Travaux Dirigés de Physique
Mécanique

L1 S1 Phys–101

Université Paris–Sud
2018–2019

Table des matières

TD 1

Dimensions - Lois d'échelle - Homogénéité

1.1 Dimensions

Exercice 1.1.1 *(★)* : On note l_i une longueur, m_i une masse et t_i un temps. Les expressions suivantes sont-elles homogènes ?

a) $m_1^2 - m_2 = m_3^3$ b) $l_1 \sin t_1 = l_2 \cos t_2$ c) $l_1 t_1^2 + \frac{l_2^2 t_2^3}{l_1 t_1} = \frac{l_1 t_1^3}{t_3}$

d) $m_1 l_1 = m_2 l_2 \exp(-t_1)$ e) $\frac{l_1}{l_2} = \log(\frac{t_1}{t_2})$ f) $m_1 \cos(\frac{l_1 t_2}{t_1 l_2}) = l_1 \exp(-t_1/t_2)$

Exercice 1.1.2 *(★)* : La force de gravitation entre deux masses m et M, situées à une distance r, l'une de l'autre a pour norme :

$$F = \frac{GmM}{r^2},$$

où G est la constante de gravitation universelle. Déterminer la dimension de G et son unité dans le système international.

Exercice 1.1.3 *(★★)* : Le but de cet exercice est d'évaluer la surface de la peau d'un humain adulte.

1. La masse de l'humain est $m = 70$ kg. Sachant que nous sommes constitué pratiquement que d'eau, en déduire le volume V de l'humain.
2. La hauteur de l'humain adulte est de 1.75 m. En déduire une estimation de sa surface.
3. On modélise l'humain par un cylindre de hauteur h, raffiner votre estimation.

Exercice 1.1.4 *(★)* : Justifier, en rappelant la définition du radian, qu'un angle n'a pas de dimension.

Exercice 1.1.5 *(★★)* : Un pendule simple est constitué d'une masse m suspendue à une tige de longueur ℓ, dont on peut négliger la masse. On note θ l'angle maximal que fait la tige avec la verticale, au cours de son mouvement d'oscillation. Déterminer la façon dont la période d'oscillation T varie en fonction de ℓ et de l'accélération de la pesanteur g.

Exercice 1.1.6 *(★★)* : Le débit d'absorption spécifique (DAS), aussi appelé SAR (pour specific absorption rate, en anglais), est utilisé pour caractériser la puissance électromagnétique absorbée par le corps humain lors de l'utilisation des téléphones portables. Pour un échantillon de masse donnée (typiquement 1 gramme), de conductivité σ et de masse volumique ρ, on mesure le champs électrique moyen E.

Le DAS est donné par le formule suivante :

$$\text{DAS} = \frac{\sigma E^2}{\rho}.$$

Sachant que le courant par unité de surface j engendrée par un champ E est donné par $j = \sigma E$ et que la puissance dissipée par unité de volume $\mathcal{P}$ est donnée par $\mathcal{P} = jE$, en déduire la dimension du DAS et son unité dans le système international.

Exercice 1.1.7 *(★★★)* : On veut comprendre pourquoi les grands animaux possèdent des os plus épais, en proportion de leur taille, que des animaux plus petits. On notera m la masse de l'animal considéré et L sa taille.

1. Rappelez la dimension d'une pression. Notons P_{max} la pression maximale que peut subir un os. En déduire la force maximale F_{max} que peut porter un os de section S.
2. L'animal devant supporter son propre poids, déterminer une inégalité faisant intervenir P_{max}, S, m et l'accélération de la pesanteur g. En déduire une inégalité entre P_{max}, L, g et la masse volumique ρ de l'animal.
3. Supposons que l'inégalité précédente est vérifiée pour un L donné, que se passe-t-il si on multiplie toutes les dimensions de l'animal par un même facteur ? Comment doit varier le rapport $\frac{S}{L^2}$ pour que l'animal ne soit pas écrasé par son propre poids ?

TD 2

Cinématique

2.1 Mouvements à une dimension

Exercice **2.1.1** *(★)* **Vitesse moyenne, vitesse instantanée** : On considère une particule qui se déplace le long d'un axe Ox (trajectoire rectiligne), de vecteur unitaire $\vec{i}$. On notera $\vec{v}(t) = v(t)\vec{i}$ le vecteur vitesse de la particule à chaque instant t. L'équation horaire du mouvement est donnée par $x(t) = \mu t^2 + \nu$. On donne $\mu = 5$ SI et $\nu = 3$ SI.

1. Donner les dimensions des constantes μ et ν.
2. *Rappels de mathématiques :*
   (a) Soit $f(x)$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Rappeler la définition de la dérivée $f'(x_0)$ de $f(x)$ en $x = x_0$.
   (b) On considère la fonction $f(x) = 5x^2 + 3$. Calculer $f'(2)$ en utilisant la définition que vous avez donnée à la question précédente.
   (c) Donner l'expression de la dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. **Aspects formels et numériques :**
   (a) Calculer la vitesse moyenne de la particule entre l'instant $t_0 = 2.00000$ s et $t_1 = 3.00000$ s, puis entre $t_0 = 2.00000$ s et $t_1 = 2.10000$ s puis entre $t_0 = 2.00000$ s et $t_2 = 2.00100$ s et finalement entre $t_0 = 2.00000$ s et $t_3 = 2.00001$ s. On gardera les cinq chiffres significatifs.
   (b) Donner l'expression de la composante de la vitesse instantanée $v(t)$. En déduire la valeur de la vitesse à l'instant $t = t_0$.
   (c) Comparer les valeurs numériques obtenues pour la vitesse moyenne entre t_0 et $t_0 + \Delta t$ quand Δt varie entre 1 s et 10^{-5} s, et la valeur de $v(t)$ quand $t = t_0$. Conclure.
4. **Aspects graphiques :**
   (a) *Rappels de mathématiques :* Donner l'équation de la droite de coefficient directeur $a = 20$ et passant par le point $A = (2, 23)$.
   (b) Le graphe de la fonction $x(t) = 5t^2 + 3$ est représenté sur la figure 2.1, avec x exprimé en mètres et le temps t en secondes. Tracer la tangente à la courbe en t_0. Interpréter graphiquement les résultats trouvés précédemment.

