

– ARNE KELLER – CHRISTOPHE TEXIER –

MÉCANIQUE I  
*NOTES DE COURS*

UNIVERSITÉ PARIS-SUD



## *Table des matières*

<i>1</i>	<i>Introduction</i>	5
<i>2</i>	<i>Cinématique</i>	15
<i>3</i>	<i>Dynamique</i>	21
<i>4</i>	<i>Energie</i>	41
<i>5</i>	<i>Oscillations</i>	65
<i>A</i>	<i>Trigonometrie</i>	91
<i>B</i>	<i>Vecteurs</i>	97
<i>C</i>	<i>Equations différentielles</i>	101
<i>D</i>	<i>Signaux sinusoidaux – Signaux analytiques</i>	113
<i>E</i>	<i>Dérivée d'une fonction</i>	119
<i>F</i>	<i>Intégration des fonctions</i>	125

*G* *La mesure – Incertitudes et calcul des variations* 131

# 1

## *Introduction*

LA MÉCANIQUE dite *classique* est la théorie physique qui traite du mouvement des objets qui sont macroscopiques et qui se déplace à des vitesses faible par rapport à la vitesse de la lumière. Comme toute théorie physique, elle repose sur un formalisme mathématique qui lui permet d'analyser les causes du mouvement des corps et de prédire leur évolution future.

### *1.1 La place de la mécanique newtonienne parmi les théories physiques fondamentales*

La mécanique est la première théorie du mouvement, et même la première théorie de physique fondamentale. C'est à la fin du XVIIème siècle qu'est née la *mécanique newtonienne*, ou *mécanique classique* à l'issue des travaux d'Isaac Newton publiés en 1687 dans son ouvrage *Philosophiæ naturalis principia mathematica* : Principes mathématiques de la philosophie naturelle. La mécanique classique a pu être formulée grâce au développement en Mathématiques du calcul différentiel par notamment Leibniz et Newton.<sup>1</sup> La mécanique classique a été construite à partir de l'analyse d'expériences ou d'observations sur le mouvement des corps matériels à échelle humaine et le mouvement des planètes. Elle résulte de nombreux travaux de philosophes et mathématiciens qui ont précédé Newton depuis l'antiquité, notamment Aristote et Archimède, à la renaissance, notamment Galilée et Kepler. Grâce à l'introduction de la loi de la gravitation universelle, la théorie de Newton a permis d'unifier deux branches jusque-là séparée de la physique : celle dédiée à l'étude de la chute des corps (étudiée notamment par Galilée) et celle dédiée à l'étude du mouvement des corps célestes (étudiée notamment par Kepler).

La mécanique classique se base sur un petit nombre de postulats (« axiomes ») à partir de concepts cinématiques (position, vitesse, accélération,...) et dynamique (forces, énergie,...). Bien qu'elle ait eu des

1. La plupart des théories physiques ont pu être formulées grâce au développement d'un nouveau formalisme mathématique. C'est le cas notamment de la Relativité Générale d'Einstein qui repose sur la géométrie différentielle.

succès remarquables, qui ont probablement culminé avec la description extrêmement précise du mouvement des planètes du système solaire au XIX<sup>ème</sup> siècle, les progrès techniques, qui ont permis d'améliorer la précision des mesures et d'explorer les lois physiques à de nouvelles échelles, ont mis à jour des désaccords profonds avec certaines prédictions de la mécanique classique. On sait aujourd'hui que la mécanique newtonienne possède des limitations et qu'elle n'est qu'une forme approchée d'autres théories plus fondamentales.<sup>2</sup>

- *Aller vers les hautes énergies – la théorie de la relativité* : lorsque la vitesse d'un objet atteint une vitesse comparable à la vitesse de la lumière  $c \simeq 300\,000\text{ km/s}$ , sa dynamique n'est plus prédite par les lois de la mécanique classique. De nos jours, ces conditions sont réalisées couramment dans les accélérateurs de particules élémentaires. En cherchant à résoudre le problème d'incompatibilité entre mécanique newtonienne et électromagnétisme, Einstein a proposé au début du XX<sup>ème</sup> siècle d'autres lois pour décrire la dynamique des particules matérielles, la *mécanique einsteinienne* (« relativité restreinte »), remettant en particulier en cause la conception de l'espace-temps galiléo-newtonien. Cette nouvelle conception de la structure de l'espace-temps apporte un nouveau regard sur la nature de la l'interaction gravitationnelle. C'est la théorie de la *relativité générale*. Les corrections apportées par la relativité générale sont aujourd'hui prises en compte dans le système de localisation GPS.

- *Tendre à l'élémentarité (réduire la taille) – la mécanique quantique* : l'étude de la structure de la matière a conduit les physiciens à développer des outils permettant d'analyser des échelles de plus en plus petites. L'existence d'une échelle élémentaire (atomique) a suscité de vifs débats pendant plusieurs décennies au XIX<sup>ème</sup> siècle, entre une approche « énergétiste » promouvant une description continue des milieux matériels et s'inscrivant dans un courant de pensée holiste, et une approche « atomiste » suivant une logique réductionniste. La preuve indiscutable de l'existence des atomes fût fournie par les expériences de Jean Perrin au début du XX<sup>ème</sup> siècle. Depuis, divers types d'appareils devenus d'usage courant en laboratoire permettent de « voir » assez directement les atomes : les microscopes à effet tunnel, microscopes à force atomique, etc. L'étude des phénomènes aux échelles atomiques ( $10^{-10}\text{ m}$ ) ou subatomiques a rapidement mis à jour l'incompatibilité entre théorie du rayonnement (électromagnétisme) et description newtonienne des corps matériels. Précisément, la difficulté porte sur la compréhension des processus d'interaction entre matière et rayonnement (absorption et émission de l'énergie du rayonnement par la matière). Le dépassement de ces difficultés a donné naissance, à la fin des années 1920, à une autre théorie permettant de décrire la dynamique des objets aux échelles les plus élé-

2. « fondamentale » au sens de « fondements ».

mentaires : la *mécanique quantique*. Le bouleversement fût d'autant plus grand que, contrairement au passage de la mécanique newtonienne à la mécanique einsteinienne, qui conserve en gros les outils cinématiques, la mécanique quantique est basée sur un langage radicalement différent de celui de la mécanique newtonienne. Avec du recul, il n'est pas surprenant que cette dernière, dont les axiomes ont été inspirés de l'analyse de phénomènes à l'échelle macroscopique (disons  $\ell \gtrsim 10^{-3}$  m), soit incapable de décrire les phénomènes à  $\ell \lesssim 10^{-10}$  m.

