} u^j} . \quad (20)$$

Démonstration : on a

$$\begin{aligned} \langle e_i | u \rangle &= \langle e_i | \left(\sum_j u^j | e_j \rangle \right) \quad \text{par définition} \\ &= \sum_j u^j \underbrace{\langle e_i | e_j \rangle}_{=g_{ij}} \\ \text{mais aussi} &= \langle e_i | \left(\sum_j u_j | e^j \rangle \right) \\ &= \sum_j u_j \underbrace{\langle e_i | e^j \rangle}_{=\delta_i^j} \\ &= u_i . \end{aligned}$$

Matriciellement, on a

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = g^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

où l'on constate que la relation (20) s'inverse en

$$\boxed{u^i = \sum_j (g^{-1})^{ij} u_j} ; \quad (21)$$

on notera $u_{\tilde{\mathcal{B}}}$ la matrice des composantes covariantes, ce qui nous permet d'écrire les relations matricielles précédentes sous la forme condensée $u_{\tilde{\mathcal{B}}} = g u_{\mathcal{B}}$ et $u_{\mathcal{B}} = g^{-1} u_{\tilde{\mathcal{B}}}$.

c *Produit scalaire*

Le produit scalaire peut s'écrire d'une façon plus compacte :

$$\boxed{\langle u | v \rangle = \sum_i u_i v^i = \sum_i u^i v_i} . \quad (22)$$

Démonstration : on ne démontre que la première égalité, la seconde découle de la relation (1) et n'est vraie que dans le cas réel. On a :

$$\sum_i u_i v^i = \sum_i \left(\sum_j u^j g_{ij} \right) v^i .$$

4 Composantes contravariantes et covariantes d'un tenseur

a *Variance d'un indice*

Comme on le verra plus tard, d'autres objets mathématiques que les vecteurs admettent également des composantes.

Parmi eux, certains sont des tenseurs. Ce qui les caractérise, c'est que chaque indice sur ces composantes est soit covariant, soit contravariant.

Les indices contravariants sont toujours notés en haut, les indices covariants en bas.

b *Ordre d'un tenseur*

Le nombre d'indices des composantes est indépendant de la base choisie pour le représenter. Par exemple, les composantes d'un vecteur ont toujours un indice, celles d'un opérateur toujours deux indices, celle d'un scalaire zéro indice.

On appelle ce nombre l'ordre du tenseur. Donc, les scalaires sont des tenseurs d'ordre 0, les vecteurs d'ordre 1, les opérateurs d'ordre 2, etc.

c *Ascenseur-descenseur*

On peut transformer un indice contravariant en indice covariant et réciproquement à l'aide de transformations analogues à (20) et (21).

Par exemple,

$$A^{ij} = \sum_k (g^{-1})^{ik} A_k^j \quad A_{ij} = \sum_k g_{ik} A^k_j \quad \text{etc.}$$

(mais, encore une fois, on oubliera systématiquement qu'il s'agit d'un changement de base, afin de distinguer clairement ces transformations des changements de base que l'on étudiera ultérieurement).

On dit que l'on descend l'indice dans le premier exemple, et qu'on le monte, dans le second ; de plus, g^{-1} est alors qualifié d'ascenseur (d'indice) et g de descenseur.

d *Réversibilité de la modification de la variance*

On a vu qu'on peut modifier la variance des composantes d'un vecteur $|u\rangle$, et passer des composantes contravariantes u^i aux composantes covariantes u_i .

Ces règles sont heureusement strictement réversibles (ce qui, à défaut de les prouver, montre qu'elles sont cohérentes). En effet, soient U_{\dots}^i les composantes d'un tenseur d'ordre arbitraire, le premier indice étant contravariant, on a :

$$U_{i\dots} = \sum_j g_{ij} U_{\dots}^j \quad \text{et} \quad U_{\dots}^i = \sum_j (g^{-1})^{ij} U_{j\dots}$$

d'où également

$$\begin{aligned}
 U^i_{\dots} &= \sum_j (g^{-1})^{ij} \left(\sum_k g_{jk} U^k_{\dots} \right) \\
 &= \sum_k \underbrace{\sum_j (g^{-1})^{ij} g_{jk}}_{=(g^{-1}g)^i_k = \delta^i_k} U^k_{\dots} \\
 &= U^i_{\dots} \quad \text{ouf!}
 \end{aligned}$$

e *Scalars*

Les scalaires ont un statut assez particulier, puisque, n'ayant aucun indice, il n'y a pas de composantes contra- ou co-variantes à définir. Cependant, ce sont bien des tenseurs, qui jouent d'ailleurs un rôle prépondérant.

f *Métrique inverse*

On a noté les composantes de la métrique inverse avec les indices en haut. On va en comprendre la raison maintenant.

Soit la métrique g , définie donc par ses composantes deux fois covariantes g_{ij} ; on va calculer les composantes deux fois contravariantes de g . Il faut faire deux transformations, une pour monter le premier indice, l'autre le second. On écrit donc :

$$\begin{aligned}
 g^{ij} &= \sum_{kl} \underbrace{(g^{-1})^{ik}}_{\substack{\text{pour monter} \\ \text{le premier}}} \underbrace{(g^{-1})^{jl}}_{\substack{\text{pour monter} \\ \text{le second}}} g_{kl} \\
 &= \sum_{kl} \underbrace{(g^{-1})^{ik} g_{kl}}_{=(g^{-1}g)^i_l = \delta^i_l} (g^{-1})^{jl} \\
 &= (g^{-1})^{ji} = (g^{-1})^{ij}
 \end{aligned}$$

où on utilise également la symétrie de g (qui est réelle!).

Et, surprise, la matrice des composantes contravariantes de g n'est autre que la matrice inverse de g , autrement dit la métrique inverse.

Par paresse, puisqu'il y a une stricte identité, on n'écrira plus jamais le signe inverse $^{-1}$, qui **sera toujours sous-entendu**. Cette convention, quoique pratique, est très **dangereuse** car, d'un point de vue matriciel, g^{ij} est la **matrice inverse** de g et se notera **toujours** g^{-1} .

Ce calcul prouve un résultat supplémentaire : g^{-1} est la métrique définie par la base réciproque $\tilde{\mathcal{B}}$ (on a fait le changement de base global $\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$, puisque tous les indices ont été montés).

5 Convention d'Einstein

a *Propriétés remarquables dans les sommes*

On constate les propriétés suivantes :

- Une chose extrêmement remarquable que l'on constate dans toutes les écritures de ce chapitre est qu'un indice qui est sommé **apparaît toujours une fois covariant, une fois contravariant**.

C'est une propriété d'une très grande richesse, que vous pourrez vérifier systématiquement dans tout le calcul tensoriel **à condition de rester dans une**

métrique générale et de ne pas particulariser les écritures à une métrique donnée (notamment à la métrique orthonormale, pour laquelle cette règle ne fonctionne jamais).

- Une autre propriété remarquable est l'inverse de la première : dès qu'un indice apparaît deux fois **du même côté d'une égalité**, c'est avec deux variances *différentes*, et il est sommé.

D'ailleurs, dans une écriture générale, un indice ne peut apparaître que deux fois au plus du même côté d'une égalité.

- Le pendant de cette dernière propriété est que, si un indice apparaît des deux côtés d'une égalité, c'est avec la même variance, et il ne peut être évidemment sommé¹². Dans ce cas, dans une écriture générale, cet indice n'apparaît qu'une *seule* fois de chaque côté de l'égalité.
- En résumé, dans une écriture générale, soit les indices apparaissent deux fois du même côté d'une égalité, et ils sont sommés, soit ils apparaissent une fois à gauche et une fois à droite, et ils sont fixés.

b *Inutilité du signe \sum*

Ayant constaté l'existence de ces règles, il en découle que le signe \sum est toujours strictement redondant, puisque sa présence peut être déduite de la variance des indices identiques (encore une fois, se méfier toutefois des indices strictement muets entre eux, par exemple, plutôt que $\dots = (\sum_i u^i t_i)(\sum_i v^i t'_i)$ il vaut mieux écrire $\dots = (\sum_i u^i t_i)(\sum_j v^j t'_j)$).

c *Convention d'Einstein*

Partant de ces constatations, la convention d'Einstein consiste à ne jamais écrire de signe \sum .

Cette convention sera appliquée systématiquement dès à présent. Bien qu'elle oblige à une certaine gymnastique, elle possède l'immense avantage de fournir un moyen de vérification des calculs.

En effet, afin de l'appliquer, il faut toujours s'assurer que les indices sont bien placés, une fois en position covariante, une fois en position contravariante.

Par dessus le marché, cette convention offrira des moyens mnémotechniques très efficaces pour faire les changements de base correctement, lorsqu'on en aura besoin.

12. mis à part les indices strictement muets entre eux, mais on peut toujours s'arranger pour que cette règle soit encore respectée, par exemple $\sum_i u^i w_i = \sum_i v^i w_i$ peut toujours s'écrire sans ambiguïté $\sum_i u^i w_i = \sum_j v^j w_j$.

C CHANGEMENTS DE BASE

Le calcul tensoriel consiste, entre autres, à étudier la façon dont les différentes quantités se transforment, quand on fait un changement de base $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$.

On va revisiter l'ensemble des formules de changement de base, certaines vous sont déjà connues mais seront reformulées de façon nouvelle.

\mathcal{B} désignera la base canonique, quelconque, et \mathcal{B}' une autre base, également quelconque.

1 Lois de transformation par changement de base

a *Définition : changement de base directe*

Soit donc $\mathcal{B} = (|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle)$ la base initiale, et $\mathcal{B}' = (|e'_1\rangle, |e'_2\rangle, |e'_3\rangle)$ la base finale, on définira la matrice de changement de base $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$, que l'on notera **toujours** α , par :

$$\boxed{(|e'_1\rangle, |e'_2\rangle, |e'_3\rangle)} = \boxed{(|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle)} \alpha \quad (23)$$

où l'on notera que l'on manipule des lignes formelle (chaque composante est un vecteur) et que la multiplication matricielle **se fait par la gauche**.

La matrice α s'écrit :

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha^1_1 & \alpha^1_2 & \alpha^1_3 \\ \alpha^2_1 & \alpha^2_2 & \alpha^2_3 \\ \alpha^3_1 & \alpha^3_2 & \alpha^3_3 \end{pmatrix}$$

et il est utile de détailler l'équation (23) :

$$\begin{aligned} |e'_1\rangle &= \alpha^1_1 |e_1\rangle + \alpha^1_2 |e_2\rangle + \alpha^1_3 |e_3\rangle \\ |e'_2\rangle &= \alpha^2_1 |e_1\rangle + \alpha^2_2 |e_2\rangle + \alpha^2_3 |e_3\rangle \\ |e'_3\rangle &= \alpha^3_1 |e_1\rangle + \alpha^3_2 |e_2\rangle + \alpha^3_3 |e_3\rangle \end{aligned}$$

ce qui s'écrit plus formellement $\boxed{|e'_i\rangle = \alpha^j_i |e_j\rangle}$.

D'après ces relations, les colonnes de α sont les représentations des vecteurs $|e'_i\rangle$ dans la base \mathcal{B} . Pour calculer α , il suffit d'écrire, dans leur représentation en matrices colonne, les **nouveaux** vecteurs dans la base des **anciens**.

La première relation matricielle peut s'inverser. On notera **toujours** $\beta = \alpha^{-1}$ la matrice du changement inverse $\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}$, et elle s'écrit

$$\boxed{(|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle)} = \boxed{(|e'_1\rangle, |e'_2\rangle, |e'_3\rangle)} \beta \quad (24)$$

On peut la détailler :

$$\begin{aligned} |e_1\rangle &= \beta^1_1 |e'_1\rangle + \beta^1_2 |e'_2\rangle + \beta^1_3 |e'_3\rangle \\ |e_2\rangle &= \beta^2_1 |e'_1\rangle + \beta^2_2 |e'_2\rangle + \beta^2_3 |e'_3\rangle \\ |e_3\rangle &= \beta^3_1 |e'_1\rangle + \beta^3_2 |e'_2\rangle + \beta^3_3 |e'_3\rangle \end{aligned}$$

ce qui s'écrit plus formellement $\boxed{|e_i\rangle = \beta^j_i |e'_j\rangle}$.

D'après ces relations, les colonnes de β sont les représentations des vecteurs $|e_i\rangle$ dans la base \mathcal{B}' . Pour calculer β , il suffit d'écrire, dans leur représentation en matrices colonne, les **anciens** vecteurs dans la base des **nouveaux**.

b *Transformation de la base réciproque*

On adopte l'ensemble des notations du cours déjà introduites, notamment pour la base réciproque.

La base réciproque $\tilde{\mathcal{B}}$ devient, sous le changement de base α , $\tilde{\mathcal{B}}'$, donnée par

$$\boxed{(|\epsilon^{1'}\rangle, |\epsilon^{2'}\rangle, |\epsilon^{3'}\rangle)} = (|\epsilon^1\rangle, |\epsilon^2\rangle, |\epsilon^3\rangle) \beta^\dagger. \quad (25)$$

On peut le récrire formellement $|\epsilon^{i'}\rangle = \sum_j (\beta^\dagger)^j_i |\epsilon^j\rangle = \overline{\beta^i_j} |\epsilon^j\rangle$.

Démonstration : on vérifie la relation (12) dans la base $\tilde{\mathcal{B}}'$, en la supposant vraie dans \mathcal{B} ,

$$\langle \epsilon^{i'} | \epsilon^{j'} \rangle = \left(\beta^i_k \langle \epsilon^k | \right) \left(\alpha^l_j | e_l \rangle \right) = \beta^i_k \alpha^l_j \underbrace{\langle \epsilon^k | e_l \rangle}_{=\delta^k_l} = (\beta \alpha)^i_j = \delta^i_j.$$

Comme on se place dans \mathbb{R} , on peut récrire ce changement de base formellement

$$\boxed{|\epsilon^{i'}\rangle = \beta^i_j |\epsilon^j\rangle}, \text{ ou encore}$$

$$\begin{pmatrix} |\epsilon^{1'}\rangle \\ |\epsilon^{2'}\rangle \\ |\epsilon^{3'}\rangle \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} |\epsilon^1\rangle \\ |\epsilon^2\rangle \\ |\epsilon^3\rangle \end{pmatrix}$$

où l'on manipule des colonnes formelles de vecteurs, et le produit matriciel est à droite.

c *Transformation des composantes contravariantes d'un vecteur*

Soit $|u\rangle$ un vecteur, on peut décomposer ce vecteur dans l'ancienne base

$$|u\rangle = u^1 |e_1\rangle + u^2 |e_2\rangle + u^3 |e_3\rangle \stackrel{\mathcal{B}}{=} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} \equiv u_{\mathcal{B}}$$

ou dans la nouvelle

$$|u\rangle = u^{1'} |e'_1\rangle + u^{2'} |e'_2\rangle + u^{3'} |e'_3\rangle \stackrel{\mathcal{B}'}{=} \begin{pmatrix} u^{1'} \\ u^{2'} \\ u^{3'} \end{pmatrix} \equiv u_{\mathcal{B}'}$$

Changer de base consiste à passer des anciennes composantes u^i aux nouvelles composantes $u^{i'}$. Le vecteur **ne change pas**, seulement sa représentation.