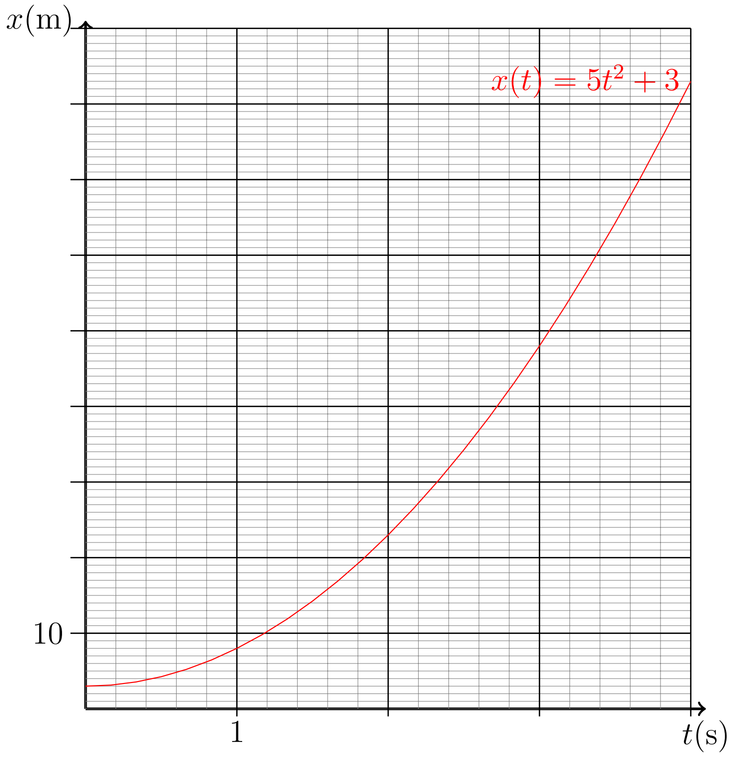

FIGURE 2.1 – Graphe de $x(t) = 5t^2 + 3$

Exercice 2.1.2 *(★)* : Un point mobile M peut se déplacer suivant une trajectoire rectiligne le long d'un axe Ox. On enregistre $a(t)$ la composante de son vecteur accélération sur l'axe Ox en fonction du temps et on obtient le résultat de la figure 2.2. Le mobile part de l'origine sans vitesse initiale. On note $v(t)$ la composante de la vitesse sur l'axe Ox. A chaque instant t, on repère la position du point M par son abscisse $x(t)$ sur l'axe Ox.

1. *Rappels de mathématiques :*
   (a) Rappeler la définition d'une primitive $F(x)$ d'une fonction $f(x)$.
   (b) Soit $f(x) = C$ où C est une constante. Donner les expressions de toutes les primitives de f.
   (c) Soit $g(x) = Cx$, où C est une constante. Donner les expressions de toutes les primitives de la fonction g.
2. On commence par étudier le mouvement entre $t = 0$ et $t = 2$ secondes. Etablir l'expression de l'évolution de la vitesse $v(t)$ du mobile en fonction du temps t (on supposera que $v(t)$ est une fonction continue du temps). Même question pour la position $x(t)$. Tracer l'évolution de $a(t)$, $v(t)$, $x(t)$. On pourra utiliser le papier millimétré de la page suivante.
3. Mêmes questions entre 2 et 4 secondes. (*Indication : prendre en compte des considérations de continuité*). Noter en particulier à quels instants la vitesse du mobile s'annule. Qu'en est-il du graphe $x(t)$ à ces instants-là ?
4. Quelle est la valeur de la vitesse moyenne entre 0 et 2 s ? Répondre à la question :
   — En utilisant directement le graphe représentant $v(t)$.