Depuis les premiers temps de la mécanique quantique, les progrès technologiques ont permis de déplacer sensiblement les frontières entre classique et quantique : les phénomènes quantiques ne sont plus seulement limités aux échelles extrêmement petites et de nombreuses manifestations de la mécanique quantique existent aussi aux échelles macroscopiques, telles les phénomènes spectaculaires de superfluidité, supraconductivité, etc. De nombreuses applications courantes aujourd'hui sont basées sur des phénomènes quantiques comme par exemple : le laser, la conduction électrique, les semi-conducteurs, le magnétisme des surfaces (disques durs), etc.

- *Augmenter la complexité – la thermodynamique et la physique statistique* : la seconde moitié du XIX<sup>ème</sup> siècle a vu l'émergence d'une autre théorie fondamentale : la *thermodynamique*. Même si elle met en jeu des concepts communs avec la mécanique newtonienne, comme l'énergie. L'approche extrêmement fructueuse de la thermodynamique s'inscrit dans le cadre d'une description continue de la matière (par opposition à « atomiste »). C'est Boltzmann, suivant les travaux précurseurs de Clausius et Maxwell, qui introduisit les concepts permettant de faire le lien entre une description mécanique à l'échelle élémentaire (atomiste) et la description continue à l'échelle « macroscopique », ce qui a donné naissance à une autre théorie fondamentale : la *physique statistique*. En bénéficiant de la complexité de la dynamique des systèmes à très grand nombre de degrés de liberté (les gaz d'atomes par exemple), la description déterministe de la dynamique des particules à l'échelle atomique est remplacée par une description probabiliste des processus élémentaires.

*Ce qui sera discuté dans le cours (et ce que nous n'aborderons pas)*

Cette vue d'ensemble des grandes « théories cadres » de la physique nous permet de situer le matériel présenté dans ces notes qui proposent une **introduction** à la *mécanique classique*, dans laquelle nous ne traiterons que le problème des points matériels. Ce sont des systèmes idéalisés où on considère que les masses sont concentrées en des points infiniment petits. Cette première approche bien que très idéalisée, permet en fait de décrire, dans de nombreuses situations, le mouvement du centre de masse d'un solide étendu. Ni l'étude des mouvements dans l'espace (ro-

tation, moment cinétique,...), ni les problèmes de collisions (conservation de l'impulsion, chocs,...) seront traités dans ce cours. Ces notions seront abordées dans le cours « Mécanique II » du second semestre. Les outils permettant d'analyser la dynamique des corps matériels étendus, la « mécanique du solide », sera abordée plus tard dans un autre cours.

Malgré ces restrictions, on pourra déjà entrevoir la structure de *la première théorie physique fondamentale* de l'histoire de l'humanité, qui reste encore aujourd'hui, malgré ses limitations, d'une formidable efficacité.

## 1.2 Les constantes fondamentales en physique

La mécanique newtonienne est une forme approchée, ou simplifiée, de la mécanique einsteinienne et de la mécanique quantique (il existe également une version relativiste de la mécanique quantique : la théorie quantique des champs qui est donc le cadre le plus général). Les constantes fondamentales de la physique jouent un rôle important pour définir le domaine de validité de la mécanique newtonienne :

- La théorie de la relativité restreinte (« mécanique einsteinienne ») fait intervenir la célérité de la lumière  $c$ . Si la vitesse du corps matériel considéré est  $v \ll c$ , alors les prédictions de la mécanique newtonienne sont valables.
- La constante fondamentale de la mécanique quantique est la constante de Planck  $\hbar$ . Elle représente une grandeur physique appelée « action », ayant la dimension [position]  $\times$  [impulsion]. Si l'action caractéristique du problème est  $\gg \hbar$ , alors il sera légitime de se placer dans le cadre classique.
- Enfin, la physique statistique fait intervenir la constante de Boltzmann  $k_B$  (reliée au nombre d'Avogadro et à la constante des gaz parfaits par  $R = \mathcal{N}_A k_B$ ).  $k_B$  a la dimension d'une entropie et fournit une unité de mesure du manque d'information. Si l'entropie (le manque d'information) est petite devant  $k_B$ , alors l'état du système est défini avec une probabilité voisine de l'unité et l'on peut considérer l'évolution du système comme déterministe.
- Il existe d'autres constantes fondamentales qui elles permettent de définir l'intensité des différentes forces ou interactions fondamentales. Par exemple la constante de gravitation universelle  $G = 6.67384(80) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$  permet de définir l'intensité de la force gravitationnelle.

L'association de différentes constantes fondamentales permet de définir une théorie physique. Quelques exemples sont donnés dans le tableau suivant :



$c$	Relativité restreinte d'Einstein
$\hbar$	Mécanique quantique
$G$	Théorie de la gravitation universelle de Newton
$c, \hbar$	Théorie quantique des champs
$c, G$	Théorie de la relativité générale d'Einstein
$c, \hbar, G$	Théorie de la gravitation quantique, en construction...

TABLE 1.1: Quelques exemples de théories physiques et les constantes fondamentales sur lesquelles elles reposent.

### 1.3 Les interactions fondamentales

Un concept essentiel en mécanique est celui de « force » (ou « interaction »). Les problèmes que nous considérerons feront intervenir différents types de forces, de nature fondamentale (comme l'interaction coulombienne) ou phénoménologique (comme la force de rappel d'un ressort). Il existe quatre interactions fondamentales que l'on peut distinguer par leur intensité et par leur portée, voir figure 1.1. Les plus connues sont la

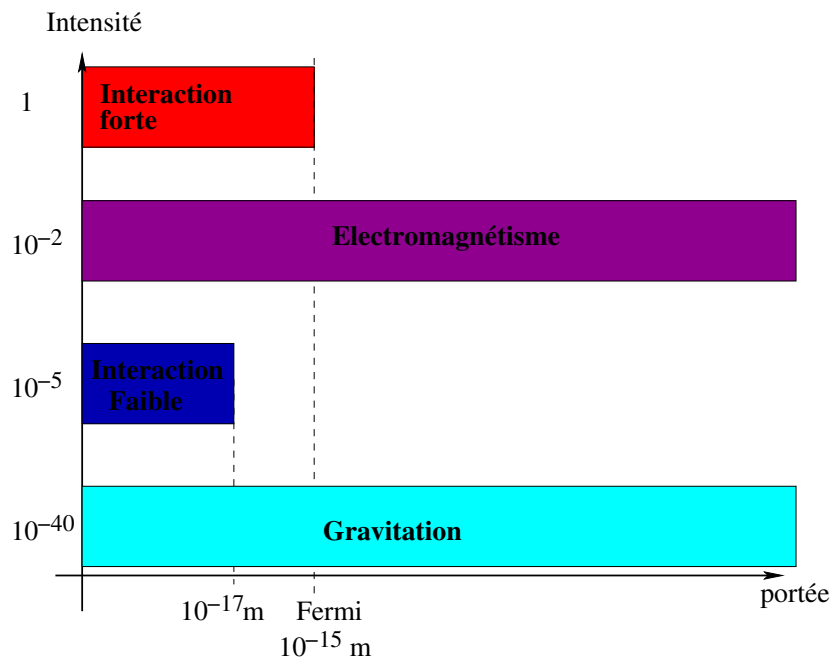


FIGURE 1.1: Les quatre interactions fondamentales.