On insère (24) dans la décomposition dans la base \mathcal{B} :

$$\begin{aligned} |u\rangle &= u^1 (\beta^i_1 |e'_i\rangle) + u^2 (\beta^i_2 |e'_i\rangle) + u^3 (\beta^i_3 |e'_i\rangle) \\ &= |e'_i\rangle (u^1 \beta^i_1 + u^2 \beta^i_2 + u^3 \beta^i_3) \end{aligned}$$

et, en identifiant avec la décomposition obtenue directement dans \mathcal{B}' ,

$$\boxed{u^{i'}} = \beta^i_1 u^1 + \beta^i_2 u^2 + \beta^i_3 u^3 \quad \overline{=} \overline{\beta^i_j u^j}. \quad (26)$$

Matriciellement, cette formule s'écrit $\boxed{u_{\mathcal{B}'} = \beta u_{\mathcal{B}}}$, où l'on précise bien qu'il s'agit du même vecteur $|u\rangle$ exprimé dans la base \mathcal{B}' (cette précision sera nécessaire ultérieurement). Elle peut s'inverser directement en $\boxed{u_{\mathcal{B}} = \alpha u_{\mathcal{B}'}}$, et on retrouverait cette dernière en procédant comme pour (26) :

$$u^i = \alpha^i_j u^{j'}. \quad (27)$$

d *Transformation des composantes covariantes des vecteurs*

On a la loi suivante :

$$\boxed{u'_i = \alpha^j_i u_j} \quad (28)$$

où la conjugaison complexe est absente parce que l'on travaille dans \mathbb{R} . Cela se voit plus clairement dans l'expression matricielle correspondante $\boxed{u_{\tilde{\mathcal{B}}}' = \alpha^\dagger u_{\tilde{\mathcal{B}}}}$, où on rappelle que $u_{\tilde{\mathcal{B}}}$ est la représentation matricielle du vecteur $|u\rangle$ dans la base réciproque $\tilde{\mathcal{B}}$.

Démonstration : supposons le résultat, et recalculons le produit scalaire dans la nouvelle base, à l'aide de la formule (22); soit $|u\rangle$ et $|v\rangle$ deux vecteurs, on retrouve la conservation du produit scalaire, par changement de base :

$$\langle u|v\rangle = u'_i v^{i'} = (\alpha^j_i u_j)(\beta^i_k v^k) = u_j (\alpha^j_i \beta^i_k) v^k = u_j \delta^j_k v^k = u_j v^j .$$

Finalement, comme cette formule est vraie pour tous vecteurs $|u\rangle$ et $|v\rangle$, on en déduit le résultat.

e *Transformation des matrices représentant un opérateur*

Il s'agit d'étudier la transformation des composantes standards d'un opérateur \mathcal{A} . Ce sont les composantes mixtes, dont la matrice $A = (A^i_j)$ est la représentation de l'opérateur \mathcal{A} .

Soit le changement de base $\alpha, \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$, on a :

$$\boxed{A' = \beta A \alpha} \quad (29)$$

où A' est la matrice de \mathcal{A} dans \mathcal{B}' .

Démonstration : soit $|u\rangle$ un vecteur quelconque, et $|v\rangle = A|u\rangle$, on décompose les vecteurs dans \mathcal{B} et \mathcal{B}' :

$$\begin{aligned} |u\rangle &= u^i |e_i\rangle = u^{i'} |e'_i\rangle & |v\rangle &= v^i |e_i\rangle = v^{i'} |e'_i\rangle \\ \text{avec } u^{i'} &= \beta^i_j u^j & v^{i'} &= \beta^i_j v^j \end{aligned}$$

et on a :

$$v^i = A^i_j u^j \quad v^{i'} = A^{i'}_j u^{j'}$$

d'où

$$\begin{aligned} v^{i'} &= A^{i'}_j u^{j'} \\ \beta^i_j v^j &= A^{i'}_j \beta^j_k u^k \\ \beta v_{\mathcal{B}} &= A' \beta u_{\mathcal{B}} \\ v_{\mathcal{B}} &= \alpha A' \beta u_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

mais on a aussi

$$v_{\mathcal{B}} = A u_{\mathcal{B}}$$

comme c'est vrai $\forall |u\rangle$, le résultat s'obtient en identifiant les deux dernières égalités.

Remarquez, quand on diagonalise un opérateur par le changement de base α , D étant la représentation diagonale, elle s'écrit évidemment $D = A'$, ce qui donne finalement la décomposition traditionnelle :

$$A = \alpha D \beta .$$

f *Transformation des autres composantes d'un opérateur*

Pour les autres composantes d'un opérateur \mathcal{A} , on a les lois de transformation

$$\begin{aligned} A'_{ij} &= \alpha^k_i A_{kl} \alpha^l_j & A^{i'}_j &= \beta^i_k A^k_l \alpha^l_j \\ A^{ij'} &= \beta^i_k A^{kl} \beta^j_l & A_i^{j'} &= \alpha^k_i A_k^l \beta^j_l \end{aligned}$$

où j'ai redonné la loi du § précédent sous forme détaillée. On pourrait écrire ces formules sous forme matricielle, mais cela nécessiterait d'introduire les matrices des représentations non standards et conduirait inutilement à alourdir les notations. On pourra cependant étudier l'écriture matricielle correspondant aux formes quadratiques, qui sont strictement analogues.

Démonstration : elle est élémentaire, il suffit de remplacer chaque composante par sa définition, $A_{ij} = g_{ik}A^k_j$, $A^{ij} = A^i_k g^{kj}$, $A_i^j = g_{ik}A^k_l g^{lj}$, et d'utiliser les lois de transformation de chaque matrice.

La transformation de g et de g^{-1} n'étant pas encore connues, on ne fera pas ce calcul ici, qui n'entraîne aucune difficultés (un exemple sera fait en Travaux Dirigés).

g Transformation d'une forme quadratique

Une forme bilinéaire correspond à une métrique g ; on se restreindra en pratique aux métriques définies positives (correspondant aux formes quadratiques), mais le résultat par un changement de base est valide dans tous les cas.

Soit donc un changement de base α , g se transforme selon la loi

$$\boxed{g' = \alpha^\dagger g \alpha} . \quad (30)$$

Démonstration : soient deux vecteurs $|u\rangle$ et $|v\rangle$, le produit scalaire propre à la métrique g s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle u|v\rangle &= u^\dagger_{\mathcal{B}} g v_{\mathcal{B}} \xrightarrow{\alpha} u^\dagger_{\mathcal{B}'} g' v_{\mathcal{B}'} = u^{i'} g'_{ij} v^{j'} \\ &= \beta^i_k u^k g'_{ij} \beta^j_l v^l \\ &= u^\dagger_{\mathcal{B}} \beta^\dagger g' \beta v_{\mathcal{B}} \\ \text{et par conservation} &= u^\dagger_{\mathcal{B}} g v_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

d'où, comme c'est vrai pour tout $|u\rangle$ et $|v\rangle$, $\beta^\dagger g' \beta = g$, soit le résultat annoncé. En prenant l'inverse de la relation (30), on trouve directement la transformation d'une métrique inverse g^{-1} ,

$$\boxed{g^{-1'} = \beta g^{-1} \beta^\dagger} .$$

Ces deux transformations s'écrivent, en composantes,

$$\boxed{g'_{ij} = \alpha^k_i g_{kl} \alpha^l_j} \quad \boxed{g^{i'j'} = \beta^i_k g^{kl} \beta^j_l} ,$$

qui sont formellement les mêmes formules que celles trouvées pour les opérateurs.

2 Application : orthonormalisation de Gram-Schmidt

Les lois que l'on vient d'obtenir sont à la base du calcul tensoriel. Avant de construire la théorie complète des tenseurs, je voudrais étudier les applications qui découlent d'un théorème fondamental : le processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Il faut garder en tête une idée fondatrice : la métrique canonique g , associée à la base canonique \mathcal{B} , n'est pas forcément orthonormale (si elle l'était, ce cours n'aurait aucun intérêt) : par exemple, la base naturelle, pour l'étude d'un cristal, n'est orthonormale que pour un nombre très restreint de symétries du cristal.

Pourtant, on peut toujours trouver une base orthonormale, qui sous-tendra alors la base canonique, comme si elle l'avait précédée.

L'existence de cette base permet la démonstration élégante de nombreux résultats, dont nous avons reporté la preuve.

a *Théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt*

Soit une base quelconque $\mathcal{B} = (|e_i\rangle)_{i=1..n}$, alors, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}' = (|e'_i\rangle)_{i=1..n}$. Si \mathcal{B} est simplement normée, on peut toujours choisir $|e'_1\rangle = |e_1\rangle$ (où $|e_1\rangle$ peut être en fait choisi de façon arbitraire, parmi les vecteurs de la base \mathcal{B}).

On notera, comme toujours, α le changement de base $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$.

On ne démontrera pas ce théorème, qui est du programme des années précédentes, et se trouve dans tous les bons manuels.

b *Expression de la métrique*

Soit g la métrique définie dans la base canonique, $g_{ij} = \langle e_i | e_j \rangle$; soient $|u\rangle$ et $|v\rangle$ deux vecteurs. Dans la base \mathcal{B}' , la métrique est triviale, et le produit scalaire peut donc s'exprimer simplement en fonction des composantes $u^{i'}$ et $v^{i'}$:

$$\begin{aligned} \langle u | v \rangle &= \sum_i u^{i'} v^{i'} \\ &= u_{\mathcal{B}'}^\dagger v_{\mathcal{B}'} \\ &= u_{\mathcal{B}}^\dagger \beta^\dagger \beta v_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

où on a utilisé (26).

Mais, comme par ailleurs, le produit scalaire s'écrit

$$\langle u | v \rangle = u^i g_{ij} v^j = u_{\mathcal{B}}^\dagger g v_{\mathcal{B}} ;$$

par identification, on en déduit la formule

$$g = \beta^\dagger \beta$$

qui avait été annoncé dans la première partie.

c *Caractérisation d'une métrique définie positive*

À partir de l'expression $g = \beta^\dagger \beta$, on en déduit la caractérisation suivante d'une métrique définie positive :

Théorème 1 *g est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont strictement positives.*

Supposons ceci vrai, g étant réelle symétrique, elle est hermitienne, donc diagonalisable. L'existence de β se prouve dans la base qui diagonalise g ; on prend

$$\beta = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_p} \end{pmatrix}.$$

Si $g = \beta^\dagger \beta$, soit u un vecteur propre¹³ et λ sa valeur propre associée, on a

$$\begin{aligned} u^\dagger g u &= u^\dagger \lambda u = \lambda \|u\|^2 \quad \text{mais aussi} \\ &= u^\dagger \beta^\dagger \beta u = \|\beta u\|^2 > 0 \end{aligned}$$

13. On travaille dans \mathbb{R}^p où les vecteurs **sont** les matrices colonne.

donc $\lambda = \|\beta u\|^2/\|u\|^2 > 0$. CQFD.

d *Expression des vecteurs de la base directe*

Quand on l'exprime dans la base orthonormale, la composante j du vecteur $|e_i\rangle$ s'écrit

$$e_{i\mathcal{B}'}^j = \beta_i^j.$$

où il s'agit bien des nouvelles composantes du même vecteur $|e_i\rangle$.

Démonstration : la définition du changement de base implique, d'après (24), $|e_i\rangle = \beta_i^j |e'_j\rangle$; comme, puisque c'est une base orthonormée, on a $e_{j\mathcal{B}'}^i = \delta_j^i$, on obtient bien

$$e_{i\mathcal{B}'}^j = \beta_i^k e_{k\mathcal{B}'}^j = \beta_i^k \delta_k^j = \beta_i^j.$$

e *Expression des vecteurs de la base réciproque*

La formule (25) peut être inversée, ce qui s'écrit ici

$$|\epsilon^i\rangle = \alpha_j^i |\epsilon^{j'}\rangle = \sum_j \alpha_j^i |e'_j\rangle$$

où on utilise le fait que la base \mathcal{B}' est orthonormale et vérifie donc $|\epsilon^{i'}\rangle = |e'_i\rangle$.

De façon analogue au calcul fait pour les vecteurs de la base directe, on en déduit que la composante j du vecteur $|\epsilon^i\rangle$ dans la base orthonormée s'écrit :

$$\epsilon_{\mathcal{B}'}^i{}^j = \alpha_j^i;$$

toutefois, il est important de pouvoir redémontrer directement ce résultat. Notons donc provisoirement $\tilde{\alpha}_j^i$ la composante, la formule (12) s'écrit dans la base orthonormée (où la métrique est triviale) :

$$\begin{aligned} \langle \epsilon^i | e_j \rangle = \delta_j^i &\iff \sum_k \epsilon_{\mathcal{B}'}^i{}^k e_{j\mathcal{B}'}^k = \delta_j^i \\ &\iff \tilde{\alpha}_k^i \beta_j^k = \delta_j^i \\ &\iff \tilde{\alpha} \beta = I \end{aligned}$$

ce qui implique $\tilde{\alpha} = \beta^{-1} = \alpha$.

Ceci prouve enfin l'unicité de la base réciproque.

f *Volume de la cellule directe*

D'après la formule (4), on peut écrire¹⁴

$$\mathcal{V} = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} e_{1\mathcal{B}_\perp}^i e_{2\mathcal{B}_\perp}^j e_{3\mathcal{B}_\perp}^k;$$

comme \mathcal{B}' est orthonormée, on choisit simplement $\mathcal{B}_\perp = \mathcal{B}'$ et calculer le volume \mathcal{V} formé par les vecteurs de la base \mathcal{B} , dans cette base \mathcal{B}' . On obtient

$$\mathcal{V} = |\det((\beta_{i_1}^1) \cdots (\beta_{i_n}^n)_{i=1..n})| = |\det(\beta)|$$

or, comme $g = \beta^\dagger \beta$, on a $\det(g) = \det(\beta)^2$, d'où finalement la formule (11).

g *Volume de la cellule réciproque*

Un calcul analogue s'applique à la cellule définie par les vecteurs $|\epsilon^i\rangle$. Comme leurs composantes font intervenir, cette fois-ci, la matrice α , on obtient alors

$$\tilde{\mathcal{V}} = |\det(\alpha)|$$

et, comme $\det(\alpha) = 1/\det(\beta)$, on retrouve bien $\tilde{\mathcal{V}} = 1/\mathcal{V}$.