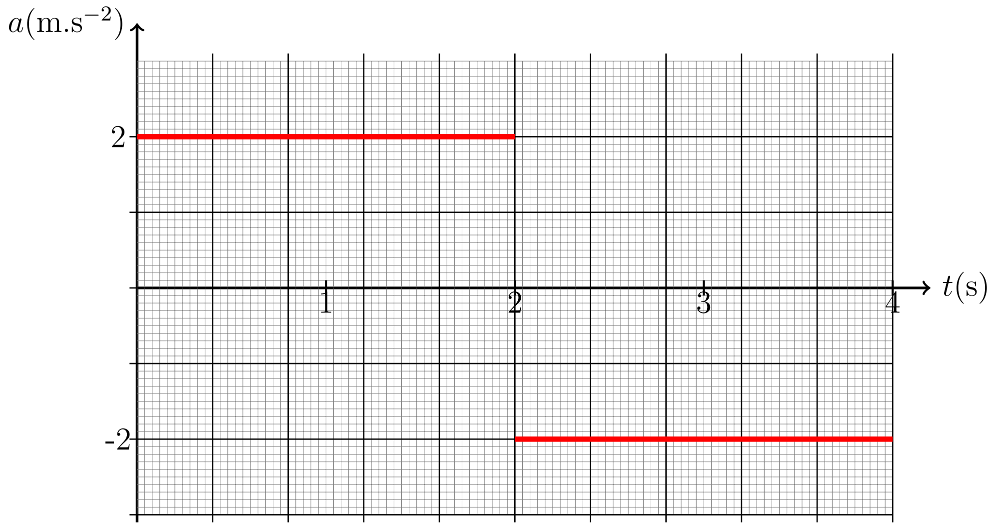

FIGURE 2.2 – *Accélération en fonction du temps.*

2.2 Mouvements dans un plan

Exercice **2.2.1** *(★★)* **Mouvement circulaire uniforme** : Un enfant s'amuse avec un circuit de voitures. On suppose que l'on peut assimiler le comportement d'une voiture à celui d'un point matériel M dans le plan xOy. Le mouvement de la voiture est défini par les équations paramétriques :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x(t) = -2a\sin^2\omega t \\ y(t) = 2a\sin\omega t\cos\omega t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

où on a noté $\sin^2(x) = [\sin(x)]^2$.

1. Etablir l'expression des composantes de la vitesse $\vec{v}$ et de l'accélération $\vec{a}$, en fonction du temps t.
2. *Rappels de mathématiques :* Soit $\vec{v}$ un vecteur du plan. Rappeler l'expression de la norme $\|\vec{v}\|$ en fonction de ses composantes v_1 et v_2 dans une base orthonormée.
3. Montrer que le mouvement est uniforme. C'est à dire que la norme du vecteur vitesse est constante.
4. *Rappels de mathématiques :*
   (a) Rappeler l'expression de $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
   (b) Rappeler l'expression de $\cos(2x)$ en fonction de $\sin^2(x)$.
   (c) Donner l'équation cartésienne d'un cercle de rayon R et dont le centre est le point A de coordonnées (a, b). Pour cela on pourra écrire que tout point M de coordonnées (x, y) est sur le cercle si et seulement si la distance AM est R.
5. Montrer que le mouvement de la voiture est circulaire. On précisera le centre du cercle, la valeur R du rayon.
6. En déduire l'expression de période T du mouvement.
7. On se propose de représenter la trajectoire de la voiture dans le plan xOy : noter sur un schéma la position $M_i; (i = 0, 1, 2)$ du mobile aux instants $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{\pi}{4\omega}$ et $t_2 = \frac{\pi}{2\omega}$ secondes. On prendra $a = 1$ cm et $\omega = 1$ rad.s^{-1}. Représenter les vecteurs vitesse et accélération à ces différents instants.

Exercice **2.2.2** *(★★)* **Trajectoire elliptique** : Une particule M se déplace le long d'une courbe définie, dans un repère $Oxyz$, par les équations paramétriques (fonction du temps t) suivantes :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x(t) = 2a\cos 2\omega t \\ y(t) = 4a\sin 2\omega t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

1. Tracer l'allure de la trajectoire (après avoir reporté quelques points caractéristiques) dans le plan Oxy. On prendra $a = 1$ cm et $\omega = 1$ rad.s^{-1}. Montrer que la trajectoire du point M est bien une ellipse. On donnera les valeur des demi-axes de l'ellipse.

2. Quel est le temps mis par la particule pour faire un tour complet ?
3. Etablir l'expression de la vitesse et celle de l'accélération de la particule. Reporter le vecteur vitesse sur le graphe pour $t = 0$ s et $t = \frac{\pi}{2}$ s. Commenter.

Les coordonnées x, y des points M appartenant à une ellipse de demi-grand axe a et de demi-petit axe b $(a > b)$ vérifient :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

TD 3

Dynamique du point

3.1 Mouvements à une dimension

Exercice 3.1.1 *(★)* **Course de billes** : Deux billes sont lâchées simultanément, sans vitesse initiale, d'un point O sur deux glissières rectilignes de pentes différentes. On considère leur passage en deux points A et B situés sur la même horizontale. On néglige les frottements. Comparer en A et B :

1. *Rappels de mathématiques :*
   (a) On considère un vecteur $\vec{u}$ dans le plan Oxy,. Le vecteur $\vec{u}$ fait un angle α avec l'axe Ox. Donner les expressions des deux composantes u_x et u_y de $\vec{u}$ dans le repère Oxy, en fonction de la norme $\|\vec{u}\|$ et de l'angle α.
   (b) le vecteur $\vec{u}$ fait un angle β avec l'axe Oy. Donner les expressions des deux composantes u_x et u_y de $\vec{u}$ dans le repère Oxy, en fonction de la norme $\|\vec{u}\|$ et de l'angle β.
2. Les accélérations des deux billes.
3. Leurs temps de parcourt depuis O.
4. Leurs vitesses.

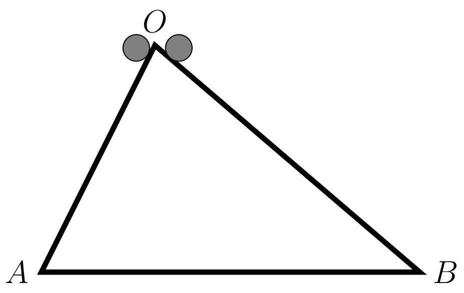

FIGURE 3.1 – *Deux billes sur deux glissières.*

Exercice 3.1.2 *(★)* **Plan incliné** : Un corps de masse m est immobile sur un plan incliné d'un angle α. On note k_s le coefficient de frottement statique et k_d le coefficient de frottement dynamique (dit aussi cinétique).