gravitation et l'électromagnétisme. Elles ont toutes les deux une portée infinie. Deux masses interagissent par la gravitation avec une force qui dépend de l'inverse du carré de leur distance respective, de même que deux charges interagissent par la force de Coulomb. La force de gravitation est beaucoup plus faible que l'interaction électromagnétisme. La gravitation est donc souvent négligée lorsqu'on s'intéresse à l'interaction entre particules chargées. Néanmoins, il existe des charges positives et négatives, alors qu'il n'existe pas de masse négative. La force de gravitation est donc toujours attractive alors que la force électromagnétique

peut être répulsive (lorsque les charges ont même signes) ou attractive (lorsque les charges possèdent des signes opposés). C'est pour cette raison qu'en générale la force électromagnétique n'a pas d'influence sur de grandes distances. En effet, si on met une charge positive en un point de l'espace, elle va attirer des charges négatives et former un système neutre (comme un atome ou une molécule par exemple).

La plus intense des 4 interactions est *l'interaction forte*, qui est responsable de la cohésion des noyaux des atomes. En effet, les noyaux des atomes sont constitués de charges positives, les protons, qui sont très proches les uns des autres ( $\simeq 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ ). L'intensité de la force électromagnétique entre les deux charges des protons est donnée par :

$$F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d^2},$$

où  $d$  est la distance séparant les deux protons dans le noyau et  $e = 1.6e^{-19} \text{ C}$  est la charge du proton.  $\epsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$  est une constante fondamentale appelée la permittivité du vide. En prenant  $d = 1 \times 10^{-15} \text{ m}$ , on trouve  $F \simeq 200 \text{ N}$ . Il faut donc une force qui compense cette force électrostatique ; c'est l'interaction forte. Cette interaction est de courte portée et n'agit que sur des distances de l'ordre de la taille des noyaux.

La dernière des quatre interactions est *l'interaction faible*. Cette interaction est responsable de certaines réactions nucléaires en particulier la désintégration radioactive beta, qui permet par exemple la désintégration d'un noyau de carbone 14 en azote 14 où un neutron est devenu un proton et est accompagné de l'émission d'un antineutrino et d'un électron. Cette interaction est de très courte portée. Sa portée est encore plus faible que celle de l'interaction forte.

#### 1.4 Les grandeurs physiques – Dimensions et unités

La notion de grandeur ou quantité physique est basée sur l'expérience et sur les résultats de mesures. Parmi les grandeurs physiques mesurées certaines peuvent être comparées entre elles et d'autres ne le peuvent pas. Par exemple on pourra écrire que  $Q_1 = Q_2$ , ou  $Q_1 \neq Q_2$  si les quantités  $Q_1$  et  $Q_2$  qui caractérisent des grandeurs physiques sont du même type. On peut comparer des masses entre elles mais comparer une masse avec une longueur n'a pas de sens. Le type d'une grandeur physique est ce qu'on appelle une dimension.

##### 1.4.1 Les grandeurs physiques et dimensions de base

On définit cinq dimensions de base correspondant à 5 grandeurs physiques de base à partir desquelles toutes les dimensions des grandeurs physiques pourront être obtenues. Le tableau 1.2 résume les grandeurs

de base, avec leur unités dans le système d'unité international. En plus des quatre premières (longueur, temps, masse et températures) qui sont les plus courantes, on doit introduire le courant électrique  $I$ , dont l'unité internationale est l'ampère. 1 ampère correspond à 1 charge de 1 coulomb par seconde. A chacune des grandeurs de base correspond une

Grandeurs	Notations	unités (S.I.)	symboles
Longueur	$L$	mètre	m
Temps	$T$	seconde	s
Masse	$M$	kilogramme	kg
Température	$\theta$	kelvin	K
Courant	$I$	ampère	A

unité dans le système international (S.I.). Il ne faut pas confondre la notion d'unité, et la notion de dimension. L'unité donne un sens à la valeur numérique que l'on obtient lors d'une mesure d'une grandeur physique. La dimension donne un sens à la grandeur physique elle-même indépendamment de la valeur mesurée.

Il existe des quantités sans dimensions qui possèdent une unité dans le système internationale. En voici deux exemples :

- L'unité S.I. de mesure d'un angle est le radian (rad). Un angle n'a pas de dimension. En effet, un angle est le rapport entre la circonférence et le rayon de l'arc de cercle correspondant.
- La mole, représente un ensemble de  $6.02 \times 10^{23}$  objets (une mole d'atomes ou de molécules).

### 1.4.2 Des grandeurs dérivées

Dans le tableau 1.3, on donne des exemples de quantités physiques que nous utiliserons, accompagnées de leurs dimensions et unités.

Grandeurs	Equations/lois	Dimensions	unités (S.I.)	symboles
Aire, surface	$S = x^2$	$L^2$		$m^2$
Volume	$V = x^3$	$L^3$		$m^3$
fréquence	$\nu = \frac{1}{T}$	$T^{-1}$	hertz	Hz
vitesse	$v = \frac{dx}{dt}$	$LT^{-1}$		$m \cdot s^{-1}$
accélération	$a = \frac{dv}{dt}$	$LT^{-2}$		$m \cdot s^{-2}$
Force	$\vec{F} = m\vec{a}$	$MLT^{-2}$	newton	N
Energie	$E_c = \frac{1}{2}m\ \vec{v}\ ^2$	$ML^2T^{-2}$	joule	J
Puissance	$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$	$ML^2T^{-3}$	watt	W
Pression	$P = \frac{\ \vec{F}\ }{S}$	$ML^{-1}T^{-2}$	pascal	Pa

TABLE 1.2: Grandeurs et dimensions de base.

Il ne faut pas confondre la notion d'unité, et la notion de dimension. L'unité donne un sens à la valeur numérique que l'on obtient lors d'une mesure d'une grandeur physique. La dimension donne un sens à la grandeur physique elle-même indépendamment de la valeur mesurée.

**Angle :** Un angle n'a pas de dimension.  
 $\alpha = \frac{\ell}{R}$ .

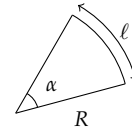


TABLE 1.3: Grandeurs dérivées.