14. Il y a une subtilité, puisqu'en fin de compte, \mathcal{B} et \mathcal{B}' échangent leur rôle par rapport à la formule (4).

D TABLEAUX RÉCAPITULATIFS

TABLE I – Résultats vrais en toute base

objet	notation
espace vectoriel	\mathcal{E}
vecteurs	$\mathbf{v} = v\rangle \stackrel{\mathcal{B}}{=} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \equiv v_{\mathcal{B}}$
composantes base canonique	u^i (à trois dimension, il y a 3 composantes) $(e_i\rangle)_{i=1..n}$
espace dual	\mathcal{E}^*
forme linéaire	$\varphi_u = \langle u \stackrel{\mathcal{B}}{=} (\overline{u^1} \quad \overline{u^2} \quad \overline{u^3}) \equiv u_{\mathcal{B}}^\dagger$
norme et produit scalaire produit hermitien	$\ \mathbf{u}\ = \sqrt{\langle u u\rangle}$ $\langle v u\rangle = \langle u v\rangle$
espace des opérateurs	$\mathcal{E} \times \mathcal{E}^*$
opérateur	$\mathcal{A} \stackrel{\mathcal{B}}{=} A \equiv (A^i_j)_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} = ((\mathcal{A}e_1)_{\mathcal{B}} (\mathcal{A}e_2)_{\mathcal{B}} \cdots (\mathcal{A}e_n)_{\mathcal{B}})$
composantes d'un opérateur sandwich	$\mathcal{A} e_i\rangle \equiv \sum_j A^j_i e_j\rangle$ $\langle u \mathcal{A} v\rangle \equiv \langle u \mathcal{A}\mathbf{v}\rangle$
inégalité de cauchy-Schwarz ¹⁵ angle	$ \langle u v\rangle \leq \ \mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ $ $\cos(\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}}) = \frac{\langle u v\rangle}{\ \mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ }$
orthogonalité	$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \iff \langle u v\rangle = 0$
parallélisme (à trois dimension)	$\mathbf{u} \parallel \mathbf{v} \iff \langle u v\rangle = \ \mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ $ $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$
produit vectoriel produit mixte volume à 3 dimensions	$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \det(u_{\mathcal{B}} v_{\mathcal{B}} w_{\mathcal{B}})$ $\mathcal{V} = \det(u_{\mathcal{B}} v_{\mathcal{B}} w_{\mathcal{B}})$ pour \mathcal{B} orthonormale
produit tensoriel (de vecteurs)	$ u\rangle\langle v $ agit sur $ a\rangle$ selon $(u\rangle\langle v) a\rangle \equiv u\rangle(\langle v a\rangle)$.
Inversibilité vecteur propre et valeur propre ¹⁶	\mathcal{A} inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ $\mathcal{A} u_{\lambda\mu}\rangle = \lambda u_{\lambda\mu}\rangle$
adjoint d'un opérateur	$\langle e_i \mathcal{A}^\dagger e_j\rangle = \overline{\langle e_j \mathcal{A} e_i\rangle}$

TABLE II – Nouveaux objets

objet	définition
$g, g_{ij} = g_{ji}$	$\langle e_i e_j\rangle$
$ \epsilon^i\rangle$	$\langle \epsilon^i e_j\rangle = \delta^i_j$
$\mathcal{V} = 1/\tilde{\mathcal{V}}$	$\sqrt{\det(g)} = 1/\sqrt{\det(g^{-1})}$

15. liée à l'inégalité triangulaire $|\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|| \leq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

16. μ dégénérescence éventuelle

TABLE III – Rappels sur les opérateurs

nom	propriétés
projecteur	\mathcal{P} projecteur $\iff \mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ $\iff P^2 = P$
projecteur orthogonal	\mathcal{P} (projecteur donné) est $\perp \iff \mathcal{P}^\dagger = \mathcal{P}$ $\iff P^\dagger = P$ dans une base \perp
valeurs propres d'un projecteur	il a exactement deux valeurs propres 0 et 1 (sauf $\mathcal{P} = \mathcal{O}$ et $\mathcal{P} = \mathcal{I}$)
opérateurs nilpotents	\mathcal{N} nilpotent ssi $\exists p \in \mathbb{N} \mathcal{N}^p = \mathcal{O}$ $\iff N^p = 0$
valeurs propres d'un nilpotent	0 est sa seule valeur propre
opérateurs hermitiens	$\mathcal{H}^\dagger = \mathcal{H}$ $\iff H^\dagger = H$ dans une base \perp
valeurs propres d'un hermitien	ses valeurs propres sont réelles
Isométrie	$\mathcal{S}^{-1} = \mathcal{S}^\dagger \iff \forall u\rangle \in \mathcal{E} \ \mathcal{A}\mathbf{u}\ = \ \mathbf{u}\ $ $\iff \forall u\rangle, v\rangle \in \mathcal{E} \ \langle \mathcal{A}\mathbf{u} \mathcal{A}\mathbf{v} \rangle = \langle u v \rangle$
valeurs propres d'une isométrie	ses valeurs propres vérifient $ \lambda = 1$
opérateurs diagonalisables	les hermitiens (et dans une base \perp) les isométries les projecteurs
opérateurs non diagonalisables	les nilpotents (sauf \mathcal{O})
opérateurs simultanément diagonalisables ¹⁷	\mathcal{A} et \mathcal{B} sont diagonalisables et $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] \equiv \mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{O}$

TABLE IV – Résultats différents en base orthonormale et en base quelconque

formule base \perp	formule générale
$\langle u v \rangle = \sum_i u^i v^i$	$\langle u v \rangle = u^i g_{ij} v^j = u_i v^i = u^i v_i$
$u^i = \langle e_i u \rangle$	$u^i = \langle \epsilon^i u \rangle$
$A^i_j = \langle e_i \mathcal{A} e_j \rangle$	$A^i_j = \langle \epsilon^i \mathcal{A} e_j \rangle$
$A^{\dagger i}_j = \overline{A^j_i} \iff A^\dagger = {}^t \overline{A}$	$A^\dagger = g^{-1} {}^t \overline{A} g$
$\mathcal{I} = \sum_i e_i\rangle \langle e_i $	$\mathcal{I} = \epsilon^i\rangle \langle e_i = e_i\rangle \langle \epsilon^i $
$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})^i \Big _{i=1..3} \stackrel{\mathcal{B}}{=} \begin{pmatrix} u^2 v^3 - u^3 v^2 \\ u^3 v^1 - u^1 v^3 \\ u^1 v^2 - u^2 v^1 \end{pmatrix}$	$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})^i \Big _{i=1..3} \stackrel{\mathcal{B}}{=} \mathcal{V} \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} \stackrel{\tilde{\mathcal{B}}}{=} \tilde{\mathcal{V}} \begin{pmatrix} u^2 v^3 - u^3 v^2 \\ u^3 v^1 - u^1 v^3 \\ u^1 v^2 - u^2 v^1 \end{pmatrix}$
$ u\rangle \langle v \xrightarrow{\mathcal{B} \times \mathcal{B}} u_{\mathcal{B}} v_{\mathcal{B}}^\dagger = (u^i v^j)_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$	$ u\rangle \langle v \xrightarrow{\mathcal{B} \times \tilde{\mathcal{B}}} u_{\mathcal{B}} v_{\tilde{\mathcal{B}}}^\dagger = (u^i v_j)_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$
$(\langle e_i)_{i=1..n}$ base canonique de \mathcal{E}^*	$(\langle \epsilon^i)_{i=1..n}$ base canonique de \mathcal{E}^*
$(e_i\rangle \langle e_j)_{i,j=1..n}$ base canonique de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}^*$	$(e_i\rangle \langle \epsilon^j)_{i,j=1..n}$ base canonique de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}^*$

17. c'est-à-dire dans une même base

TABLE V – Règles mnémotechniques

nom	description	
produit matriciel	$MN]_{ij} = \sum_{k=1}^n M_i]_k \underbrace{N_k]_j}_{\text{les indices sommés sont toujours collés}}$	un exemple cumulant toutes les règles mnémo- techniques ensemble : $g'_{ij} = \alpha^k_i \alpha^l_j g_{kl}$ $\iff g' = \alpha^\dagger g \alpha$
convention d'Einstein	$\underbrace{A^k_j B_k^i}_{\text{sommation implicite sur } k} = \sum_{k=1}^n A^k_j B_k^i$	
contravariance	$\underbrace{A^i}_k = \beta^i_k A^k$ indice en haut toujours contravariant	
covariance	$\underbrace{A'_i}_k = \alpha^k_i A_k$ indice en bas toujours covariant	

TABLE VI – Changements d'indice

$g^{-1ij} = g^{ij}$
$ \epsilon^i\rangle = g^{ij} e_j\rangle$
$ e_i\rangle = g_{ij} \epsilon^j\rangle$
$\tilde{\mathcal{V}} = 1/\mathcal{V}$
$u_i = g_{ij} u^j$
$u^i = g^{ij} u_j$
$A^i_j = g^{ik} A_{kj} = g_{jl} A^{il} = g^{ik} g_{jl} A_k^l$
etc.

TABLE VII – Changements de base

formule matricielle	composante par composante
$(e'_1\rangle \cdots e'_n\rangle) = (e_1\rangle \cdots e_n\rangle) \alpha$	$ e'_i\rangle = \alpha^j_i e_j\rangle$
$(\langle \epsilon'^1 \cdots \langle \epsilon'^n) = (\langle \epsilon^1 \cdots \langle \epsilon^n) \beta^\dagger$	$\langle \epsilon'^i = \beta^i_j \langle \epsilon^j $
$u_{\mathcal{B}'} = \beta u_{\mathcal{B}}$	$u'^i = \beta^i_j u^j$
$u_{\tilde{\mathcal{B}'}}^\dagger = u_{\tilde{\mathcal{B}}}^\dagger \alpha$	$u'^i = \alpha^j_i u^j$
$A' = \beta A \alpha$	$A'^i_j = \beta^i_k \alpha^l_j A_k^l$
$g' = \alpha^\dagger A \alpha$	$g'^i_j = \alpha^k_i \alpha^l_j A_{kl}$

Chapitre II

Tenseurs

A DÉFINITIONS DES TENSEURS

Les tenseurs sont aussi appelés fonctions multilinéaires, ce qui signifie qu'elles sont linéaires par rapport à chacune de leurs variables. Différents objets que l'on a rencontrés au chapitre précédent sont des tenseurs (scalaires, vecteurs, formes linéaires, opérateurs, formes quadratiques), mais, il nous faut maintenant donner une définition générale des tenseurs pour qu'une telle affirmation ait un sens.

On va étudier deux définitions. La première, qualifiée d'opérateur, est basée justement sur la généralisation des propriétés de ces différents objets, que l'on a démontrées ou constatées.

La deuxième est moins technique, mais plus difficile à manipuler. Elle s'inspire des théories ensemblistes, en mathématiques.

1 Définition opératoire

α Caractéristique commune

La caractéristique commune à toutes les fonctions que l'on a étudiées précédemment, est que les matrices (1×1 pour les scalaires, $n \times 1$ pour les vecteurs, $1 \times n$ pour les formes linéaires, $n \times n$ pour les opérateurs et les formes quadratiques, n étant la dimension de l'espace) qui les représentent changent, lors d'un changement de base α , à l'aide des seules matrices α et β .

β Loi opératoire de changement de base

Plus précisément, les lois de changement de base font intervenir des produits avec les matrices α , β ou leur adjoint, de sorte que, composante par composante, elles s'écrivent :

$$A'_{j_1 \dots j_q}{}^{i_1 \dots i_p} = \beta_{u_1}^{i_1} \dots \beta_{u_p}^{i_p} \alpha_{j_1}^{v_1} \dots \alpha_{j_q}^{v_q} A_{v_1 \dots v_q}{}^{u_1 \dots u_p} \quad (31)$$

où A est une fonction $p+q$ -linéaire, avec p indices contravariants et q indices covariants.

Les indices du bas sont covariants, c'est-à-dire qu'ils font intervenir la matrice α . Les indices du haut sont contravariants, c'est-à-dire qu'ils font intervenir la matrice β .

Vous pouvez vérifier que cette loi générale est bien la généralisation de celles étudiées pour les scalaires (avec $p = q = 0$, car le produit des matrices α et β étant vide, il vaut 1, autrement dit, un scalaire est *invariant* par changement de base), les vecteurs (avec $p = 1$, $q = 0$), les formes linéaires (avec $p = 0$, $q = 1$), les opérateurs (avec $p = q = 1$) et les formes quadratiques (avec $p = 0$, $q = 2$).

γ Définition opératoire des tenseurs

Un tenseur est un objet dont les représentations vérifient la loi (31).

Comme on le verra par la suite, un tenseur peut avoir différents types de représentations, mais, heureusement, il suffit qu'une représentation vérifie la loi (31) pour que toutes la vérifient.

On pourra travailler avec une seule représentation (on choisira la représentation naturelle) et, en faisant la confusion usuelle (entre vecteur et colonne de ses composantes, entre opérateur et matrice, etc.), considérer que le tenseur **est** cette matrice, qui le représente.

δ Exemples de tenseurs

Pour montrer qu'un objet mathématique donné est un tenseur, on fait un changement de variable, et on vérifie la loi (31).

Donnons ici quelques exemples plus physiques.