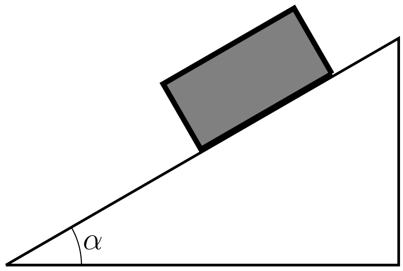

FIGURE 3.2 – *Corps de masse m sur un plan incliné.*

1. Rappeler l'inégalité qui relie les coefficients k_s et k_d.
2. Donner l'expression de l'angle limite α_l tel que pour $\alpha < \alpha_l$ le corps est à l'équilibre.
3. A l'instant $t = 0$, on change l'angle d'inclinaison α de façon soudaine, de telle sorte que $\alpha > \alpha_l$. Déterminer la distance parcourue sur le plan $x(t)$ en fonction du temps t.

Exercice 3.1.3 *(★)* **Ressort** : Un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k est suspendu par une de ses extrémités au point C. Une masse m est accrochée à l'autre extrémité du ressort.

1. **Equilibre :** Déterminer la longueur ℓ_e du ressort à l'équilibre.
2. *Rappels de mathématiques :*
   (a) Donner l'expression de la dérivée première $f'(x)$ et de la dérivée seconde $f''(x)$ de la fonction $f(x) = \sin(ax)$ où $a \in \mathbb{R}$.
   (b) Donner la solution générale (c'est à dire l'ensemble de toutes les solutions) de l'équation différentielle :
   $$f''(x) = -a^2 f(x); \quad a \in \mathbb{R}.$$
3. **Dynamique :** On étire le ressort d'une longueur y_0 à partir de sa position d'équilibre, puis on le lâche sans vitesse initiale. On note O la position de la masse quand elle est à l'équilibre, et on choisit O comme l'origine des coordonnées, pour repérer la position $y(t)$ de la masse.
   (a) Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $y(t)$.
   (b) Donner l'expression de la solution générale (l'ensemble des solutions) de cette équation différentielle. En déduire l'expression de la période T du mouvement, en fonction de k et m. Pourquoi le système est qualifié de harmonique ?
   (c) Donner l'expression de $y(t)$ compte tenu des conditions initiales.

Exercice 3.1.4 *(★)* **Parachutiste** : On considère un parachutiste qui saute d'un avion. Si on néglige les frottements qu'il subit de la part de l'air, son mouvement vertical serait uniformément accéléré. Dans la réalité, ce n'est pas le cas et les frottements jouent donc un rôle important. On donne : coefficient de viscosité de l'air $\eta = 1.18 \times 10^{-5}$ kg.m^{-1}.s^{-1}, accélération de la pesanteur $g = 9.81$ m.s^{-2}, masse volumique de l'air $\rho_a = 1.29$ kg.m^{-3}. Si certaines valeurs numériques vous paraissent manquantes, estimez les.

1. Si ces frottements sont de type fluide, la force de frottement exercé par l'air est de la forme

$$\vec{F} = -20\eta L\vec{v},$$

où L est la taille typique du parachutiste et $\vec{v}$ la vitesse du parachutiste. On néglige la poussée d'Archimède dans l'air. En considérant que le mouvement est vertical, montrer, que le parachutiste atteint une vitesse verticale limite. On estimera cette vitesse limite avec et sans parachute. Donner la valeur numérique de cette vitesse limite en m.s^{-1} et en km.h^{-1}. Commenter.

2. Si la vitesse devient trop élevée, la norme de la force de frottement n'est plus proportionnelle à la norme de la vitesse. Dans ce cas, on peut modéliser la force de frottement par l'expression suivante :

$$\vec{F} = -C\rho_a L^2 \|\vec{v}\|\vec{v}.$$

   (a) Quelle est la dimension de C ? On prendra $C = 1$ SI dans la suite.

   (b) En considérant un mouvement purement vertical, déterminer la vitesse limite de descente du parachutiste. Comparer à celle que vous avez estimée.

Exercice 3.1.5 *(★★)* **Ressorts** : Un anneau de masse m est enfilé sur une tige horizontale de longueur ℓ, que l'on prendra comme axe Ox, porté par le vecteur unitaire $\vec{i}$. L'anneau est reliée à deux ressorts comme le montre la figure 3.4. Le premier ressort de raideur k_1 et de longueur à vide ℓ_1^o est fixé à une extrémité de la tige O. L'autre ressort, de raideur k_2 et de longueur à vide ℓ_2^o est fixé à l'autre extrémité de la tige. On supposera l'anneau ponctuel et on négligera tous les frottements.

1. Déterminer les longueurs de chacun des ressorts ℓ_1^e et ℓ_2^e, lorsque l'anneau est à l'équilibre en M_e.
2. A l'instant $t = 0$, on écarte l'anneau de sa position d'équilibre pour l'amener en M_0, et on le lache sans vitesse initiale. On note $M(t)$ la position de l'anneau à l'instant t et on définit $x(t) = \left(\overrightarrow{OM}(t) - \overrightarrow{OM_e}\right) \cdot \vec{i}$. Donner l'équation différentielle satisfaite par $x(t)$.
3. Donner l'expression de $x(t)$ en fonction du temps t. En déduire la période, et l'amplitude du mouvement de l'anneau.

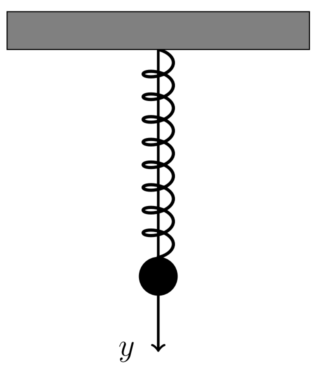

FIGURE 3.3 – 3.4 Une masse suspendue à un ressort.