1.4.3 *Analyse dimensionnelle*

Les dimensions de base sont notées comme suit :  $L$  pour la longueur,  $T$  pour le temps,  $M$  pour la masse. Ces trois dimensions de bases seront celles que nous utiliserons le plus dans ce cours de mécanique. Les deux autres : Température  $\theta$  et courant  $I$  seront moins fréquemment utilisées. La première relevant plus de la thermodynamique ou de la physique statistique et la seconde de l'électromagnétisme. Une quantité physique  $Q$  quelconque, possèdera une dimension qui s'exprimera comme un produit des puissances des dimensions de base. On notera :

$$[Q] = L^\alpha T^\beta M^\gamma \theta^\delta I^\epsilon,$$

et on dira dimension de  $Q$  égale à  $L^\alpha T^\beta M^\gamma \theta^\delta I^\epsilon$ . Dans le cas où  $Q$  est une quantité sans dimension, on écrira formellement  $[Q] = 1$ .

*Homogénéité des équations* Les grandeurs physiques comparables doivent avoir la même dimension. Cela implique que les équations reliant des quantités physiques doivent être homogènes. Les règles suivantes doivent être satisfaites :

1. Dans une équation, les quantités physiques des deux cotés de l'égalité doivent avoir les mêmes dimensions. C'est à dire que :

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow [Q_1] = [Q_2].$$

2. Si une quantité physique  $Q$  est exprimée comme une somme de plusieurs autres quantités physiques  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , alors chacun des termes de la somme doit avoir la même dimension que  $Q$ . C'est à dire que :

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n \Rightarrow [Q_1] = [Q_2] = \dots = [Q_n] = [Q].$$

3. Dans une équation reliant des quantités physiques, l'argument d'une fonction transcendante ( $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\exp \dots$ ) ne peut avoir de dimension.

$$Q = Q_1 f(Q_2) \Rightarrow \begin{cases} [Q_2] = 1 \\ [Q] = [Q_1] \end{cases}$$

4. Une quantité vectorielle possède la dimension de ses composantes et de sa norme. C'est à dire que si  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base orthonormée :

$$\vec{Q} = Q_1 \vec{i} + Q_2 \vec{j} + Q_3 \vec{k} \Rightarrow [\vec{Q}] = [Q_1] = [Q_2] = [Q_3] = [||\vec{Q}||].$$

5. Si une quantité physique  $Q(x)$  dépend d'une autre quantité physique  $x$ . Alors la dimension de la dérivée de  $Q(x)$  par rapport à  $x$  est la dimension de  $Q$  divisée par celle de  $x$  :

$$\left[ \frac{dQ(x)}{dx} \right] = [Q][x]^{-1}.$$

**Homogénéité des équations physiques :** Une équations reliant des quantités physiques doit respecter les règles suivantes :

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow [Q_1] = [Q_2]$$

$$Q = Q_1 + Q_2 \Rightarrow [Q_1] = [Q_2] = [Q].$$

$$Q = Q_1 f(Q_2) \Rightarrow \begin{cases} [Q_2] = 1 \\ [Q] = [Q_1] \end{cases}$$

$$\vec{Q} = Q_1 \vec{i} + Q_2 \vec{j} + Q_3 \vec{k}$$

$$\Rightarrow [\vec{Q}] = [Q_1] = [Q_2] = [Q_3] = [||\vec{Q}||]$$

$$\left[ \frac{dQ(x)}{dx} \right] = [Q][x]^{-1}.$$

Lorsqu'on écrira des équations reliant des quantités physiques, on vérifiera que ces règles sont bien respectées. En outre, cette vérification est souvent un moyen de détecter des erreurs de calcul.



## 2

# Cinématique

LA CINÉMATIQUE est constitué par l'ensemble des outils qui permettent la description du mouvement d'un mobile. On ne s'intéresse pas à la cause du mouvement, mais uniquement aux outils mathématiques qui permettent sa description.

Dans ce cours nous n'aborderons pas la cinématique dans toute sa généralité. Nous nous contenterons de décrire le mouvement d'un point, ou d'un ensemble fini de points. L'étude du mouvement d'ensemble (rotation et translation) d'un solide étendu sort du cadre de ce cours.

La trajectoire d'un point est l'ensemble des positions occupées par le point au cours du temps. C'est donc une courbe dans l'espace. En plus de la trajectoire, nous souhaitons caractériser à quels instants le mobile occupe les points successifs de sa trajectoire. Ce sont donc les notions de position, équation horaire du mouvement, vitesse et accélération qui seront abordées dans ce chapitre.

Le concept mathématique de *vecteur* est fondamental pour ce chapitre. Cette notion a été introduite depuis la classe de seconde au lycée. Elle est rappelée dans l'annexe B, page 97. Annexe dont la lecture est vivement conseillée.

### 2.1 *Position, vitesse et accélération sur une trajectoire rectiligne*

On considère un mobile modélisé par un point  $M$  en mouvement sur une droite. Pour repérer le point sur cette droite, on choisit une origine  $O$  et un sens positif, qui sera indiqué par un vecteur unitaire (de norme égale à 1)  $\vec{i}$ . On a donc une droite orientée, ou encore un axe, que l'on notera  $Ox$ .

### 2.1.1 Position, loi horaire et trajectoire

On définit l'abscisse  $x$  par l'équation :

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{i}.$$

$x$  est la composante de  $\overrightarrow{OM}$  sur l'axe  $Ox$ .  $x$  sera donc positif si le sens de  $\overrightarrow{OM}$  est le sens positif, c'est à dire, le même que  $\vec{i}$ . Dans le cas contraire  $x < 0$ .

Comme  $M$  est en mouvement, on écrira  $M(t)$ , pour rappeler que la position du mobile dépend du temps  $t$ .  $x(t)$  sera alors aussi une fonction du temps  $t$ . La fonction qui donne la position  $M(t)$  (ou  $x(t)$  ici) à chaque instant  $t$  est appelée *loi horaire* du mouvement. L'ensemble des points  $M$  occupés par le mobile au cours de son mouvement est appelé *la trajectoire*.