- La masse dans l'approximation classique est un scalaire, donc un tenseur, puisqu'elle est invariante quand on change de base¹⁷. Par contre, ce n'est plus un scalaire, si on tient compte des effets relativistes.
- La charge est un scalaire donc un tenseur.
- Vous vérifierez que la vitesse est bien un tenseur, dans l'approximation classique. Pourquoi n'est-ce plus vrai quand on tient compte des effets relativistes¹⁸ ?
- On négligera dorénavant les effets relativistes. Le champ électrique **E** et la polarisation électrique **P** sont des vecteurs, donc des tenseurs. On en déduit que le tenseur diélectrique ϵ est bien nommée, puisque c'est un opérateur

$$\mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E} \quad \Longleftrightarrow \quad P^i = \epsilon^i_j E^j ;$$

vérifions directement que c'est un tenseur en faisant un changement de base α :

$$\begin{aligned} P'^i &= \epsilon'^i_j E'^j \Longleftrightarrow \beta^i_k P^k = \epsilon'^i_j \beta^j_l E^l \\ \Longleftrightarrow \underbrace{\alpha^u_i \beta^i_k}_{=\delta^u_k} P^k &= \alpha^u_i \epsilon'^i_j \beta^j_l E^l \quad \text{puis, en multipliant par } \alpha^u_i \text{ et sommant sur } i \\ \Longleftrightarrow P^u &= \underbrace{\alpha^u_i \epsilon'^i_j \beta^j_l}_{=\epsilon^u_l} E^l \quad \text{et donc} \\ \epsilon^u_l &= \alpha^u_i \epsilon'^i_j \beta^j_l \quad \Longleftrightarrow \quad \epsilon = \alpha \epsilon' \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \epsilon' = \beta \epsilon \alpha . \end{aligned}$$

- La polarisation **P** dans un milieu piézo-électrique est relié au tenseur des contraintes t_{ij} (on admettra que c'est un tenseur) via un objet plus compliqué, puisqu'il comporte trois indices. Notons-le d^{ijk} , il est défini par :

$$P^i = d^{ijk} t_{jk} .$$

Vérifions que d est bien trois fois contravariant, et donc que c'est un tenseur (cas $p = 3, q = 0$ de la loi (31)).

17. i.e. quand on change d'observateur et/ou de référentiel.

18. parce que ce n'est plus une fonction linéaire, les vitesses ne s'additionnent pas en relativité.

On fait le changement de base α , il vient

$$\begin{aligned}
P'^i &= d'^{ijk} t'_{jk} \iff \beta^i_p P^p = d'^{ijk} \alpha^q_j \alpha^r_k t_{qr} \\
\iff & \underbrace{\alpha^u_i \beta^i_p}_{=\delta^u_p} P^p = \alpha^u_i d'^{ijk} \alpha^q_j \alpha^r_k t_{qr} \quad \text{en multipliant par } \alpha^u_i \text{ et sommant sur } i \\
\iff & P^u = \underbrace{\alpha^u_i d'^{ijk} \alpha^q_j \alpha^r_k}_{=d^{uqr}} t_{qr} \quad \text{et donc} \\
d^{uqr} &= \alpha^u_i \alpha^q_j \alpha^r_k d'^{ijk} \iff \beta^a_u \beta^b_q \beta^c_r d^{uqr} = \underbrace{\beta^a_u \alpha^u_i}_{=\delta^a_i} \underbrace{\beta^b_q \alpha^q_j}_{=\delta^b_j} \underbrace{\beta^c_r \alpha^r_k}_{=\delta^c_k} d'^{ijk} \\
& \quad \text{en multipliant par } \beta^a_u \beta^b_q \beta^c_r \text{ et sommant sur } u, q, r \\
\iff & d'^{abc} = \beta^a_u \beta^b_q \beta^c_r d^{uqr}
\end{aligned}$$

où vous remarquerez qu'on a dû détailler l'inversion des matrices (à partir de trois indices, la généralisation du calcul matriciel est très sophistiquée et il est beaucoup plus simple d'écrire les composantes).

ε Modification de la variance

De même que l'on peut changer la variance des composantes d'un vecteur, de sorte que les composantes covariantes du vecteur sont reliées aux composantes contravariantes par les formules (20) et (21) du chapitre I, de même on peut changer la variance d'un indice de tenseur (il est préférable de ne changer qu'un indice à la fois).

Les règles sont la généralisation¹⁹ de ces formules (21) et (20), autrement dit, g est encore le descenseur d'indice, et g^{-1} l'ascenseur d'indice.

2 Définition intrinsèque

La définition précédente est imparfaite, car on identifie alors un tenseur à une matrice. Examinons le cas d'un vecteur et d'une forme linéaire :

α Cas d'un vecteur

D'une part, la matrice colonne qui le représente est mal définie, puisqu'elle dépend de la base \mathcal{B} ; autrement dit, le vecteur est un invariant, contrairement à ses représentations.

D'autre part, \mathcal{B} étant choisie, il existe des représentations de variance différente d'un même vecteur, selon que l'on choisit \mathcal{B} ou $\tilde{\mathcal{B}}$.

Le tenseur qui transcende toutes ces représentations est le vecteur lui-même.

β Cas d'une forme linéaire

Base canonique des formes linéaires

Une base naturelle des formes linéaires est constituée des bra²⁰ $(\langle \epsilon^1 |, \langle \epsilon^2 |, \dots, \langle \epsilon^n |)$.

Décomposition d'un bra dans cette base

Dans cette base, soit $\langle u | = (|u\rangle)^\dagger$ le bra adjoint d'un vecteur $|u\rangle$, sa représentation en composantes s'écrit :

$$\langle u | = (u_1 \quad u_2 \quad u_3)$$

19. Elles sont décrites à la section B4 du chapitre I.

20. En fait, on peut définir cette base sans référence à la base réciproque. On note généralement ces bra, $\varphi^i = \langle e^i |$, et la définition s'écrit : $\varphi^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j$. Vous pouvez vérifier que ces définitions sont identiques ; comme $\langle e^i | = \langle \epsilon^i |$, on a préféré ne pas introduire de notations supplémentaires.

donc, elle peut se confondre²¹ avec la représentation en composantes du vecteur $|u\rangle$ dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$.

Base réciproque des formes linéaires

A contrario des vecteurs, la base réciproque de \mathcal{E}^* est donc $(\langle e_1|, \langle e_2|, \dots, \langle e_n|)$.

Et de même que précédemment, la représentation de $\langle u|$ dans cette base se confond avec celle de $|u\rangle$ dans la base \mathcal{B} .

Ambiguïté de la représentation matricielle

Deux objets différents peuvent donc avoir la même représentation. Par contre, l'objet intrinsèque qui transcende les différentes représentations de $\langle u|$ est le bra (forme linéaire) lui-même et ne peut se confondre avec un vecteur.

γ Définition

Un tenseur ne sera donc pas défini par sa représentation, mais par l'objet mathématique qui se cache derrière.

Il existe une définition précise qui réalise exactement cela, malheureusement, sa portée excède de beaucoup le niveau et les objectifs de ce cours. Toutefois, son application revient aux principes généraux suivants :

- Un tenseur est un objet mathématique, dont une représentation quelconque matricielle est un tenseur au sens opératoire.
- On montre que, si une représentation d'un tenseur vérifie les propriétés opératoires des tenseurs, alors *toutes* les représentations les vérifient également.
- La variance d'un tenseur n'est donc pas définie, seul son ordre l'est. Par contre, la variance de ses représentations est bien définie, et on peut choisir les représentations de la variance que l'on veut.

δ Exemples

On va classer les tenseurs en fonction de leur ordre.

a *Scalars*

Il n'y a qu'un type de tenseur d'ordre 0, ce sont les scalaires.

La composante d'un scalaire a est a lui-même, elle est invariante par changement de base. Elle n'a pas d'indice, donc pas de variance.

b *Vecteurs et formes linéaires*

Il y a deux classes de tenseur d'ordre 1, les vecteurs (ou *ket*) et les formes linéaires (ou *bra*).

Les composantes de vecteur ont exactement un indice. Soit un vecteur $|u\rangle$, il n'a que deux types de représentations, autrement dit deux types de composantes : les composantes u^i avec un indice contravariant (dites composantes contravariantes) et les composantes u_i avec un indice covariant (dites composantes covariantes).

C'est la même chose pour une forme linéaire. Ce qui distingue une forme linéaire d'un vecteur, c'est qu'elle se développe sur les bases de bra $\langle \epsilon^i|$ ou $\langle e_i|$, tandis qu'un vecteur se développe sur les bases de ket $|e_i\rangle$ ou $|\epsilon^i\rangle$.

c *Opérateurs*

Un opérateur est un tenseur d'ordre 2.

21. Certes, les composantes doivent être mises en ligne pour le bra et en colonne pour le ket, mais, si on étudie leurs composantes isolément, cette subtilité ne permet plus de les distinguer.

Pour un opérateur \mathcal{A} , il y a quatre types de composantes :

- A^{ij} composantes deux fois contravariantes
- A^i_j composantes mixte contravariante covariante
- A_{ij} composantes deux fois covariantes
- A_i^j composantes mixte covariante contravariante

d Tenseurs d'ordre 2

Il existe en tout quatre classes de tenseurs d'ordre 2. En dehors des opérateurs, définis dans $\mathcal{E} \times \mathcal{E}^*$, et des formes quadratiques définies dans $\mathcal{E}^* \times \mathcal{E}^*$, que l'on a déjà rencontrés, on trouve les formes définies dans $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ (donc les formes agissant dans l'espace dual \mathcal{E}^*) et les opérateurs de \mathcal{E}^* , définis dans $\mathcal{E}^* \times \mathcal{E}^{**} = \mathcal{E}^* \times \mathcal{E}$ (grâce à l'identification entre \mathcal{E} et \mathcal{E}^{**} , qui est parfaite en dimension finie²²).

De même que pour les vecteurs et les formes linéaires, on ne peut distinguer les représentations de ces tenseurs. Ceux-ci ne diffèrent que par les bases dans lesquelles les décompositions sont définies.

Nous allons voir en détail, à la section suivante, ces différentes bases.

B OPÉRATIONS SUR LES TENSEURS

1 Produit tensoriel

On a déjà rencontré plusieurs fois des produits tensoriels. Nous allons maintenant en donner une définition générale.

α Définition en composante

Soient \mathcal{U} et \mathcal{V} deux tenseurs, d'ordre quelconque.

Soient $U = \left(U_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \right)_{\substack{i_1 \dots i_p \\ j_1 \dots j_q}}$ et $V = \left(V_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r} \right)_{\substack{k_1 \dots k_r \\ l_1 \dots l_s}}$ une représentation quelconque de chacun (il n'y a aucune exigence que ces représentations soient définies dans des bases identiques), l'ordre de \mathcal{U} vaut ici $p + q$, celui de \mathcal{V} vaut $r + s$.

Le tenseur $\mathcal{W} = \mathcal{U} \times \mathcal{V}$, appelé produit tensoriel de ces deux tenseurs, est défini de telle sorte que ses composantes soient le produit des composantes de \mathcal{U} et \mathcal{V} , dans la base induite par les bases de ces représentations. Autrement dit

$$\boxed{W_{j_1 \dots j_q l_1 \dots l_s}^{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_r} = U_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} V_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r}}.$$

La base sur laquelle cette représentation est définie est elle-même le produit tensoriel des bases sur lesquelles les deux premières représentations sont définies²³.

22. Soit $\psi \in \mathcal{E}^{**}$, ψ est une forme de forme, autrement dit $\psi : \mathcal{E}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \psi(\varphi)$, l'application canonique $h_o : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^{**}$, $|u\rangle \mapsto h_o(|u\rangle) = \psi_{\mathbf{u}}$, avec $\psi_{\mathbf{u}}$ définie par $\varphi \mapsto \varphi(\mathbf{u})$, est une bijection en dimension finie (et une injection dans tous les cas).

23. Pour résoudre cette incohérence (puisque le produit tensoriel apparaît dans la définition du produit tensoriel!), il y a deux stratégies : on peut soit ignorer la base sur laquelle la représentation tensorielle est définie, quitte à la redémontrer à la suite, soit remarquer qu'il suffit, au préalable, de définir le produit tensoriel des vecteurs de base canoniques, pour généraliser ensuite cette définition à tout tenseur. C'est cette dernière stratégie qui est généralement appliquée.

À titre d'exemple, on peut citer le tenseur $|u\rangle\langle v|$; les composantes $u^i v^j$ sont bien le produit des composantes de $|u\rangle$ et $|v\rangle$.

Dans ce dernier exemple, toutefois, on retrouve la même difficulté qu'avec la définition opératoire des tenseurs : rien ne permet de comprendre, connaissant les composantes $u^i v^j$, qu'elles proviennent du tenseur $|u\rangle\langle v|$ plutôt que du tenseur $|u\rangle \otimes |v\rangle$ ou d'un autre encore.

Et pour cause! en effet, rien ne distingue les composantes de ces différents tenseurs. Il faut donc, pour lever toute ambiguïté, définir le produit tensoriel d'une façon intrinsèque.

On se contentera d'étudier les tenseurs d'ordre 2. Tout ce qui suit se généralise à tout ordre.

β Opérateur ket-bra

a Base canonique des opérateurs

La base canonique des opérateurs est $\{|e_i\rangle\langle e^j|\}$, il y en a bien n^2 , comme la dimension de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}^*$.

Pour le comprendre, il suffit de regarder la formule (16) du chapitre I. Ces opérateurs sont des produits tensoriels *ket-bra*, et, en appliquant la formule (17) du chapitre I, on trouve que la matrice de leurs composantes dans la base \mathcal{B} est ²⁴ $(\delta_i^k \delta_l^j)_{\substack{k=1..n \\ l=1..n}}$.

b Décomposition d'un opérateur tensoriel

On a déjà rencontré les opérateurs $|u\rangle\langle v|$. Dans la base $\mathcal{B} \times \tilde{\mathcal{B}}$, ils s'écrivent $u_{\mathcal{B}} v_{\tilde{\mathcal{B}}}^\dagger$ et leurs composantes sont donc bien les $u^i v_j$.

On retrouve bien $|u\rangle\langle v| = u^i v_j |e_i\rangle\langle e^j|$ dans la base canonique des opérateurs.

Par définition, leur action sur un vecteur $|a\rangle$ s'écrit : $(|u\rangle\langle v|)|a\rangle \equiv |u\rangle(\langle v|a\rangle)$.

c Autres bases de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}^*$

Il y a une correspondance immédiate entre les bases tensorielles et les différentes représentations en composantes d'un opérateur. Soit \mathcal{A} un opérateur,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= A^i_j |e_i\rangle\langle e^j| && (|e_i\rangle\langle e^j|)_{i,j=1..n} \text{ base canonique;} \\ &= A^{ij} |e_i\rangle\langle e_j| && (|e_i\rangle\langle e_j|)_{i,j=1..n} \text{ autre base;} \\ &= A_{ij} |\epsilon^i\rangle\langle \epsilon^j| && (|\epsilon^i\rangle\langle \epsilon^j|)_{i,j=1..n} \text{ autre base;} \\ &= A_i^j |\epsilon^i\rangle\langle e_j| && (|\epsilon^i\rangle\langle e_j|)_{i,j=1..n} \text{ autre base.} \end{aligned}$$

Il est important de comprendre leur existence. On va vérifier que des tenseurs différents peuvent avoir ces mêmes représentations. Pour éviter toute ambiguïté, il vaut mieux n'utiliser que la base canonique.

γ Produit de vecteurs

C'est le vrai produit tensoriel de vecteur, en tant que tel, comme on l'utilise, par exemple, en mécanique quantique.