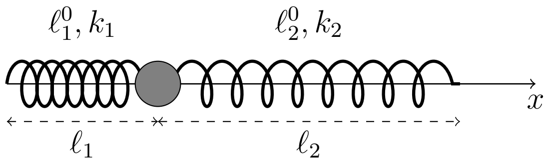

FIGURE 3.4 – *un anneau accroché à deux ressorts*

3.2 Mouvements à deux dimensions

Exercice 3.2.1 *(★)* **Balistique** :

1. **Sans frottement :** A l'instant $t = 0$, on lance du point O, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$, un projectile ponctuel M de masse m ; $\vec{v}_0$ fait un angle α_0 avec le plan horizontal et la projection de $\vec{v}_0$ sur ce plan est portée par Ox. On suppose que l'accélération de la pesanteur est indépendante de l'altitude z. On suppose que le mouvement est un mouvement de chute libre dans le vide.
   (a) Calculer la vitesse du projectile à l'instant t.
   (b) Quelles sont les équations horaires du mouvement $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$. Commentaires.
   (c) Quelle est l'équation de la trajectoire ? Pour quelle valeur de α_0 la portée est-elle maximum ?
2. **Avec frottement :** On reprend le problème précédent en supposant que le projectile est soumis à une force de freinage proportionnelle à sa vitesse $\vec{f} = -k\vec{v}$ (k étant une constante positive).
   (a) *Rappels de mathématiques :*
      i. Rappeler l'expression de la dérivée de la fonction $f(u) = e^u$ et de la fonction $g(u) = e^{-au}$, où a est une constante réelle.
      ii. Donner l'expression de la solution générale de l'équation différentielle :
      $$f'(x) + af(x) = 0$$
      iii. Donner l'expression de la solution générale de l'équation différentielle :
      $$f'(x) + af(x) = b$$
   (b) Établir les équations différentielles du mouvement. On écrira les équations différentielles satisfaites par les composantes (v_x, v_y, v_z) du vecteur vitesse
   (c) En déduire la vitesse à l'instant t. Que se passe-t-il quand t tend vers l'infini ?
   (d) Quelles sont les équations horaires du mouvement $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$? Montrer que lorsque t tend vers l'infini, la trajectoire admet une asymptote. Donner l'allure de cette trajectoire.
   (e) (*Facultatif*) Montrer que si le coefficient de frottement k est suffisamment faible, on retrouve les équations de la chute libre dans le vide (*faire un développement limité à l'aide de la formule de Taylor*).

TD 4

Energie

4.1 Energie – Puissance

Exercice 4.1.1 *(★)* **Télévision du XXième siècle** : Donner la valeur de la vitesse d'un électron dans un tube de télévision sachant qu'il frappe l'écran avec une énergie $E_c = 18$ keV.

Exercice 4.1.2 *(★)* **Ascenseur** : Un ascenseur monte cinq personnes pesant chacune 70 kg d'une hauteur de 25 m à vitesse constante en une minute. L'ascenseur pèse 500 kg à vide. Calculer la puissance de la force exercée par le moteur, puis la puissance du poids de l'ascenseur. Préciser leur nature (motrice/résistante). Calculer le travail du poids

Exercice 4.1.3 *(★)* **Production d'électricité** : La production d'électricité nucléaire en 2010 en France a été de 429 TWh.

1. Quelle quantité physique représente l'unité TWh.
2. Donner la valeur en Joule de l'énergie électrique nucléaire produite en 2010.
3. En France, 58 réacteurs nucléaires sont en service. Quelle est, en moyenne, la puissance électrique délivrée par réacteur nucléaire.

4.2 Travail d'une force – Théorème de l'énergie cinétique

Exercice 4.2.1 *(★)* **Force constante** : Un corps de masse m est astreint à se déplacer sans frottement en ligne droite. Il possède une vitesse initiale $\vec{v}_0$. Une force constante $\vec{F}$, colinéaire à $\vec{v}_0$ et de même sens que $\vec{v}_0$, agit sur ce corps pendant un temps T.

1. Calculer le travail accompli par la force.
2. Quel est l'accroissement de l'énergie cinétique ? Donner l'énergie cinétique finale.
3. Calculer la puissance instantanée puis la puissance moyenne développée. Illustrer ces deux quantités en traçant la puissance instantanée en fonction du temps.
   AN : $\|\overrightarrow{F}\| = 100$ N, $T = 10$ s, $m = 1$ kg et $\|\vec{v}_0\| = 2$ m/s.

Exercice 4.2.2 *(★)* **Frottement** : Un point matériel M, de masse m se déplace en frottant sur un rail rectiligne et horizontal. La norme de la force de frottement solide est constante, égale à $\|\vec{F}\| = kmg$, où k est le coefficient de frottement solide et g l'accélération de la pesanteur. La position du point est repérée par son abscisse x. A $t = 0$, M est en $x = 0$ et il est lancé avec la vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}$, où $\vec{i}$ est un vecteur unitaire dans la direction du rail.

1. La force de frottement est-elle conservative ?
2. Calculer le travail effectué par la force de frottement lorsque M s'est déplacé d'une distance x.
3. En déduire la vitesse de M en fonction de x.
4. M s'arrête-t-il ? Si oui, en quel point ?