### 2.1.2 Vitesse

*Vitesse moyenne* A l'instant  $t_1$ , le mobile est en  $M(t_1)$  repéré par son abscisse  $x(t_1)$ . A l'instant  $t_2 > t_1$ , il est en  $M(t_2)$  d'abscisse  $x(t_2)$ . On définit la *vitesse moyenne*,  $\langle \vec{v} \rangle_{[t_1, t_2]}$ , dans l'intervalle  $[t_1, t_2]$  par :

$$\langle \vec{v} \rangle_{[t_1, t_2]} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \vec{i}. \quad (2.1)$$

C'est un vecteur, dont la composante sur  $\vec{i}$  est le taux d'accroissement de la fonction  $f(t) = x(t)$ , entre  $t_1$  et  $t_2$ . La norme de  $\langle \vec{v} \rangle_{[t_1, t_2]}$  correspond bien à l'idée habituelle de vitesse moyenne. En effet,  $\|\langle \vec{v} \rangle_{[t_1, t_2]}\| = \frac{|x(t_2) - x(t_1)|}{|t_2 - t_1|}$ , ce qui correspond bien au rapport de la distance parcourue par le temps écoulé. La dimension de la vitesse moyenne est  $LT^{-1}$ . En notant  $\Delta t$  le temps écoulé entre  $t_1$  et  $t_2$ , c'est à dire que  $t_2 - t_1 = \Delta t$ , on peut aussi écrire la vitesse moyenne de la façon suivante :

$$\langle \vec{v} \rangle_{[t_1, t_1 + \Delta t]} = \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{\Delta t} \vec{i}. \quad (2.2)$$

*Vitesse instantanée* La vitesse instantanée  $\vec{v}(t)$ , à un instant  $t$ , (sur une trajectoire rectiligne) s'obtient comme la limite quand  $\Delta t$  tend vers zéro, de la vitesse moyenne :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \vec{i}. \quad (2.3)$$

C'est un vecteur dont l'unique composante  $v_x(t)$  sur l'axe  $Ox$  est donnée par :

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt}.$$

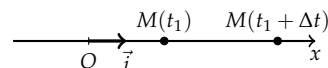


FIGURE 2.1: Repérage d'un point sur sa trajectoire rectiligne.

**Vitesse moyenne** : La vitesse moyenne  $\langle \vec{v} \rangle_{[t_1, t_1 + \Delta t]}$ , dans l'intervalle  $[t_1, t_1 + \Delta t]$  est définie par :

$$\langle \vec{v} \rangle_{[t_1, t_1 + \Delta t]} = \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{\Delta t} \vec{i}.$$



En effet, la limite du taux d'accroissement de la fonction  $x(t)$  est la dérivée  $x'(t)$  de la fonction  $x(t)$  par rapport à  $t$ . En cinématique et en mécanique en général, on utilisera souvent la notation  $\dot{f}$  pour noter la dérivée d'une fonction  $f(t)$  par rapport au temps  $t$ . La notation  $f'$  sera utilisée pour une dérivée par rapport à une variable qui n'est pas le temps (par exemple par rapport à  $x$ ). On utilisera aussi la notation  $\frac{df}{dt}$ , qui rappelle la limite du taux d'accroissement.

### 2.1.3 Accélération

L'accélération indique la variation de la vitesse en fonction du temps, de la même façon que la vitesse indique la variation de la position en fonction du temps. On définit donc l'accélération  $\vec{a}(t)$  comme la dérivée de la vitesse  $\vec{v}(t) = v(t)\vec{i}$  :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i}. \quad (2.4)$$

On pourra aussi voir l'accélération comme la dérivée seconde de la position :

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}.$$

En cinématique, on réservera la notation  $\ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$  pour la dérivée seconde de  $x$  par rapport au temps.

## 2.2 Vecteur position

De façon générale, la trajectoire d'un point est une courbe dans l'espace. La position d'un point  $M$  sera repérée par le *vecteur position*  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ , où  $O$  est un point fixe, que l'on prend comme l'origine d'un repère cartésien  $Oxyz$ , muni d'une base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . A chaque instant  $t$ , le vecteur position  $\vec{r}$  est alors déterminé par ses composantes  $(x(t), y(t), z(t))$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  :

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

On appellera *trajectoire*, l'ensemble des points atteints par le mobile au cours de son mouvement. Il s'agit d'une notion purement géométrique. La donnée de la trajectoire ne donne aucune information sur la position du mobile à un instant donné.

On appellera *équation horaire* la donnée de la position du mobile à chaque instant  $t$ . C'est à dire la donnée de la fonction  $\vec{r}(t)$  ou encore la donnée des trois fonctions du temps  $t$  :  $x(t), y(t)$  et  $z(t)$ , composante du vecteur  $\vec{r}(t)$  dans une base. L'équation horaire est en fait l'équation paramétrique de la trajectoire où le paramètre utilisé est le temps  $t$ . Plusieurs équations horaires différentes peuvent correspondre à la même trajectoire. Par exemple, un point peut parcourir un même segment de

**Vitesse instantanée** : La vitesse instantanée est définie par

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \vec{i} = \frac{dx}{dt} \vec{i} \equiv \dot{x} \vec{i}.$$

**Accélération** : l'accélération est la dérivée de la vitesse :

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt} \vec{i} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} \equiv \ddot{x}(t) \vec{i}. \quad (2.5)$$

**Vecteur position** :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

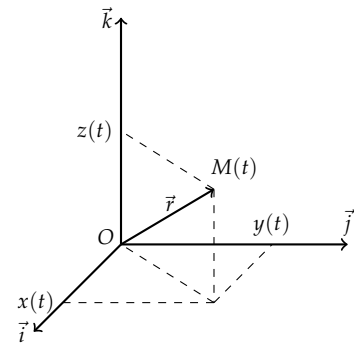


FIGURE 2.2: Vecteur position.

**Trajectoire** : Lieu géométrique des points atteints par le mobile au cours de son mouvement. C'est une courbe dans l'espace.

**Equation horaire** : équation paramétrique de la trajectoire où le paramètre utilisé est le temps  $t$ . C'est à dire l'expression des composantes  $x(t), y(t)$  et  $z(t)$  du vecteur position  $\vec{r}(t)$  en fonction du temps  $t$ .

droite à vitesse constante (accélération nulle) ou avec une accélération non nulle.

### 2.3 Vecteur vitesse

La vitesse du point  $M(t)$  caractérise la variation du vecteur position à chaque instant  $t$ . Dans la base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , le vecteur vitesse  $\vec{v}$  est défini par :

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}. \quad (2.6)$$

C'est à dire que le vecteur vitesse est le vecteur dont les composantes  $(v_x, v_y, v_z)$  dans un repère cartésien sont les dérivées, par rapport au temps, des composantes du vecteur position  $v_x = \dot{x}$ ,  $v_y = \dot{y}$ ,  $v_z = \dot{z}$ .