24. On retrouve en fait matriciellement les opérateurs élémentaires connus dans le cas d'une base orthonormée : c'est la définition de l'opérateur de base qui a changée et non sa représentation matricielle.

a *Base canonique du produit tensoriel de vecteurs*

La base canonique, sur laquelle sont définis les produits tensoriels de vecteurs, est, par essence, le produit tensoriel des bases canoniques des vecteurs $\{|e_i\rangle \otimes |e_j\rangle\}$, ou le signe \otimes sera souvent omis.

On vérifie que l'espace $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ engendré par les produits tensoriels de vecteurs²⁵ est de dimension n^2 .

b *Décomposition d'un produit tensoriel*

Soient $|u\rangle$ et $|v\rangle$ deux vecteurs, leur produit tensoriel $|u\rangle \otimes |v\rangle$ se décompose sur la base canonique précédente selon $|u\rangle \otimes |v\rangle = u^i v^j |e_i\rangle |e_j\rangle$ (on omet \otimes).

Leurs composantes naturelles sont donc $u^i v^j$, c'est-à-dire le produit des composantes de chacun, comme il se doit.

c *Autres bases de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$*

On peut décomposer un produit tensoriel sur les bases suivantes :

$$\begin{aligned} |u\rangle|v\rangle &= u^i v^j |e_i\rangle|e_j\rangle && (|e_i\rangle|e_j\rangle)_{i,j=1..n} \text{ base canonique;} \\ &= u_i v_j |\epsilon^i\rangle|\epsilon^j\rangle && (|\epsilon^i\rangle|\epsilon^j\rangle)_{i,j=1..n} \text{ autre base;} \\ &= u^i v_j |e_i\rangle|\epsilon^j\rangle && (|e_i\rangle|\epsilon^j\rangle)_{i,j=1..n} \text{ autre base;} \\ &= u_i v^j |\epsilon^i\rangle|e_j\rangle && (|\epsilon^i\rangle|e_j\rangle)_{i,j=1..n} \text{ autre base.} \end{aligned}$$

d *Décomposition d'un élément quelconque de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$*

Soit un élément quelconque de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$, il peut s'écrire $\mathcal{X} = \sum_{ij} \lambda_{ij} |u_i\rangle |v_j\rangle$, où les nombres λ_{ij} et les vecteurs $|u_i\rangle$ et $|v_j\rangle$ sont absolument quelconques.

Les composantes naturelles de \mathcal{X} sont X^{ij} et la décomposition de \mathcal{X} dans la base canonique est strictement analogue à la décomposition donnée au § précédent, en remplaçant $u^i v^j$ par X^{ij} , c'est-à-dire $\mathcal{X} = X^{ij} |e_i\rangle |e_j\rangle$.

On peut changer la variance des indices, avec la métrique, selon les formules données au chapitre I, et on retrouve les autres décompositions données au § précédent, en remplaçant $u_i v_j$ par X_{ij} , $u^i v_j$ par X^i_j et $u_i v^j$ par X_i^j .

e *Calcul des composantes*

Formellement, si on ne considère que les composantes, il est impossible de distinguer un produit tensoriel de vecteurs d'un opérateur, bien que ce soient des tenseurs différents.

Cette confusion n'a pas que des inconvénients : matriciellement, pour calculer directement la matrice X^{ij} des composantes de $|u\rangle|v\rangle$, on écrira $X = u_{\mathcal{B}} v_{\mathcal{B}}^\dagger$, bien que cette formule n'ait de sens, a priori, que pour les opérateurs $|u\rangle\langle v|$ écrit dans la base (non canonique) $\{|e_i\rangle\langle e_j|\}$.

δ Formes quadratiques

Les formes quadratiques sont liées aux matrices métriques : à une métrique g donnée est associée la forme quadratique $(X, Y) \mapsto X^\dagger g Y$.

25. Cet espace n'est pas constitué de produits tensoriels, un vecteur quelconque de cet espace est une combinaison linéaire de produits tensoriels ; par exemple, l'ensemble des surfaces est bien engendré vectoriellement par les rectangles, qui sont le produit tensoriel d'une ligne horizontale par une ligne verticale, mais il est beaucoup plus vaste (un rond est décomposable en une somme infinie de rectangle).

Vectoriellement, on doit définir, de façon plus générale, les formes bilinéaires (les formes quadratiques sont les formes bilinéaires définies positives). Pour ne pas confondre une forme quelconque et la métrique g canonique²⁶, on notera \mathcal{G}' les formes bilinéaires.

a *Produit tensoriel de formes linéaires*

Soient $|u\rangle$ et $|v\rangle$ deux vecteurs, vérifions que $\mathcal{G}' = \langle u| \otimes \langle v|$ est bien une forme bilinéaire. Pour cela, soient $|x\rangle$ et $|y\rangle$ deux vecteurs quelconques, leur produit scalaire associé à \mathcal{G}' est $\mathcal{G}'(|x\rangle, |y\rangle) = (\langle u|\langle v|)(|x\rangle|y\rangle)$, où il faut utiliser le produit tensoriel de $|x\rangle$ et $|y\rangle$.

Ce produit se réécrit sous la forme²⁷ $\langle u|x\rangle\langle v|y\rangle$, ce qui démontre finalement que $\mathcal{G}'(|x\rangle, |y\rangle) \in \mathbb{R}$ comme recherché.

b *Base canonique des formes bilinéaires*

La base canonique, sur laquelle sont définis les formes bilinéaires est, par essence, le produit tensoriel des bases canoniques des formes linéaires, donc $\{\langle \epsilon^i| \otimes \langle \epsilon^j|\}$. On vérifie que l'espace $\mathcal{E}^* \times \mathcal{E}^*$ est de dimension n^2 .

c *Décomposition d'une forme bilinéaire*

Soient \mathcal{G}' une forme bilinéaire, elle se décompose sur la base canonique précédente selon $\mathcal{G}' = g'_{ij} \langle \epsilon^i| \langle \epsilon^j|$.

Leurs composantes naturelles sont donc (g'_{ij}) , qui est leur métrique associée.

d *Autres bases de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$*

On peut décomposer une forme bilinéaire sur les bases suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}' &= g'_{ij} \langle \epsilon^i| \langle \epsilon^j| && (\langle \epsilon^i| \langle \epsilon^j|)_{i,j=1..n} \text{ base canonique;} \\ &= g'^{ij} \langle e_i| \langle e_j| && (\langle e_i| \langle e_j|)_{i,j=1..n} \text{ autre base;} \\ &= g'^i_j \langle e_i| \langle \epsilon^j| && (\langle e_i| \langle \epsilon^j|)_{i,j=1..n} \text{ autre base;} \\ &= g'^j_i \langle \epsilon^i| \langle e_j| && (\langle \epsilon^i| \langle e_j|)_{i,j=1..n} \text{ autre base.} \end{aligned}$$

On retrouve, en particulier, la métrique inverse, qui est la décomposition dans la base $\langle e_i| \langle e_j|$, donc la métrique exprimée dans la base réciproque.

Formellement, si on ne considère que les composantes, il est impossible de distinguer une forme bilinéaire d'un opérateur ou d'un produit tensoriel, bien que ce soient des tenseurs différents.

e *Formes quadratiques*

Parmi ces formes bilinéaires, on rappelle que les formes quadratiques sont celles qui sont associées à une métrique définie positive, dont toutes les valeurs propres (qui peuvent être calculées dans n'importe quelle base²⁸) sont strictement positives.

On remarque que les composantes mixtes de la métrique canonique g elle-même sont I .

26. qui n'est pas nécessairement I , on vous le rappelle, puisque la base canonique n'est pas nécessairement orthonormée.

27. Chaque terme se factorise dans l'espace qui lui est associé; pour mieux le comprendre, il faut écrire l'espace tensoriel $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ et l'espace des formes $\mathcal{E}_1^* \times \mathcal{E}_2^*$, cf. la section 3

28. Les composantes deux fois covariantes g'_{ij} sont la vraie matrice g' associée à \mathcal{G}' , matriciellement, les autres matrices s'écrivent $g^{-1}g'g^{-1}$ pour les composantes deux fois contravariantes, $g^{-1}g'$ et $g'g^{-1}$ pour les composantes mixtes. Sachant que le spectre (c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres, ici) des matrices g' et g^{-1} est strictement positif (c'est-à-dire compris dans \mathbb{R}_+^*), le fait que le spectre des produits $g^{-1}g'$, $g'g^{-1}$ et $g^{-1}g'g^{-1}$ soit aussi strictement positif est une conjecture proposée par le mathématicien Horn en 1990 et sera admis.

ε Objet *bra* \otimes *ket*

Pour achever cette liste des opérateurs d'ordre deux engendrés par le produit tensoriel, il manque les éléments de $\mathcal{E}^* \times \mathcal{E}$.

La base naturelle de cet ensemble est $\{|\epsilon^i\rangle \otimes |e_j\rangle\}$, on trouve bien la dimension n^2 de l'espace $\mathcal{E}^* \times \mathcal{E}$.

Ces objets sont pénibles à manier, car il faut en permanence éviter la confusion avec le produit scalaire $\langle u|v\rangle$. Avec l'identification entre \mathcal{E} et \mathcal{E}^{**} , ils représentent les opérateurs de \mathcal{E}^* . On retrouve des représentations en composantes analogues aux cas précédents, en adaptant bien sûr la variance.

ζ Théorème fondamental

Le produit tensoriel de deux tenseurs *est* un tenseur, et son ordre est la somme des ordres de chaque tenseur.

Quand on fait un changement de base, la transformation du produit tensoriel est induit par la transformation de chaque tenseur (on obtient le produit des matrices α et β qui interviennent dans la transformation de chacun).

2 Produit contracté

Le produit contracté est défini, au départ, à partir du produit tensoriel.

Ce qui caractérise le produit tensoriel, c'est que tous les degrés de liberté sont conservés. Au contraire, le produit contracté de deux tenseurs possède nécessairement moins de degrés de liberté, l'ordre étant diminué d'un multiple de 2, comme on va le comprendre maintenant.

a *Contraction simple*

Soit un produit tensoriel quelconque de deux tenseurs \mathcal{M} et \mathcal{N} . La contraction de ces tenseurs est obtenue en identifiant et sommant deux indices de ces tenseurs, que l'on choisira de variance différente. Par exemple,

$$\text{produit tensoriel } M^i_j N^k_l \longrightarrow \text{produit contracté } M^i_j N^j_l$$

où on respecte bien sûr la convention d'Einstein. On tire deux enseignements de cet exemple :

- Il y a plusieurs façon de contracter un produit. Dans notre exemple, il y en a deux, la contraction alternative étant $M^i_j N^k_i$.
- L'ordre total, dans une contraction simple, est diminué de 2.
- Dans ce cas particulier d'opérateurs, la contraction simple est égale au produit matriciel, le produit contracté calculé dans l'exemple redonne le produit MN , l'alternative évoquée ci-dessus donne NM .

Attention, il est interdit de contracter deux indices de même variance. Par exemple, dans le produit tensoriel de deux vecteurs $|u\rangle$ et $|v\rangle$, on ne peut contracter $u^i v^j$.

En résumé, la contraction simple revient à un produit matriciel (généralisé et non restreint aux matrices $n \times n$).

b *Théorème sur la contraction simple*

Le produit contracté de deux tenseurs est un tenseur.

Ainsi, le produit de deux opérateurs redonne bien un opérateur, qui est un tenseur.

c *Auto-contraction*

En fait, il n'est pas nécessaire de partir d'un produit tensoriel pour définir une contraction. On peut contracter tout couple d'indices de variance différente dans une expression quelconque.

Par exemple, on peut contracter les indices d'un même tenseur. On appelle cela une auto-contraction.

L'exemple fondamental est A^i_i , où A^i_j représente un opérateur. Cette auto-contraction redonne la trace $\text{tr}(A)$ du tenseur (cf. définition (6), chapitre I).

d *Théorème sur l'auto-contraction*

Le produit auto-contraint d'un tenseur est un tenseur.

Ainsi, cela démontre que la trace d'un opérateur est un scalaire, donc **ne dépend pas de la base dans laquelle on la calcule**.

e *Caractérisation d'un tenseur*

On a le théorème suivant :

Théorème 2 *Un objet mathématique est un tenseur si sa contraction avec tout tenseur donne un tenseur.*

Ce théorème est très pratique d'application. Par exemple, pour montrer qu'une forme est tensorielle, il suffit de montrer que l'image d'un vecteur arbitraire est bien un scalaire, c'est-à-dire invariante par changement de base.

f *Contraction maximale*

On peut faire des contractions dans une expression quelconque, autant que c'est possible.

On dit qu'une contraction est maximale lorsqu'il n'existe plus de couple d'indices de variance différente, que l'on puisse contracter.

Le résultat d'une contraction maximale est donc un objet où tous les indices ont même variance, donc une généralisation du produit tensoriel de vecteurs, ou une généralisation du produit tensoriel de formes.

Si l'ordre initial est pair, on obtient fréquemment un scalaire.

Si l'ordre initial est impair, on obtient fréquemment un *ket* ou un *bra*.

Attention, on ne peut **pas** parler de la contraction maximale, car le résultat dépend de l'ordre dans lequel on fait les contractions simples. Par exemple, si on part de deux opérateurs, donc du produit $M^i_j N^k_l$, les deux contractions maximales $M^i_i N^j_j = \text{tr}(M)\text{tr}(N)$ et $M^i_j N^j_i = \text{tr}(MN)$ n'ont rien à voir.

3 Produit scalaire

On ne traitera ici que le produit scalaire d'un produit tensoriel de vecteur. Les autres cas ont été déjà traités, ou sont des généralisations immédiates de ce cas, ou sont hors programme.

a *Formule*

Soit deux produits tensoriels de vecteurs, $|u_1\rangle|u_2\rangle$ et $|v_1\rangle|v_2\rangle$, on peut définir le produit scalaire entre ces deux objets, c'est-à-dire l'application qui va de $(\mathcal{E} \times \mathcal{E})^2$ dans \mathbb{R} , par

$$\left(\langle u_1 | \langle u_2 | \right) \left(|v_1\rangle |v_2\rangle \right) = \langle u_1 | v_1 \rangle \langle u_2 | v_2 \rangle$$

En quelque sorte, $|u_1\rangle$ et $|v_1\rangle$ sont définis dans un espace \mathcal{E}_1 , et $|u_2\rangle$ et $|v_2\rangle$ dans un espace \mathcal{E}_2 , qui ne se mélangent jamais, les produits scalaires étant calculés séparément dans les deux espaces.

b *Démonstration*

Par définition, la composante naturelle T^{ij} de $|v_1\rangle|v_2\rangle$ dans la base $|e_i\rangle|e_j\rangle$ est l'image de la forme $\langle e^i|\langle e^j|$ sur ce vecteur (car $\{\langle e^i|\langle e^j|\}$ est la base canonique des formes définies sur $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$). En appliquant la formule (15), on trouve alors

$$\begin{aligned} \left(\langle e^i|\langle e^j|\right) \left(|v_1\rangle|v_2\rangle\right) &= v_1^i v_2^j \\ \text{que l'on peut récrire} &= \langle e^i|v_1\rangle \langle e^j|v_2\rangle \end{aligned}$$

or, la formule que l'on vient d'établir est bien celle que l'on recherche, pour $|u_1\rangle = |e^i\rangle$ et $|u_2\rangle = |e^j\rangle$. Par linéarité, le résultat s'étend pour tout $|u_1\rangle, |u_2\rangle$.