Exercice 4.2.3 *(★★)* **Traîneau** : On lâche un traîneau au sommet C d'une pente inclinée, faisant un angle β avec l'horizontale. La piste étant enneigée et le sol durci par le gel, la réaction du plan incliné comporte une composante normale $\vec{R}$ et une force de frottement $\vec{f}$ parallèle au plan incliné.

1. **Statique:**
   On suppose que le frottement est suffisant pour que le traîneau reste immobile sur la pente inlinée. On rappelle que le coefficient de *frottement statique* k_s est défini par :
   $$k_s = \frac{\|\overrightarrow{f_{\max}}\|}{\|\vec{R}\|} \tag{4.1}$$
   où $\|\overrightarrow{f_{\max}}\|$ est la norme maximale de la force de frottement $\vec{f}$ que le contact peut fournir tout en maintenant le traîneau immobile.
   (a) Exprimer les normes de $\vec{f}$ et de $\vec{R}$ en fonction de m, β et l'accélération de la pesanteur g.
   (b) En déduire une relation entre le coefficient de frottement statique k_s et l'angle β pour que le traîneau se mette en mouvement.
   (c) A.N. : vérifier que cette relation est bien satisfaite avec $k_s = 0.1$ (frottement métal sur glace) et $\beta = 60°$.
2. **Dynamique:**
   Le traîneau est maintenant en mouvement, on note $\vec{f'}$ la force de frottement dynamique. Il termine en D son mouvement sur la piste inclinée puis se déplace sur une piste horizontale, de même nature que la piste CD, jusqu'à son arrêt au point E. On note $\ell = CD$ et $\ell' = DE$ et k_d le coefficient de frottement dynamique.
   (a) Calculer le travail W_{CD} de la résultante des forces appliquées au traîneau sur le trajet incliné CD. On exprimera W_{CD} en fonction de k_d, ℓ, β, m et g.
   (b) Calculer le travail W_{DE} de la résultante des forces appliquées au traîneau sur le trajet horizontal DE. On exprimera W_{DE} en fonction de k_d, ℓ', β, m et g.
   (c) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, exprimer k_d en fonction du rapport $r = \frac{\ell'}{\ell}$ et de β.
   (d) A.N : calculer ℓ' sachant que $\ell = 5$ m, $k_d = 0.05$ et $\beta = 60°$.

4.3 Energie potentielle

Exercice 4.3.1 *(★)* **Energie potentielle gravitationnelle** : On considère un objet de masse m soumis au champ de gravitation terrestre (on notera M la masse de la terre).

1. Rappeler l'expression de la force gravitationnelle $\vec{F}_G$ à l'altitude h.
2. *Rappel de mathématiques :* Donner l'expression du développement limité au second ordre de la fonction $f(x) = (1+x)^n$, dans le voisinage de zéro.
3. Si $h \ll R_T$, le rayon terrestre, donner une approximation de la force $\vec{F}_G$. Déduire l'énergie potentielle gravitationnelle à petite altitude. Exprimer g en fonction de G, M et R_T.
4. *Rappels de mathématiques :* Donner l'expression des primitives de la fonction $f(x) = \frac{K}{x^2}$.
5. Donner l'expression générale de l'énergie potentielle gravitationnelle pour une hauteur h quelconque.

Exercice 4.3.2 *(★)* **Energie potentielle élastique** : Une masse m se déplaçant horizontalement sur un axe, que l'on appelle Ox, est attachée à l'extrémité d'un ressort. On repère la position de la masse par son abcisse $x(t)$. On choisit l'origine des abcissses $x = 0$ comme étant la position d'équilibre de la masse. On note $\vec{i}$ le vecteur unitaire dans la direction et le sens de Ox.

1. *Rappels de mathématiques :* Donner l'expression des primirives de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des constantes réelles quelconques.
2. Rappeler l'expression de la force de rappel $\vec{F}(x) = F(x)\vec{i}$ en fonction de x. En déduire l'expression de l'énergie potentielle $E_p(x)$ dont elle dérive. Tracer le graphe représentant $E_p(x)$.
3. L'axe est tourné de 90° et la masse subit maintenant son poids en plus de la force de rappel. Donner l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle. Quelle est la forme de l'énergie potentielle totale (gravitationnelle + élastique) ? Conclusion ?

4.4 Systèmes conservatifs

Exercice 4.4.1 *(★)* **Forces conservatives** : On considère une particule se mouvant le long d'une droite Ox, repérée par une coordonnée $x(t)$. On note $\vec{i}$ un vecteur unitaire dans la direction et le sens de Ox.

1. *Rappels mathématiques :* Donner les expressions des primitives des fonctions suivantes
$$f(x) = 2; \quad g(x) = Ax; \quad h(x) = -\frac{K}{x^2},$$
où A et K sont des constantes réelles.
2. Rappeler la définition d'une conservative.
3. Les forces suivantes sont-elles conservatives ? Si c'est le cas, donner l'expression de l'énergie potentielle associée.

(a) La force de gravitation qu'exerce une masse M située en O sur une masse m située au point $x\vec{i}$: $\vec{F}(x) = -\frac{GmM}{x^2}\vec{i}$, où G est la constante universelle de le gravitation.

(b) La force de gravitation exercée sur une masse m à une hauteur z faible de la surface de la Terre. On effectuera un développement limité de la force $\vec{F}(x)$ de la question précédente, lorsque la valeur de x est proche de celle du rayon de la Terre R. C'est a dire que $x = R+z$, avec $z \ll R$.

(c) La force de rappel d'un ressort $\vec{F} = -kx\vec{i}$.

(d) La force de frottement fluide $\vec{F} = -\gamma\dot{x}\vec{i}$?

(e) Une force de frottement solide, qui est constante lors du déplacement du mobile sur son support.