On notera :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

et on dira que le vecteur vitesse est la dérivée du vecteur position. Cette notation a un sens mathématique plus profond. En effet, indépendamment de la base orthonormée choisie, on peut montrer que :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}. \quad (2.7)$$

C'est à dire que le vecteur vitesse est bien la limite d'un taux d'accroissement vectoriel. En effet, regardons en détail la signification géométrique du vecteur  $\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ . pour cela notons  $M(t)$  la position du mobile à l'instant  $t$  et par  $M(t + \Delta t)$  la position du mobile  $\Delta t$  plus tard. Avec ces notations, on peut écrire  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}(t)$  et  $\vec{r}(t + \Delta t) = \overrightarrow{OM}(t + \Delta t)$ . On aura donc :

$$\begin{aligned} \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) &= \overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t) \\ &= \overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)}. \end{aligned}$$

C'est à dire que le vecteur  $\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$  est en fait le vecteur qui joint la position du mobile à l'instant  $t$  à la position du mobile  $\Delta t$  plus tard (voir Figure 2.3). Lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$  le point  $M(t + \Delta t)$  se rapproche du point  $M(t)$  et donc le vecteur  $\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$  tend vers le vecteur nul. Le numérateur et le dénominateur de l'équation (2.7) tendent donc vers zéro. On montre que le rapport  $\frac{\overrightarrow{M(t)M(t+\Delta t)}}{\Delta t}$  tend vers un vecteur fini quand  $\Delta t$  tend vers zéro, qui définit le vecteur vitesse  $\vec{v}(t)$  à l'instant  $t$  et qui est tangent à la trajectoire, au point  $M(t)$ .

### 2.4 Vecteur accélération

Le vecteur accélération du point  $M(t)$  caractérise la variation de la vitesse du point  $M(t)$  à chaque instant  $t$ . Dans la base orthonormée

**Vecteur vitesse :**

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}.$$

$\vec{v}$  est un vecteur tangent à la trajectoire au point  $M(t)$ .

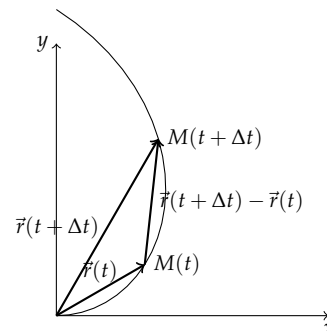


FIGURE 2.3: A l'instant  $t$  le mobile est au point  $M(t)$  repéré par le vecteur position  $\vec{r}(t)$ .  $\Delta t$  plus tard, il se trouve au point  $M(t + \Delta t)$  repéré par le vecteur position  $\vec{r}(t + \Delta t)$ .

**Vecteur accélération :**

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \dot{v}_x(t)\vec{i} + \dot{v}_y(t)\vec{j} + \dot{v}_z(t)\vec{k} \\ &= \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k}. \end{aligned}$$

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , le vecteur accélération  $\vec{a}(t)$  est défini par :

$$\vec{a}(t) = \dot{v}_x(t)\vec{i} + \dot{v}_y(t)\vec{j} + \dot{v}_z(t)\vec{k}. \quad (2.8)$$

C'est à dire que le vecteur accélération est le vecteur dont les composantes  $(a_x, a_y, a_z)$  dans un repère cartésien sont les dérivées, par rapport au temps, des composantes du vecteur vitesse  $a_x = \dot{v}_x, a_y = \dot{v}_y, a_z = \dot{v}_z$ .

## 2.5 Cas particuliers

### 2.5.1 Mouvement uniforme

Le mouvement est dit *uniforme* si la norme du vecteur vitesse est constante  $\|\vec{v}\| = \text{cte}$ . Autrement dit :

$$\frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = 0.$$

Par contre, le vecteur vitesse  $\vec{v}$  n'est pas forcément constant. Sa direction peut varier, donc l'accélération n'est pas forcément nulle :  $\vec{a} \neq \vec{0}$ . Par exemple une voiture dont le compteur de vitesse indique 30km/h et qui roule dans un virage, a un mouvement uniforme mais la direction de son vecteur vitesse varie.

Montrons que dans un mouvement uniforme, le vecteur vitesse  $\vec{v}$  est à tout instant orthogonal au vecteur accélération  $\vec{a}$  du mobile. Pour cela rappelons que :

$$\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}. \quad (2.9)$$

Comme  $\|\vec{v}\|$  est constante,  $\|\vec{v}\|^2$  est aussi constante et donc

$$\frac{d\|\vec{v}\|^2}{dt} = 0. \quad (2.10)$$

En utilisant l'expression Eq. (2.9), on peut exprimer cette dérivée de la façon suivante :

$$\frac{d\|\vec{v}\|^2}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

En reconnaissant l'accélération  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ , on obtient

$$\frac{d\|\vec{v}\|^2}{dt} = 2\vec{v} \cdot \vec{a}.$$

Finalement :

$$\frac{d\|\vec{v}\|^2}{dt} = 0 \Leftrightarrow 2\vec{v} \cdot \vec{a} = 0.$$

Ce qui est bien équivalent à l'orthogonalité entre les vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{a}$ .

Le mouvement circulaire et *uniforme* est un exemple de mouvement uniforme. Le mobile décrit un cercle, la norme de sa vitesse est constante. Le vecteur vitesse est tangent au cercle, et la direction du vecteur accélération est suivant le rayon du cercle ; l'accélération est centripète, c'est à dire que  $\vec{a}$  est orientée vers le centre du cercle (voir figure 2.4).

**Mouvement uniforme :**  $\|\vec{v}\| = \text{cte}$

$$\Leftrightarrow \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{a} = 0$$

Le vecteur vitesse est à chaque instant orthogonal au vecteur accélération.

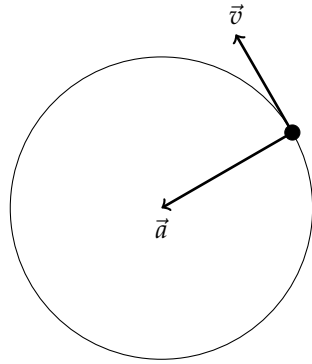


FIGURE 2.4: Mouvement circulaire et uniforme. Le vecteur vitesse  $\vec{v}$  est orthogonal au vecteur accélération  $\vec{a}$ .

### 2.5.2 Mouvement rectiligne et uniforme

Lorsque en plus d'être uniforme, le mouvement du mobile est rectiligne, alors le vecteur vitesse  $\vec{v}$  est constant. Sa norme est constante puisque le mouvement est uniforme mais sa direction et son sens sont aussi constant, car la trajectoire est rectiligne. Dans ce cas  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$ , et donc

$$\vec{a} = \vec{0}.$$

Le vecteur accélération est donc nul.

**Mouvement rectiligne et uniforme :** Le vecteur vitesse  $\vec{v}$  est constant :

$$\vec{a} = \vec{0}.$$

## Dynamique

On s'intéresse ici à déterminer les changements qui s'opèrent dans le mouvement d'un corps lorsqu'une ou plusieurs forces s'appliquent sur ce dernier.

Nous n'aborderons pas ici le problème de la dynamique dans toute sa généralité. Nous nous intéresserons à la dynamique d'un système très idéalisé appelé le point matériel. Le point matériel est un corps dont la masse est concentrée dans un volume infiniment petit. Cette première approche bien que très idéalisée, permet en fait de décrire, dans de nombreuses situations, le mouvement du centre de masse d'un solide étendu. La dynamique générale d'un solide étendu soumis à des forces ou en interaction avec d'autres corps sort du cadre de ce cours.