C SYMÉTRIES

1 Tenseurs symétriques et antisymétriques

Les définitions du caractère symétrique ou antisymétrique concernent uniquement les représentations matricielles des tenseurs. Dans cette partie, on fera la confusion entre les tenseurs et leur représentation matricielle.

On ne considérera pas la conjugaison complexe, puisqu'on travaille dans les réels. Pourtant, elle joue un rôle dans les vrais objets physiques.

a *Définition*

Soit un tenseur \mathcal{T} , on dit qu'il est symétrique par rapport à deux indices de même variance si et seulement s'il est invariant par transposition de ces indices :

$$T_{\dots}^{ij\dots} = T_{\dots}^{ji\dots}$$

On dit qu'il est antisymétrique par rapport à deux indices de même variance si et seulement s'il change de signe par transposition de ces indices :

$$T_{\dots}^{ij\dots} = -T_{\dots}^{ji\dots}$$

Ce qu'il faut bien noter, dans cette définition, c'est que la variance doit être commune aux deux indices. Ainsi, on ne peut pas parler d'une matrice d'opérateur A^i_j symétrique ou antisymétrique (sinon, on violerait la convention d'Einstein). Par contre, on peut examiner la symétrie d'une matrice A_{ij} . Par exemple, on a déjà vu que la métrique g est une matrice symétrique.

b *Universalité*

La symétrie est préservée par tout changement de base, y compris par les changements de variance (il faut dans ce dernier cas changer la variance des deux indices simultanément).

Ainsi, si T_{ij} est symétrique, T^{ij} , T'_{ij} et T'^{ij} le sont aussi. Par exemple, on a, sachant que $T_{ij} = T_{ji}$,

$$T^{ij} = g^{ik} g^{jl} T_{kl} = g^{jl} g^{ik} T_{lk} = T^{ji} .$$

c *Tenseurs symétriques et antisymétriques d'ordre 2*

Un tenseur \mathcal{T} symétrique d'ordre 2 est entièrement déterminé par ses composantes au dessus de la diagonale, celle-ci comprise, $\{T_{ij}, i \geq j\}$ (on a choisi arbitrairement la représentation deux fois covariante). Il y a donc exactement $\frac{n(n+1)}{2}$ degrés de liberté.

Un tenseur \mathcal{T} antisymétrique d'ordre 2 est entièrement déterminé par ses composantes au dessus de la diagonale, celle-ci non comprise, $\{T_{ij}, i > j\}$ (la diagonale est remplie de zéro, $A_{ii} = 0 \forall i$). Il y a donc exactement $\frac{n(n-1)}{2}$ degrés de liberté. À trois dimensions, on trouve respectivement 6 et 3 degrés de liberté. Il s'agit également de dimensions d'espace, car les matrices symétriques (ou antisymétriques) forment un sous-espace vectoriel de \mathcal{E} .

d *Tenseur totalement symétrique ou antisymétrique*

On dit qu'un tenseur est totalement symétrique (respectivement totalement antisymétrique) s'il est symétrique (respectivement antisymétrique) par rapport à tout couple d'indices de même variance.

Par exemple, pour un tenseur totalement symétrique d'ordre 3, cela s'écrit :

$$T_{ijk} = T_{ikj} = T_{jik} = T_{jki} = T_{kij} = T_{kji} .$$

À trois dimensions, un tenseur totalement symétrique d'ordre 3 possède exactement 10 degrés de liberté, alors que la dimension totale des tenseurs d'ordre 3 (avec la même variance) est $3^3 = 27$.

e *Tenseur totalement antisymétrique d'ordre 3*

Il s'agit d'un cas fondamental.

Par définition, soit \mathcal{T} un tel tenseur, il vérifie :

$$T_{ijk} = -T_{ikj} = -T_{jik} = T_{jki} = T_{kij} = -T_{kji} .$$

le nombre de degrés de liberté est 1 ! cela signifie, qu'à un facteur près (déterminé par T_{123}), ce tenseur est *unique*.

On appelle **le** tenseur totalement antisymétrique d'ordre 3 l'objet ϵ défini par

$$\boxed{\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1} \quad \boxed{\epsilon_{321} = \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = -1}$$

$$\boxed{\epsilon_{ijk} = 0 \text{ si } i = j \text{ ou } i = k \text{ ou } j = k} ;$$

cette appellation est cependant fallacieuse ; en effet, ϵ n'est **pas** un tenseur. Pour le voir, appliquons un changement de base α , en supposant que ϵ est un tenseur, il vient :

$$\begin{aligned} \epsilon'_{ijk} &= \alpha_i^m \alpha_j^n \alpha_k^o \epsilon_{mno} \\ &= \det(\alpha) \epsilon_{ijk} \text{ d'après la définition (7) du déterminant.} \end{aligned}$$

On voit que ϵ' dépend de α , il est heureusement proportionnel à ϵ mais le facteur de proportionnalité nous interdit de le considérer comme un tenseur.

Signalons enfin que l'on définit ϵ^{ijk} exactement comme ϵ_{ijk} , autrement dit, ils sont formellement égaux²⁹.

29. mais leur variance est différente, et en particulier, on aurait trouvé $\det(\beta)$ à la place de $\det(\alpha)$ dans le calcul précédent.

2 Autres symétries des tenseurs

Les autres symétries que l'on peut considérer sont des vrais symétries, au sens vectoriel. On peut donc les appliquer aux vrais tenseurs, quitte à calculer la façon dont elles agissent sur leur représentation.

Il n'y a maintenant aucune restriction sur la variance des indices, car, en réalité, on montrerait que ces symétries s'appliquent indice par indice.

Chaque symétrie correspond à un changement de base. Les transformations des différents tenseurs obéissent à des lois communes à toutes les symétries :

α Règles communes

On se place dans une base initiale donnée, et on considère $\alpha_{\mathcal{S}}$ le changement de base correspondant à une symétrie \mathcal{S} donnée³⁰ :

- Les vecteurs $|u\rangle$ ont pour loi de changement de base dans leur représentation matricielle $u' = \beta_{\mathcal{S}}u$; les vecteurs invariants par symétrie vérifient donc $u = \beta_{\mathcal{S}}u$. Leur étude est donc celle de l'espace propre \mathcal{E}_1 de la matrice $\beta_{\mathcal{S}}$.
- Les formes linéaires invariantes par cette symétrie vérifie, de façon analogue, $u'^{\dagger} = u^{\dagger}\alpha_{\mathcal{S}}$, et on montre facilement que leur espace propre est l'adjoint du précédent, c'est-à-dire $\{\langle u|, \text{ pour } |u\rangle \in \mathcal{E}_1\}$.
- Les opérateurs \mathcal{A} ont pour loi de changement de base $A' = \beta_{\mathcal{S}}A\alpha_{\mathcal{S}}$; les opérateurs invariants par symétrie vérifient donc $A = \beta_{\mathcal{S}}A\alpha_{\mathcal{S}}$, autrement dit $[A, \alpha_{\mathcal{S}}] = 0$.
- Les formes bilinéaires \mathcal{G} ont pour loi de changement de base $g' = \alpha_{\mathcal{S}}^{\dagger}g\alpha_{\mathcal{S}}$. Pour les symétries unitaires, qui sont des isométries, elles vérifient $\beta_{\mathcal{S}} = \alpha_{\mathcal{S}}^{\dagger}$ et les formes invariantes par symétrie vérifient encore $[g, \alpha_{\mathcal{S}}] = 0$.
- Pour les tenseurs \mathcal{U} d'ordre supérieur, il vaut mieux écrire composante par composante $U_{j\dots}^{i\dots} = \alpha_{\mathcal{S}^k}^i \alpha_{\mathcal{S}^{\dots}}^{\dots} \beta_{\mathcal{S}^j}^k \beta_{\mathcal{S}^{\dots}}^{\dots} U_{l\dots}^{k\dots}$; pour trouver les tenseurs invariants par symétrie, il faut résoudre le système d'équations linéaires $U_{j\dots}^{i\dots} = \alpha_{\mathcal{S}^k}^i \alpha_{\mathcal{S}^{\dots}}^{\dots} \beta_{\mathcal{S}^j}^k \beta_{\mathcal{S}^{\dots}}^{\dots} U_{l\dots}^{k\dots}$ au cas par cas.

β Symétrie par rotation

Il s'agit d'une symétrie unitaire fondamentale.

a Cas général

Les rotations correspondent à $\alpha_{\mathcal{S}} = \mathcal{R}(\theta, \varphi, \gamma)$, où θ , φ et γ sont les angles d'Euler. On a $\mathcal{R}(\theta, \varphi, \gamma) =$

$$\begin{pmatrix} \cos(\gamma) \cos(\theta) - \sin(\gamma) \cos(\varphi) \sin(\theta) & \cos(\gamma) \sin(\theta) + \sin(\gamma) \cos(\varphi) \cos(\theta) & \sin(\gamma) \sin(\varphi) \\ -\sin(\gamma) \cos(\theta) - \cos(\gamma) \cos(\varphi) \sin(\theta) & -\sin(\gamma) \sin(\theta) + \cos(\gamma) \cos(\varphi) \cos(\theta) & \cos(\gamma) \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) \sin(\theta) & -\sin(\varphi) \cos(\theta) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Si l'axe Ox est un des axes de la symétrie, $\alpha_{\mathcal{S}}$ se simplifie en

$$\mathcal{R}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

mais bien d'autres cas peuvent se produire (bissectrice de deux axes, etc.), que l'on ne peut décrire exhaustivement.

30. Paradoxalement, $\alpha_{\mathcal{S}}$ dépend de la base initiale \mathcal{B} dans laquelle on applique la symétrie. On peut en particulier étudier la transformation de $\alpha_{\mathcal{S}}$ par changement de base $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$. Il se trouve que les matrices $\alpha_{\mathcal{S}}$ représentant des symétries **sont des tenseurs**.

b *Exemple*

Étudions l'exemple de la rotation de $2\pi/3$ autour de l'axe $(1,1,1)$. On trouve

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Il s'agit de la permutation } |e_1\rangle \rightarrow |e_2\rangle \rightarrow |e_3\rangle \rightarrow |e_1\rangle.$$

Les vecteurs invariants sont ceux de l'axe de rotation. Pour le (re)démontrer, il suffit d'écrire

$$\beta \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} u^2 \\ u^3 \\ u^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} \\ \iff u^1 = u^2 = u^3.$$

c *Propriétés*

De façon générale, les rotations sont des isométries positives, c'est-à-dire qu'elles conservent l'orientation de l'espace. C'est une distinction très importante quand on aborde les pseudo-vecteurs (ou vecteurs axiaux), car les isométries positives agissent sur eux comme sur les vecteurs ordinaires.

γ Symétrie miroir

C'est l'exemple typique de symétrie unitaire indirecte (qui ne préserve pas l'orientation de l'espace).

a *Premier exemple*

Étudions un premier cas particulier : la symétrie miroir par rapport au plan x, y ; α_S s'écrit simplement

$$\alpha_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs invariants sont justement les vecteurs du plan x, y .

Les opérateurs invariants sont diagonaux par blocs : soit \mathcal{A} un tel opérateur, on a

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a} & \boxed{b} & 0 \\ \boxed{c} & \boxed{d} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}.$$

b *Second exemple*

Étudions la symétrie miroir par rapport au plan orthogonal à $|e_1\rangle - |e_2\rangle$; α_S s'écrit

$$\alpha_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs invariants s'écrivent $\begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix}$.

c *Propriétés*

Les symétries miroir sont des isométries négatives, qui inversent l'orientation de l'espace. À l'inverse des rotations, elles agissent de façon extraordinaire sur les vecteurs axiaux.

δ Symétrie centrale

Il s'agit d'un cas particulier de symétrie unitaire. La symétrie centrale est tout simplement $\alpha = -I$.

Pour les dimensions paires ($n = 2$ ou 4 en particulier), c'est une isométrie positive et elle se rattache, quant aux propriétés générales, aux rotations (c'est par exemple une rotation d'angle π à deux dimensions).

Pour les dimensions impaires ($n = 1$ ou 3 en particulier), c'est une isométrie négative, avec une action extraordinaire sur les vecteurs axiaux. Dans ces dimensions, il est en fait très pratique d'écrire, pour toute isométrie négative \mathcal{S} , que $-\mathcal{S}$ est une isométrie positive.

ϵ Translations et autres symétries unitaires

Les translations ne peuvent être étudiées dans le cadre de ce cours, car elles agissent dans un espace affine, appuyé sur \mathcal{E} .

Pour engendrer d'autres symétries, on fait des combinaisons de toutes les symétries qui viennent d'être décrites. Il faut faire attention que ces combinaisons ne commutent pas forcément, et prendre l'ordre en compte.

ζ Symétries non unitaires

Les seules symétries non unitaires connues en physique sont les changements d'échelle d'un rapport donné.

Les objets invariants par changement d'échelle se trouvent notamment dans les fractales. On ne peut appliquer qu'un nombre fini de changements d'échelle (moins d'une dizaine) sur les vrais objets physiques, par contre les fractales mathématiques, qui les modélisent, sont infiniment invariante par changement d'échelle³¹.

Souvent, il faut combiner un changement d'échelle et des rotations, ou des translations, pour décrire un système invariant.

3 Produit vectoriel

On va voir que la généralisation en toute base du produit vectoriel est une chose assez subtile.

On se place dans la totalité de cette section dans un espace \mathcal{E} à trois dimensions.

α Composantes d'un tenseur d'ordre 2 totalement antisymétrique

On commencera par un approfondissement des matrices 3×3 antisymétriques.

a *Cas des composantes deux fois contravariantes*

Soit \mathcal{T} un tel tenseur (on est à 3 dimensions); on étudie les composantes deux fois contravariantes de ce tenseur; on a $T^{ij} = -T^{ji}$.

On définit ω_i le demi produit contracté de ces composantes avec ϵ_{ijk} : $\omega_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}T^{jk}$.