Exercice 4.4.2 *(★)* **Energie gravitationnelle** : On donne $g = 9.8$ m.s^{-2}.

1. Quelle est l'énergie potentielle d'une masse de 1 kg à 1 km d'altitude ? L'energie potentielle est choisie nulle à la surface du sol.
2. Quelle est l'énergie cinétique quand cette masse, lâchée à 1 km d'altitude, touche le sol ? On négligera le frottement.
3. Quelles sont les énergies cinétique et potentielle au milieu de la chute ? Commentaire.

Exercice 4.4.3 *(★)* **Déplacement d'une masse** :

1. Quel travail doit-on fournir pour élever une masse M d'une même hauteur h, soit verticalement, soit en tirant sans frottement sur un plan incliné d'un angle α avec l'horizontale, à la même vitesse considérée comme constante ?
2. Quelle puissance doit-on développer pour effectuer ce travail ?
3. Quel est le travail du poids pendant ce mouvement ? Est-il positif ou négatif ? Comment le travail à fournir serait-il modifié s'il existait des forces de frottement sur l'air ou sur le plan incliné ?

Exercice 4.4.4 *(★)* **Masse uniformément accélérée** :

1. Quel travail doit-on fournir pour élever une masse M, initialement au repos, d'une hauteur h selon un mouvement uniformément accéléré, avec une accélération $\vec{a}$?
2. Quelle puissance doit-on développer pour faire effectuer ce mouvement à la masse ? Est-elle constante au cours du temps ?
3. Quelles sont alors les variations d'énergie potentielle et cinétique correspondantes ?
4. Si, à la fin de l'accélération, on lâche la masse M, jusqu'à quelle hauteur va-t-elle monter ? Quelles sont alors son énergie potentielle et son énergie cinétique ?

Exercice 4.4.5 *(★)* **Masse lâchée sur un ressort.** : On considère un ressort, de raideur k, vertical et dont l'extrémité la plus basse est fixée. L'extrémité la plus haute est libre et la longueur du ressort est sa longueur à vide ℓ_0. On lâche un objet de masse m, sans vitesse initiale, d'une hauteur $z = h$ au dessus de l'extrémité libre du ressort que l'on prend comme origine des coordonnées $z = 0$. Quelle est position la plus basse atteinte par la masse ?

Exercice 4.4.6 *(★★)* **Vitesse de libération** : On rappelle que l'énergie potentielle gravitationnelle d'un objet de masse m à distance r du centre de gravité d'une planète de masse M est

$$E_p(r) = -\frac{GMm}{r}.$$

1. Comment définir la "*vitesse de libération*" ?
2. Déterminer l'expression de vitesse de libération puis déterminer sa valeur pour la Terre.
   AN : On donne $M_{\text{Terre}} = 5.97 \times 10^{24}$ kg et $G = 6.67 \times 10^{-11}$ kg^{-1}m^{3}s^{-2}.
3. Pouvez-vous expliquer pourquoi la lune n'a pas d'atmosphère ? On donne $M_{\text{Lune}} = 7.36 \times 10^{22}$ kg.

Exercice 4.4.7 *(★★)* **Positron** : Un positron de charge e, de masse m, est lancé en direction d'un ion lourd, de charge e, supposé immobile en O. Le mouvement est rectiligne suivant l'axe Ox. La vitesse initiale quand le positron est à l'infini est $-v_0\vec{i}$ avec $v_0 > 0$. La force qui s'exerce sur le positron est $\vec{F} = \frac{ke^2}{x^2}\vec{i}$ où k est une constante positive.

1. Décrire qualitativement le mouvement.
2. Ecrire l'équation différentielle satisfaite par $x(t)$. Sait-on la résoudre ?
3. Calculer le travail de $\vec{F}$ sur le segment AB, A d'abscisse $a > 0$, B d'abscisse $b > a$. Que devient ce travail quand b tend vers l'infini ?
4. Calculer l'énergie potentielle $U(x)$ avec $\lim_{x\to\infty} U(x) = 0$. Vérifier le théorème de l'énergie mécanique. Tracer le graphe de $U(x)$.
5. Exprimer l'énergie mécanique E en fonction de x, de $\dot{x}$ et des constantes. Expliquer pourquoi elle se conserve. Donner sa valeur en fonction de m et v_0.
6. Montrer que x ne peut pas prendre des valeurs trop petites. Déterminer l'expression de $x_{\min}$, la valeur minimum de x.
7. A.N. : On donne $k = 9 \times 10^9$ N.m^2.C^{-2}, $v_0 = 2 \times 10^6$ m.s^{-1}, $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C, $m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg. Calculer $x_{\min}$.
8. Le positron passe deux fois au même point. Comparer les deux vitesses. Exprimer la vitesse en fonction de v_0, x et $x_{\min}$. Calculer la vitesse quand le positron est à l'abscisse $2x_{\min}$.

Exercice 4.4.8 *(★★)* **Particule soumise à une force conservative** : On considère une particule se déplaçant sur un axe Ox, repérée par son abscisse x, et soumise à une force conservative dérivant d'une énergie potentielle $V(x)$. Tracer l'allure de la norme de sa vitesse $v(t)$, sur l'axe Ox, puis de $x(t)$ si l'énergie mécanique vaut E_1, puis E_2 dans les deux cas présentés sur la figure 4.1. On envisagera différentes conditions initiales.