### 3.1 Première loi de Newton

C'est dans son célèbre ouvrage "Principes mathématiques de la philosophie naturelle (1686)" (<http://visualiseur.bnf.fr/Visualiseur?Destination=Gallica&O=NUMM-29038>) que Newton formalise clairement la notion de force, dans l'énoncé de sa première loi :



FIGURE 3.1: *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, texte original (1686) et traduction par Mme La Marquise du Chastellet (1759)

*“Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer d'état.”*

**Notion dynamique de la force :** Il peut y avoir mouvement sans force. La force change le mouvement.

Pour Newton, l'état de base du mouvement est le repos ou le mouvement rectiligne uniforme (vecteur vitesse constant). Ces deux états étant complètement équivalents. De plus, la notion de force qui est introduite, est une notion dynamique. C'est à dire que la force est celle qui est responsable du changement du mouvement. La force fait sortir le système de son état de base. On se rappellera qu'il peut y avoir un mouvement sans force, la force change le mouvement.

## 3.2 Les forces

### 3.2.1 Définition

La force change donc le mouvement, plus précisément nous verrons que lorsqu'on exerce une force sur un corps on en modifie la vitesse. Par exemple, si l'on souhaite faire bouger un meuble qui est immobile, il faudra exercer une force sur ce meuble. Sa vitesse qui était nulle au départ deviendra non nulle. La vitesse étant une quantité vectorielle, la force doit aussi être un vecteur. La direction et le sens du vecteur force indiquera dans quelle direction et dans quel sens la vitesse du corps sera modifiée. Une force est une quantité physique qui sera donc caractérisée par la donnée de trois quantités, *l'intensité de la force*, *la direction* dans laquelle elle est appliquée et son *sens* ou son orientation. C'est à dire qu'une fois donnée sa direction, il faut aussi préciser si on tire ou on pousse dans cette direction. La direction et le sens de la force seront donnés par la direction et le sens du vecteur force. L'intensité de la force sera donné par la norme du vecteur force. Pour un rappel sur les vecteurs on pourra se référer à l'annexe B, page 97.

On prendra soin de distinguer les quantités vectorielles des quantités réelles en mettant une flèche au dessus comme  $\vec{F}$ . Par exemple, dans l'équation  $F = \|\vec{F}\|$ , le terme  $\vec{F}$  désigne un vecteur, dont la norme est notée  $F$ , sans la flèche puisque la norme d'un vecteur est un nombre réel (positif).

La dimension associée à la force est  $MLT^{-2}$  et l'unité internationale associée est le *Newton* qui correspond à  $1 \text{ kg.m.s}^{-2}$ .

### 3.2.2 Exemples de Forces

*La force de gravitation* La force de gravitation est une force d'interaction entre les masses. Une masse  $m_1$  exerce une force de gravitation  $\vec{F}_{12}$  sur une masse  $m_2$ , qui est proportionnelle au produit des masses et inversement proportionnelle au carré de la distance séparant les masses. En notant  $M_1$  et  $M_2$  les positions respectives des deux masses  $m_1$  et  $m_2$ , le vecteur force de gravitation peut s'écrire :

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{\|\vec{M}_1M_2\|^3}\vec{M}_1M_2 = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\vec{u}_r$$

**Force** : Intensité, direction et sens  $\vec{F}$ .  
Dimension  $[\vec{F}] = MLT^{-2}$ . Unité : Newton (N).

où  $\vec{u}_r$  est le vecteur unitaire (de norme égale à 1) dans la direction et le sens de  $\overrightarrow{M_1M_2}$ , et  $r$  est la distance entre  $M_1$  et  $M_2$ . Ce qu'on peut écrire :

$$\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\|\overrightarrow{M_1M_2}\|}$$

La constante de proportionnalité  $G$  est appelée la constante universelle de gravitation sa valeur est :  $G = 6.67384 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ .

Question : quand les masses sont concentrées en des points  $M_1$  et  $M_2$ , l'expression précédente est claire, mais pour deux objets étendus, comme la Terre et un satellite, où faut il prendre les points  $M_1$  et  $M_2$  ?

Remarques : la masse  $m_2$  subit aussi une force de gravitation due à la présence de la masse  $m_1$ . Cette force,  $\vec{F}_{21}$  est opposée à  $\vec{F}_{12}$ . Il s'agit d'un cas particulier de la troisième loi de Newton, appelée la loi des actions réciproques, ou loi de l'action et de la réaction.

Calculons la force de gravitation  $\vec{F}$  qui s'exerce sur un humain de masse  $m$ , provoquée par la masse  $M = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$  de la Terre. Le rayon de la Terre étant  $R = 6.37 \times 10^3 \text{ km}$ , on obtient :

$$\vec{F} = -m \frac{GM}{R^2} \vec{u}_r = m \vec{g}$$

où on a défini le vecteur  $\vec{g}$  :

$$\vec{g} = -\frac{GM}{R^2} \vec{u}_r \simeq -9.81 \vec{u}_r \text{ ms}^{-2}$$

$\vec{g}$  est un vecteur dirigé vers le centre de la Terre, c'est à dire vertical vers le bas, et qui a la dimension d'une accélération.  $\vec{g}$  est appelé *accélération de la pesanteur*.

La force de gravitation est considérée comme une interaction fondamentale, c'est une force assez mystérieuse, elle est pleine de surprises et est encore aujourd'hui source d'interrogation et de recherche. Sa portée est infinie, elle structure donc la répartition des masses et de l'énergie dans l'univers. Son comportement à des échelles subatomiques est encore aujourd'hui une énigme.