Alors, on vérifie que (T^{ij}) s'écrit :

$$(T^{ij})_{\substack{i=1..3 \\ j=1..3}} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} .$$

31. Toutefois, comme dans le réseau de Penrose, il peut exister une échelle minimale, à partir de laquelle on ne peut faire que des inflations. Mathématiquement, les transformations sur ce réseau peuvent se décrire comme \mathbb{N} et non comme \mathbb{Z} , elles ne forment pas un groupe.

Démonstration :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\epsilon_{1ij}T^{ij} &= \frac{\epsilon_{123}T^{23}}{2} - \frac{\epsilon_{132}T^{32}}{2} = \frac{1}{2}T^{23} - \frac{1}{2}T^{32} = \omega_1 ; \\ \frac{1}{2}\epsilon_{2ij}T^{ij} &= \frac{\epsilon_{231}T^{31}}{2} - \frac{\epsilon_{213}T^{13}}{2} = \frac{1}{2}T^{31} - \frac{1}{2}T^{13} = \omega_2 ; \\ \frac{1}{2}\epsilon_{3ij}T^{ij} &= \frac{\epsilon_{312}T^{12}}{2} - \frac{\epsilon_{321}T^{21}}{2} = \frac{1}{2}T^{12} - \frac{1}{2}T^{21} = \omega_3 .\end{aligned}$$

Attention, ω n'est pas un tenseur, puisque ϵ n'en est pas un. On verra qu'il est lié à la matrice d'un pseudo-vecteur, qu'on définira plus loin. Par abus, on écrira que ω est un pseudo-vecteur lui même.

Si on définit ³² $\omega'_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}T'^{jk}$, on trouve $\omega'_i = \frac{1}{\det(\alpha)}\alpha^j{}_i\omega_j = \det(\beta)\alpha^j{}_i\omega_j$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}\omega'_i &= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\beta^j{}_u\beta^k{}_vT^{uv} \\ \text{donc } \beta^i{}_w\omega'_i &= \frac{1}{2}\underbrace{\epsilon_{ijk}\beta^i{}_w\beta^j{}_u\beta^k{}_v}_{=\epsilon_{wuv}\det(\beta)}T^{uv} \\ \text{soit } \underbrace{\alpha^w{}_a\beta^i{}_w}_{=\delta^i{}_a}\omega'_i &= \frac{\det(\beta)}{2}\alpha^w{}_a\epsilon_{wuv}T^{uv} \\ \iff \omega'_a &= \det(\beta)\alpha^w{}_a\omega_w .\end{aligned}$$

où on applique la définition (7) du déterminant.

b *Cas des composantes deux fois covariantes*

On étudie maintenant les composantes deux fois covariantes de \mathcal{T} ; on a $T_{ij} = -T_{ji}$.

On définit ω^i le demi produit contracté de ces composantes avec ϵ^{ijk} : $\omega^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}T_{jk}$.

Alors, on vérifie que (T_{ij}) s'écrit :

$$(T_{ij})_{\substack{i=1..3 \\ j=1..3}} = \begin{pmatrix} 0 & \omega^3 & -\omega^2 \\ -\omega^3 & 0 & \omega^1 \\ \omega^2 & -\omega^1 & 0 \end{pmatrix} .$$

La démonstration est strictement analogue au cas précédent. On fera encore l'abus mentionné précédemment, en qualifiant cette matrice ω de pseudo-vecteur.

Si on définit $\omega'^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}T'_{jk}$, on trouve $\omega'^i = \frac{1}{\det(\beta)}\beta^i{}_j\omega^j = \det(\alpha)\beta^i{}_j\omega^j$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}\omega'^i &= \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\alpha^u{}_j\alpha^v{}_kT_{uv} \\ \text{donc } \alpha^w{}_i\omega'^i &= \frac{1}{2}\underbrace{\epsilon^{ijk}\alpha^w{}_i\alpha^u{}_j\alpha^v{}_k}_{=\epsilon^{wuv}\det(\alpha)}T_{uv} \\ \text{donc } \underbrace{\beta^a{}_w\alpha^w{}_i}_{=\delta^a{}_i}\omega'^i &= \frac{\det(\alpha)}{2}\beta^a{}_w\epsilon^{wuv}T_{uv} \\ \iff \omega'^a &= \det(\alpha)\beta^a{}_w\omega^w .\end{aligned}$$

32. et non $\omega'_i = \frac{1}{2}\epsilon'_{ijk}T'^{jk}$; il faut bien saisir qu'il s'agit d'un choix.

β Produit extérieur de deux vecteurs

a Définition

Soient $|u\rangle$ et $|v\rangle$ deux vecteurs, on définit leur produit extérieur et on note $|u\rangle \wedge |v\rangle$ le tenseur antisymétrique d'ordre 2 :

$$\boxed{|u\rangle \wedge |v\rangle = |u\rangle \otimes |v\rangle - |v\rangle \otimes |u\rangle} .$$

b Représentation matricielle canonique

Le produit extérieur \wedge , dans la base canonique $|e_i\rangle|e_j\rangle$, des composantes deux fois contravariantes $T^{ij} = u^i v^j - v^i u^j$, où \mathcal{T} désigne momentanément le produit extérieur.

T est antisymétrique, donc on peut définir le pseudo-vecteur $\omega_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}T^{jk}$. Plus précisément, on trouve

$$\begin{aligned}\omega_1 &= u^2 v^3 - u^3 v^2 ; \\ \omega_2 &= u^3 v^1 - u^1 v^3 ; \\ \omega_3 &= u^1 v^2 - u^2 v^1 .\end{aligned}$$

c Représentation matricielle réciproque

Le produit extérieur \wedge , dans la base réciproque $|e^i\rangle|e^j\rangle$, des composantes deux fois covariantes $T_{ij} = u_i v_j - v_i u_j$.

On peut à nouveau définir le pseudo-vecteur $\omega^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}T_{jk}$. Plus précisément, on trouve

$$\begin{aligned}\omega^1 &= u_2 v_3 - u_3 v_2 ; \\ \omega^2 &= u_3 v_1 - u_1 v_3 ; \\ \omega^3 &= u_1 v_2 - u_2 v_1 .\end{aligned}$$

γ Produit vectoriel

a Définition

Soient $|u\rangle$ et $|v\rangle$ deux vecteurs, leur produit vectoriel est défini comme un tenseur d'ordre 1. On le notera $|w\rangle = |u\rangle \times |v\rangle$. Dans la base directe, ses composantes contravariantes sont

$$\boxed{w^i = \frac{1}{\mathcal{V}}\omega^i = \frac{1}{2\mathcal{V}}\epsilon^{ijk}(u_j v_k - u_k v_j) = \frac{1}{\mathcal{V}}\epsilon^{ijk}u_j v_k}$$

(on reconnaît le pseudo-vecteur contravariant ω défini plus haut), soit, de façon plus détaillée,

$$\begin{aligned}w^1 &= \frac{1}{\mathcal{V}}(u_2 v_3 - u_3 v_2) ; \\ w^2 &= \frac{1}{\mathcal{V}}(u_3 v_1 - u_1 v_3) ; \\ w^3 &= \frac{1}{\mathcal{V}}(u_1 v_2 - u_2 v_1) .\end{aligned}$$

Dans la base réciproque, ses composantes covariantes sont

$$\boxed{w_i = \mathcal{V}\omega_i = \frac{\mathcal{V}}{2}\epsilon_{ijk}(u^j v^k - u^k v^j) = \mathcal{V}\epsilon_{ijk}u^j v^k}$$

(on reconnaît le pseudo-vecteur covariant ω défini plus haut), soit, de façon plus détaillée,

$$\begin{aligned} w_1 &= \mathcal{V}(u^2v^3 - u^3v^2) ; \\ w_2 &= \mathcal{V}(u^3v^1 - u^1v^3) ; \\ w_3 &= \mathcal{V}(u^1v^2 - u^2v^1) . \end{aligned}$$

b *Cohérence des composantes covariantes et contravariantes*

On a défini le produit vectoriel par ses composantes. Il faut s'assurer que la définition des composantes covariantes et celle des composantes contravariantes définissent bien un même objet.

Partons des composantes contravariantes, et calculons les composantes covariantes associées. Elles s'écrivent

$$\begin{aligned} g_{ij}w^j &= \frac{1}{\mathcal{V}}g_{ij}\epsilon^{jkl}u_kv_l \\ &= \frac{1}{\mathcal{V}}\underbrace{g_{ij}g_{ak}g_{bl}\epsilon^{jkl}}_{\det(g)\epsilon_{iab}}u^av^b \\ &= \frac{\mathcal{V}^2}{\mathcal{V}}\epsilon_{iab}u^av^b \\ &= w_i \end{aligned}$$

où on a utilisé $\mathcal{V}^2 = \det(g)$.

c *Caractère tensoriel*

Il faut maintenant analyser la façon dont ces composantes se transforment lors d'un changement de base α .

Notons tout d'abord que $\mathcal{V}' = \sqrt{\det(g')} = \sqrt{\det(\alpha^\dagger g \alpha)} = |\det(\alpha)|\mathcal{V}$.

Partons d'abord des composantes covariantes :

$$\begin{aligned} w'_i &= \mathcal{V}'\epsilon_{ijk}u'^jv'^k \\ &= |\det(\alpha)|\mathcal{V}\epsilon_{ijk}\beta^j_a\beta^k_bu^av^b \\ \text{donc } \beta^i_cw'_i &= \frac{\mathcal{V}}{|\det(\beta)|}\underbrace{\beta^i_c\beta^j_a\beta^k_b\epsilon_{ijk}}_{=\det(\beta)\epsilon_{cab}}u^av^b \\ &= \pm w_c \iff w'^\dagger\beta = \pm w^\dagger \iff w'^\dagger = \pm w^\dagger\alpha \\ \iff w'_i &= \pm\alpha^j_iw_j \end{aligned}$$

où \pm vaut 1 si $\det(\alpha) > 0$, et vaut -1 si $\det(\alpha) < 0$ et on utilise la définition (7).

On peut refaire le même calcul avec les composantes contravariantes :

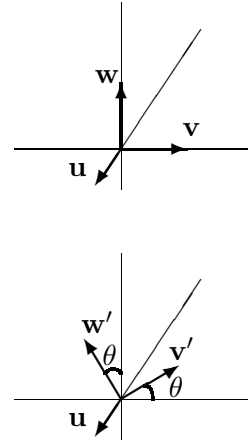
$$\begin{aligned} w^i &= \frac{1}{\mathcal{V}}\epsilon^{ijk}u'_jv'_k \\ &= \frac{1}{|\det(\alpha)|\mathcal{V}}\epsilon^{ijk}\alpha^a_j\alpha^b_ku_av_b \\ \text{donc } \alpha^c_iw^i &= \frac{1}{|\det(\alpha)|\mathcal{V}}\underbrace{\alpha^c_i\alpha^a_j\alpha^b_k\epsilon^{ijk}}_{=\det(\alpha)\epsilon^{cab}}u_av_b \\ &= \pm w^c \iff \alpha w' = \pm w \iff w' = \pm\beta w \\ \iff w^i &= \pm\beta^i_jw^j ; \end{aligned}$$

le signe \pm est le même qu'au dessus puisque $\det(\alpha)$ et $\det(\beta) = 1/\det(\alpha)$ ont même signe.

d *Pseudo-vecteur*

On dit que le produit vectoriel est un pseudo-tenseur, car il suit les lois des vrais tenseurs d'ordre 1 quand la symétrie qu'il subit ne change pas l'orientation de l'espace ($\det(\alpha) > 0$); par contre, il subit une inversion supplémentaire quand la symétrie change l'orientation de l'espace ($\det(\alpha) < 0$).

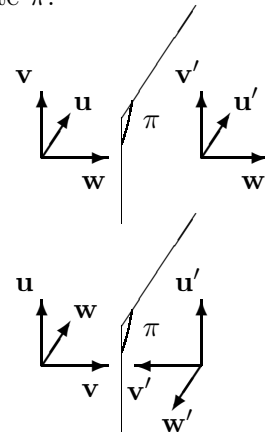
Le premier cas, $\det(\alpha) > 0$, correspond aux rotations : quand on tourne un pseudo-vecteur, il se transforme comme un vrai vecteur. Sur le dessin de droite, on représente le cas du produit vectoriel de deux vecteurs $|u\rangle$ et $|v\rangle$; $|w\rangle = |u\rangle \times |v\rangle$ est un pseudo-vecteur. On choisit pour simplifier $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ orthogonale et on applique une rotation d'angle $\theta > 0$ autour de l'axe \mathbf{u} . Donc, $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}' = \mathbf{u}$, $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}'$ et, par définition $\mathbf{w}' = \mathbf{u}' \times \mathbf{v}' = \mathbf{u} \times \mathbf{v}'$. On constate que \mathbf{w}' subit une même rotation d'angle θ .



Le second cas correspond aux symétries miroir et à l'inversion. Dans ce cas, $\det(\alpha) < 0$ et il vient un facteur -1 supplémentaire (inversion) dans la transformation du pseudo-vecteur. On représente à droite deux exemples de produit vectoriel $|w\rangle = |u\rangle \times |v\rangle$, subissant une symétrie miroir, c'est-à-dire une symétrie orthogonale par rapport à un plan, qui sera ici noté π .

Dans le premier exemple, on choisit $\mathbf{u} \parallel \pi$ et $\mathbf{v} \perp \pi$, d'où $\mathbf{w} \perp \pi$. On trouve $\mathbf{u}' = \mathbf{u}$ et $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$, de sorte que $\mathbf{w}' = \mathbf{u}' \times \mathbf{v}' = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w}$ tandis qu'un vecteur ordinaire $\perp \pi$ se serait transformé en $-\mathbf{w}$.

Dans le second exemple, on choisit $\mathbf{u} \perp \pi$ et $\mathbf{v} \parallel \pi$, d'où $\mathbf{w} \parallel \pi$. On trouve $\mathbf{u}' = \mathbf{u}$ et $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}$, de sorte que $\mathbf{w}' = \mathbf{u}' \times \mathbf{v}' = -\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{w}$ tandis qu'un vecteur ordinaire $\parallel \pi$ se serait transformé en \mathbf{w} .



En conclusion, sous l'action d'une symétrie qui change l'orientation de la base, un pseudo-vecteur subit, en plus de la symétrie qui s'appliquerait à tout vecteur ordinaire, une inversion.