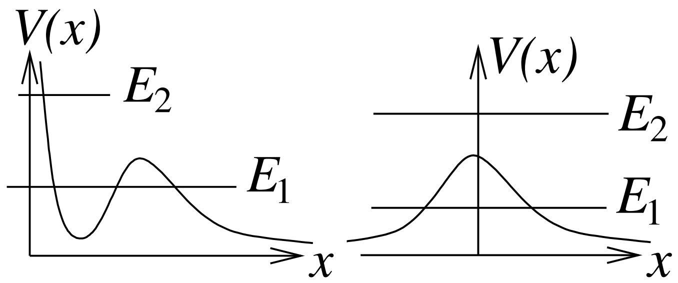

FIGURE 4.1 – Energies potentielles

TD 5

Oscillations

5.1 Oscillations Amorties

Exercice 5.1.1 *(★★)* **Dynamomètre** : Un dynamomètre est constitué d'un ressort de raideur k suspendu verticalement par l'une de ses extrémité. Le ressort est freiné par un amortisseur à frottement visqueux de constante de frottement λ. A l'autre extrémité du ressort, on peut suspendre une masse. A l'instant $t = 0$, on attache une masse m à l'extrémité du ressort initialement immobile. Après un certains temps T, le ressort, auquel la masse m est maintenant accrochée redevient quasiment immobile. En mesurant l'allongement z^e du ressort, on en déduit la valeur de la masse m que l'on a suspendu.

1. Déterminer l'allongement z_e final du ressort, en fonction de k, m et g. Pour des raisons d'encombrement, on souhaite que $z_e < 2$ cm. En déduire une contrainte sur $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
2. Faire un bilan des forces s'exerçant su la masse m. Décrire qualitativement les différents types de mouvement possibles de la masse m avant son immobilisation. Quel est le type de mouvement le plus approprié pour le dynamomètre.
3. A l'aide du PFD, établir l'équation différentielle satisfaite par l'élongation $z(t)$ du ressort. On notera $\tau = \frac{2m}{\lambda}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
4. En déduire la solution générale de cette équation différentielle puis la solution satisfaisant les conditions initiales. On identifiera les deux types de régime d'amortissement et on choisira celui qui est le plus approprié pour l'usage que l'on veut faire de ce dynamomètre.
5. On considère que la masse est immobile à l'instant t_f, si $|\frac{z(t_f)-z_e}{z_e}| < 1\%$. Donner une approximation de t_f. Comment dépend-il de la masse m ? Pour répondre à cette question, on pourra considérer qu'à $t = t_f$, une des deux exponentielles est négligeable devant l'autre.

5.2 Oscillation forcées

Exercice 5.2.1 *(★★)* **Viscosimètre** : Une petite sphère magnétique de masse m et de rayon r est plongée dans un liquide de viscosité η. On s'arrange, grâce à un système magnétique, pour que l'ensemble poids de la bille + poussée d'Archimède soit compensé. La bille est donc à l'équilibre. On soumet la bille à un champ magnétique supplémentaire, oscillant, de direction constante, qui exerce une force $\vec{F} = F_0 \cos(\omega t)\vec{i}$. La viscosité du milieu crée une force de frottement $\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse de la bille.

1. A l'aide du principe fondamental de la dynamique puis en posant $\vec{F} = \mathrm{Re}\left[F_0 e^{i\omega t}\right]\vec{i}$ et $\vec{v}(t) = \mathrm{Re}\left[\mathcal{V}(t)e^{i\omega t}\right]\vec{i}$, écrire l'équation différentielle à laquelle obéit $\mathcal{V}(t) \in \mathbb{C}$.
2. Déterminer la solution générale (l'ensemble des solutions) $\mathcal{V}(t) \in \mathbb{C}$ de cette équation différentielle. Vérifier l'homogénéité de l'expression obtenue.
3. En déduire l'ensemble des solutions physiques $\vec{v}(t) \in \mathbb{R}$.
4. Montrer que $\vec{v}(t)$ comporte un terme représentant un régime transitoire et un terme correspondant à un régime permanent. On pourra supposer que $\vec{v}(t = 0) = \vec{0}$. On souhaite négliger le terme transitoire, de telle sorte que cette approximation n'introduise pas une erreur supérieure à 4%. Donner une condition sur le temps t pour que cette approximation soit satisfaisante.
   A.N. : $\eta = 1.5$ Pa.s, $r = 1$ cm, $m = 100$ g. On donne $\ln(25) \simeq 3.2$.
5. Expliquer comment ce dispositif peut servir à mesurer la viscosité du milieu.

Exercice 5.2.2 *(★★)* **Amortisseur de voiture** : Un amortisseur d'une voiture de masse $4m$ est modélisé par un ressort de raideur k et un frottement visqueux de contante de frottement λ, relié à la roue (voir figure 5.1). On s'intéresse uniquement au déplacement vertical $z(t)$ de la voiture. On se place dans le cas où le véhicule se déplace avec une vitesse, dont la composante horizontale v_x est constante, sur une route à profil sinusoidal. La hauteur de la route $z_r(x)$ en fonction du déplacement horizontal x est donnée par l'expression :

$$z_r = h \sin(2\pi x/L)$$

1. Quelle est la signification physique de L ?
2. Etablir l'équation différentielle satisfaite par $z(t)$, On supposera que la masse de la voiture est uniformément répartie sur les 4 amortisseurs.
3. En déduire l'amplitude Z du mouvement vertical de la voiture.
4. Application numérique : $m = 350$ kg, $k = 350$ kN/m, $v_x = 100$ km/h, $L = 5$ m, $h = 20$ cm.
   (a) pour $\lambda = 2000$ N s/m,
   (b) pour $\lambda = 200$ N s/m,

FIGURE 5.1 – Modèle d'un amortisseur