Nota Bene : l'appellation pseudo-vecteur était abusive, concernant ω , défini plus haut, puisqu'il manque, $\forall \alpha$, un facteur réel dans la transformation.

e *Composantes naturelles*

Si on s'interdit d'utiliser les composantes covariantes des vecteurs, l'écriture qui permet de calculer, en toute généralité, un produit vectoriel est assez lourde. On a $w^i = \mathcal{V}g^{ij}\epsilon_{jkl}(u^k v^l - u^l v^k)$, il est alors *indispensable* d'écrire explicitement la métrique inverse dans la définition.

f Exemples de pseudo-vecteurs

On trouve les exemples courants suivants :

Vecteur rotation

Le vecteur Ω qui décrit la rotation d'une particule est un pseudo-vecteur.

En effet, c'est le produit vectoriel du vecteur position et du vecteur vitesse, qui sont de vrais vecteurs.

Rotationnel

Le rotationnel est formellement le produit vectoriel du tenseur ∇ et d'un vecteur ordinaire $|u\rangle$.

Ses composantes contravariantes sont $\frac{1}{V}\epsilon^{ijk}\partial_j u_k$, où $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$ est covariant³³ et on vérifie directement que c'est bien un pseudo-vecteur, de façon strictement analogue au produit vectoriel.

Un exemple fondamental de pseudo-vecteur rotationnel est le champ magnétique $\mathbf{B} = \nabla \mathbf{A}$ (pour le montrer exactement, il faut vérifier que le potentiel vecteur \mathbf{A} est un vrai vecteur).

Produit de vecteurs

On vient de voir que le produit vectoriel de deux vecteurs ordinaires est un pseudo-vecteur.

A contrario, le produit vectoriel d'un vecteur ordinaire et d'un pseudo-vecteur est un vecteur ordinaire, de même que le rotationnel d'un pseudo-vecteur.

Enfin, le produit vectoriel de deux pseudo-vecteurs est un pseudo-vecteur.

Toutes ces règles se montrent en remarquant que chaque produit vectoriel et chaque pseudo-vecteur donne un même facteur \pm , donc, les puissances paires correspondent aux vrais vecteurs, les puissances impaires aux pseudo-vecteurs.

On retrouve une règle de signe, analogue au produit ordinaire, où les vrais vecteurs jouent le rôle des nombres positifs et les pseudo-vecteurs le rôle des nombres négatifs.

4 Réduction des tenseurs par symétrie

Un tenseur inconnu a, a priori, un certain nombre de degré de liberté (à trois dimensions : 1 pour les scalaires, 3 pour les vecteurs et les formes linéaires, 9 pour les opérateurs et les autres tenseurs d'ordre 2, la formule générale est n^p où n est la dimension de l'espace et p l'ordre du tenseur). Cependant, des considérations de symétrie permettent de réduire ce nombre de paramètres, parfois dans des proportions importantes. On appelle cela *réduire le tenseur*.

On a déjà vu quelques exemples. Par exemple, en mécanique quantique, une matrice représentant un opérateur observable doit être hermitienne ; dans une représentation où

33. Pour le démontrer, admettons-le et partons de la formule : $df = dx^i \partial_i f$ (on applique la convention d'Einstein) ; df est indépendant de la base dans laquelle il est calculé. On a donc :

$$\begin{aligned} df &= dx^i \partial_i f \\ &= dx'^i \partial'_i f = d(\beta^i_j x^j) \alpha^k_i \partial_k f \\ &= \underbrace{\beta^i_j \alpha^k_i}_{=(\alpha\beta)^k_j = \delta^k_j} dx^j \partial_k f = dx^j \partial_j f ; \end{aligned}$$

a contrario, si ∂_i n'est pas covariant, on ne peut obtenir le bon résultat.

elle est de plus réelle, c'est une matrice symétrique : si l'espace dans lequel on représente les états est de dimension s , cette symétrie permet de réduire le nombre de paramètres de s^2 à $\frac{s(s+1)}{2}$.

Un autre exemple, tellement courant qu'on ne s'en rend plus compte, est le tenseur de pression dans l'air. Les conditions ordinaires permettent d'écrire la matrice P , qui est normalement une matrice 3×3 , sous la forme $P = pI$, où le scalaire p est la pression telle qu'on la connaît : on est passé de 9 à 1 paramètre.

On va détailler les techniques de réduction des tenseurs.

α Cas tensoriel

a *Principe*

Si l'action d'une symétrie sur un vecteur est simple, on peut facilement la transposer directement et avec peu de calcul au produit tensoriel de vecteurs.

Une fois que l'on connaît l'action de la symétrie sur un produit tensoriel, on connaît son action sur un opérateur (ou tout tenseur d'ordre 2) car elle est formellement identique (il faut garder en mémoire que les produits tensoriels engendrent tous les tenseurs d'ordre 2).

Enfin, connaissant l'action sur un tenseur \mathcal{A} d'ordre 2, il faut résoudre l'équation maîtresse $A' = A$.

b *Premier exemple*

Prenons l'exemple de l'invariance par rotation de $2\pi/3$ autour de l'axe $(1,1,1)$.

L'action de la symétrie sur un vecteur $u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}$ est $\beta_S u = \begin{pmatrix} u^2 \\ u^3 \\ u^1 \end{pmatrix}$, donc

l'action de $\beta_S \otimes \beta_S$ sur le produit tensoriel $|u\rangle|v\rangle$ donne

$$u'v'^{\dagger} = \begin{pmatrix} u^2v^2 & u^2v^3 & u^2v^1 \\ u^3v^2 & u^3v^3 & u^3v^1 \\ u^1v^2 & u^1v^3 & u^1v^1 \end{pmatrix}$$

qui peut encore s'écrire $(u^{i+1}v^{j+1})_{i,j=1..3}$ avec une convention d'écriture des indices modulo 3.

Du coup, l'action de la symétrie sur les composantes deux fois contravariantes d'un opérateur \mathcal{A} s'écrit, par analogie, $A'^{ij} = A^{i+1j+1}$ et les tenseurs invariants, qui vérifient $A'^{ij} = A^{i+1j+1}$, s'écrivent

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

soit une réduction à 3 degrés de liberté.

c *Second exemple*

Considérons la rotation de $\pi/2$ autour de l'axe \mathbf{e}_3 . Son action sur la base canonique est $|e_1\rangle \rightarrow |e_2\rangle$, $|e_2\rangle \rightarrow -|e_1\rangle$ et $|e_3\rangle \rightarrow |e_3\rangle$, la matrice α_S s'écrit

$$\alpha_S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \beta_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;$$

du coup, l'action sur les composantes contravariantes du vecteur $|u\rangle$ est³⁴ $u'^i = \beta_{\mathcal{S}j}^i u^j$, soit $u^1 \rightarrow u^2$, $u^2 \rightarrow -u^1$ et $u^3 \rightarrow u^3$.

La transformation du produit tensoriel $|u\rangle|v\rangle$, puis celle des composantes deux fois contravariantes du tenseur \mathcal{A} d'ordre 2, sont donc

$$u'v'^{\dagger} = \begin{pmatrix} u^2v^2 & -u^2v^1 & u^2v^3 \\ -u^1v^2 & u^1v^1 & -u^1v^3 \\ u^3v^2 & -u^3v^1 & u^3v^3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A' = \begin{pmatrix} A^{22} & -A^{21} & A^{23} \\ -A^{12} & A^{11} & -A^{13} \\ A^{32} & -A^{31} & A^{33} \end{pmatrix}.$$

Finalement, l'équation $A = A'$ donne

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

soit une réduction à 3 degrés de liberté.

d Cas général

Dans le cas général, la loi de transformation d'un vecteur $|u\rangle$ s'écrit $u' = \beta_{\mathcal{S}} u$, celle d'un produit tensoriel $|u\rangle|v\rangle$ s'écrit³⁵ $u'v'^{\dagger} = \beta_{\mathcal{S}} u u^{\dagger} \beta_{\mathcal{S}}^{\dagger}$.

On vérifie que, composante par composante, on retrouve bien la loi générale de transformation $A'^{ij} = \beta_{\mathcal{S}k}^i \beta_{\mathcal{S}l}^j A^{kl}$.

β Cas général

Le cas général que l'on vient de traiter à l'aide du produit tensoriel peut être directement résolu à partir de l'équation maîtresse $A' = A$, où on utilise la loi générale de transformation du tenseur pour exprimer A' .

En d'autres termes, pour les cas compliqués, il n'est pas spécialement utile de passer par la loi du produit tensoriel, qui n'apporte aucun gain de temps particulier.

Il s'agit d'un système **linéaire** de n^p équations à n^p inconnues, pour lequel aucune méthode générale n'existe, car nécessairement certaines équations sont dégénérées³⁶. Le nombre d'équations indépendantes indique le nombre de degrés de liberté qui vont être réduits.

Étudions pour finir un exemple particulier.

a Énoncé

On considère les composantes t^{ij} deux fois contravariantes d'un tenseur d'ordre 2. On suppose que t possède un axe ternaire³⁷ parallèle à \mathbf{e}_3 et on veut réduire le tenseur.

b Lois de transformation

La symétrie correspond à la matrice $\alpha_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

34. La loi de transformation des vecteurs de base est identique à cette loi de transformation des composantes, coïncidence troublante puisque celle-là est covariante par définition, et celle-ci contravariante; en fait, pour toutes les symétries $\alpha_{\mathcal{S}}$ unitaires, on a $\beta = \alpha^{\dagger}$, ce qui conduit à une loi identique.

35. $= \alpha_{\mathcal{S}}^{\dagger} (u u^{\dagger}) \alpha_{\mathcal{S}}$ pour les symétries unitaires.

36. L'espace des solutions est un espace vectoriel; si le système est non dégénéré, cela signifie que cet espace est réduit au vecteur nul, autrement dit que la symétrie n'est jamais vérifiée. C'est un cas que l'on peut exclure a priori.

37. invariance par rotation de $2\pi/3$.

La loi de transformation des vecteurs de base est alors $|e'_1\rangle = -\frac{1}{2}|e_1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|e_2\rangle$,
 $|e'_2\rangle = -\frac{\sqrt{3}}{2}|e_1\rangle - \frac{1}{2}|e_2\rangle$, $|e'_3\rangle = |e_3\rangle$.

La loi de transformation des composantes contravariantes d'un vecteur est donc
 $x'^1 = -\frac{1}{2}x^1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$, $x'^2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}x^1 - \frac{1}{2}x^2$, $x'^3 = x^3$.

La loi de transformation des composantes de t est finalement $t'^{ij} = \beta^i_k \beta^j_l t^{kl}$, soit

$$\begin{aligned}
t'^{11} &= \beta^1_k \beta^1_l t^{kl} = \beta^1_1 \beta^1_1 t^{11} + \beta^1_2 \beta^1_1 t^{21} + \beta^1_1 \beta^1_2 t^{12} + \beta^1_2 \beta^1_2 t^{22} \\
&= \frac{1}{4}(t^{11} + 3t^{22}) - \frac{\sqrt{3}}{4}(t^{21} + t^{12}) ; \\
t'^{12} &= \beta^1_k \beta^2_l t^{kl} = \beta^1_1 \beta^2_1 t^{11} + \beta^1_2 \beta^2_1 t^{21} + \beta^1_1 \beta^2_2 t^{12} + \beta^1_2 \beta^2_2 t^{22} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}(t^{11} - t^{22}) + \frac{1}{4}(t^{12} - 3t^{21}) ; \\
t'^{21} &= \beta^2_k \beta^1_l t^{kl} = \beta^2_1 \beta^1_1 t^{11} + \beta^2_2 \beta^1_1 t^{21} + \beta^2_1 \beta^1_2 t^{12} + \beta^2_2 \beta^1_2 t^{22} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}(t^{11} - t^{22}) + \frac{1}{4}(t^{21} - 3t^{12}) ; \\
t'^{22} &= \beta^2_k \beta^2_l t^{kl} = \beta^2_1 \beta^2_1 t^{11} + \beta^2_2 \beta^2_1 t^{21} + \beta^2_1 \beta^2_2 t^{12} + \beta^2_2 \beta^2_2 t^{22} \\
&= \frac{1}{4}(3t^{11} + t^{22}) + \frac{\sqrt{3}}{4}(t^{21} + t^{12}) ; \\
t'^{13} &= \beta^1_k \beta^3_l t^{kl} = \beta^1_1 \beta^3_3 t^{13} + \beta^1_2 \beta^3_3 t^{23} = \frac{1}{2}(-t^{13} + \sqrt{3}t^{23}) ; \\
t'^{23} &= \beta^2_k \beta^3_l t^{kl} = \beta^2_1 \beta^3_3 t^{13} + \beta^2_2 \beta^3_3 t^{23} = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}t^{13} + t^{23}) ; \\
t'^{31} &= \beta^3_k \beta^1_l t^{kl} = \beta^3_3 \beta^1_1 t^{31} + \beta^3_3 \beta^1_2 t^{32} = \frac{1}{2}(-t^{31} + \sqrt{3}t^{32}) ; \\
t'^{32} &= \beta^3_k \beta^2_l t^{kl} = \beta^3_3 \beta^2_1 t^{31} + \beta^3_3 \beta^2_2 t^{32} = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}t^{31} + t^{32}) ; \\
t'^{33} &= t^{33} .
\end{aligned}$$

c *Équation maîtresse*

Les équations d'invariance de t par cette symétrie sont $t' = t$, soit finalement

$$\left\{ \begin{array}{l} t^{11} = \frac{1}{4}(t^{11} + 3t^{22}) - \frac{\sqrt{3}}{4}(t^{21} + t^{12}) \\ t^{12} = \frac{\sqrt{3}}{4}(t^{11} - t^{22}) + \frac{1}{4}(t^{12} - 3t^{21}) \\ t^{21} = \frac{\sqrt{3}}{4}(t^{11} - t^{22}) + \frac{1}{4}(t^{21} - 3t^{12}) \\ t^{22} = \frac{1}{4}(3t^{11} + t^{22}) + \frac{\sqrt{3}}{4}(t^{21} + t^{12}) \\ t^{13} = \frac{1}{2}(-t^{13} + \sqrt{3}t^{23}) \\ t^{23} = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}t^{13} + t^{23}) \\ t^{31} = \frac{1}{2}(-t^{31} + \sqrt{3}t^{32}) \\ t^{32} = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}t^{31} + t^{32}) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} t^{11} = t^{22} \\ t^{12} = -t^{21} \\ t^{13} = 0 \\ t^{23} = 0 \\ t^{31} = 0 \\ t^{32} = 0 \end{array} \right.$$

et il n'y a aucune condition sur t^{33} .

d *Matrice réduite*

Finalement, la matrice peut s'écrire

$$t = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

avec trois degrés de liberté.

e *Symétrie supplémentaire*

Si de plus t est une matrice symétrique, on a $b = 0$, la matrice t est diagonale avec seulement deux paramètres libres.