*La force électrostatique* La Force électrostatique est la force fondamentale qui existe entre les charges immobiles. C'est une force très importante, elle est en partie responsable de la structure de la matière. En effet elle est responsable de l'interaction entre les électrons de charge négative et les noyaux des atomes qui sont chargés positivement. Le courant dans un fil métallique est le résultat du déplacement des charges portées par les électrons du métal. La charge se mesure en Coulomb (C) et le courant représente la charge qui passe par seconde par la section du fil. Le courant se mesure en ampère (A), qui représente 1 Coulomb par seconde. L'expression de la force qu'exerce la charge  $Q_1$  sur la charge  $Q_2$  située

Force de gravitation s'appliquant sur la masse  $m_2$  située à une distance  $r$  de la masse  $m_1$  :

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \vec{u}_r$$

Le poids d'une masse  $m$  est la force de gravitation qu'exerce la Terre (de masse  $M$ ) sur la masse  $m$  situé à la surface de la Terre :

$$\vec{F} = -m \frac{GM}{R^2} \vec{u}_r = m \vec{g};$$

$$\text{où } \vec{g} = -\frac{GM}{R^2} \vec{u}_r \simeq -9.81 \vec{u}_r \text{ ms}^{-2},$$

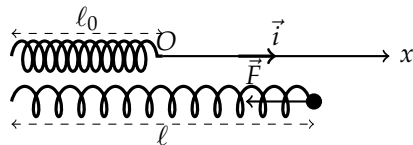
où  $R$  désigne le rayon de la Terre.  $\vec{g}$  est appelée *accélération de la pesanteur*

à une distance  $r$  est :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{u}_r$$

où  $\vec{u}_r$  est le vecteur unitaire dans la direction et le sens de  $\overrightarrow{M_1 M_2}$  et  $\epsilon_0$  est une constante fondamentale, appelée la permittivité diélectrique du vide et dont la valeur est :  $\epsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12}$  Farad.m<sup>-1</sup>. L'expression de la force est très similaire à celle de la force de gravitation. La grande différence est que contrairement à la force de gravitation, la force électrostatique peut aussi être répulsive. En effet, si les charges  $Q_1$  et  $Q_2$  sont de même signes alors la force électrostatique est répulsive et si les charges sont de signes opposés la force est attractive.

*Force de rappel élastique* La force de rappel élastique est la force qu'oppose certains matériaux quand on tente de les déformer. Elle est présente dans les ressorts, les amortisseurs à lames, les trampolines etc . . .



Prenons un ressort que l'on pose sur une table horizontale. On fixe une des extrémité du ressort à la table en un point que l'on note  $O$ , et on note  $\ell_0$  la longueur du ressort. On étire le ressort d'une certaine quantité  $x$ , de telle sorte que la nouvelle longueur du ressort soit  $\ell = \ell_0 + x$ . On constate que le ressort exerce une certaine résistance à cet allongement. Il oppose une force dont le sens est opposé à la force de l'opérateur qui allonge le ressort, et dont la norme est proportionnelle à l'allongement  $x$ . C'est la loi de Hooke (scientifique britannique 1635–1703).

Si on note  $Ox$  l'axe dont la direction est le ressort et dont le sens est celui de l'allongement du ressort, alors on pourra écrire le vecteur force de rappel élastique de la façon suivante :

$$\vec{F} = -kx\vec{i} = -k(\ell - \ell_0)\vec{i}, \quad (3.1)$$

où  $\vec{i}$  est un vecteur unitaire dans la direction et le sens de  $Ox$ . La constante  $k > 0$  est appelée raideur du ressort.

On remarque que cette équation est aussi valable dans le cas où le ressort est comprimé au lieu d'être étiré. En effet si on comprime le ressort, alors  $\ell < \ell_0$  donc  $x < 0$  et dans ce cas  $\vec{F}$  est orienté dans le sens positif de l'axe  $Ox$ . Ce qui est bien le sens opposé à la force exercée par l'opérateur qui comprime le ressort dans le sens négatif de l'axe  $Ox$ . On essaiera toujours d'écrire des expressions valables quel que soit le signe des variables composant l'expression. On dira alors que l'expression est *algébrique*.

La force électrostatique qui s'exerce sur une charge  $Q_2$  en  $M_2$  située à la distance  $r$  d'une charge  $Q_1$  en  $M_1$  :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{u}_r,$$

où  $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{r}$  et  $r = \|\overrightarrow{M_1 M_2}\|$ .

FIGURE 3.2: Modélisation du ressort.

Force de rappel d'un ressort :

$$\vec{F} = -kx\vec{i} = -k(\ell - \ell_0)\vec{i},$$

où  $\ell_0$  est la longueur à vide et  $\ell$  la longueur actuelle du ressort.  $k$  est la raideur du ressort. Cette expression est valable quel que soit le signe de  $x$ . C'est à dire que l'expression est la même que le ressort soit étiré ou comprimé. On dira que l'expression est *algébrique*.



La force qu'exerce un matériau qui résiste à la déformation ne reste proportionnelle à la déformation que si la déformation reste faible. En effet, si on le déforme trop fortement, le matériau ne reviendra plus à sa forme initiale. On entre dans le domaine de la déformation dite "plastique".

*Frottement visqueux – Modèle de Stokes* Un solide qui se déplace dans un fluide (un liquide ou un gaz) subit une force de frottement, qui dépend de la vitesse relative entre le mobile et le fluide. La norme de cette force augmente avec la norme de la vitesse. Cette force résulte de l'interaction entre les atomes ou molécules du solide avec les atomes ou molécules constituant le fluide. Si la vitesse relative entre le mobile et le fluide n'est pas trop élevée, on pourra considérer que la norme de la force est proportionnelle à la norme de la vitesse. On écrira :

$$\vec{F} = -\lambda\vec{v} \quad (3.2)$$

où  $\lambda$  est une constante positive qui dépend de la nature du fluide et de la nature et de la forme du solide. Il ne s'agit pas d'une force fondamentale. Il s'agit d'une expression phénoménologique qui résulte de constatations expérimentales. Cette force est la résultante de multiples interactions fondamentales entre les molécules constituant le solide et le fluide. Ce modèle de force de frottement appelée force de Stokes (du nom du physicien et mathématicien irlandais (1819–1903)), n'est valable que pour des vitesses faibles, ou pour un fluide très visqueux. Pour des vitesses élevées, la force de frottement dépend du carré de la vitesse.

*Frottement solide* A la suite de Guillaume Amontons (1699), c'est Charles Coulomb (1736-1806) qui a étudié expérimentalement de façon systématique le frottement entre deux solides dans son mémoire intitulé "Théorie des machines simples" (<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1095299>). Supposons un solide, immobile, posé sur une table horizontale. Essayons de faire bouger le solide en exerçant une force horizontale  $\vec{F}$ . C. Coulomb constate qu'il faut exercer une force dont la norme est supérieure à une valeur critique qui est proportionnelle au poids du solide. C'est à dire que pour déplacer le solide il faut que :  $\|\vec{F}\| > k_s\|\vec{p}\| = k_s mg$ , où le coefficient de proportionnalité  $k_s$  est appelé coefficient de frottement statique.

On en déduit, qu'en plus de la force  $\vec{R}_n$  qui est orthogonale au support et qui s'oppose au poids du solide, le support exerce donc une force de frottement  $\vec{f}_s$  qui s'oppose à la force appliquée  $\vec{F}$  et qui est parallèle au support. La force  $\vec{f}_s$  est appelée force de *frottement solide statique*, c'est la force qui s'exerce tant que le solide est immobile par rapport au support. Sa norme est toujours plus faible que  $k_s mg$  :  $\|\vec{f}_s\| < k_s mg$ .

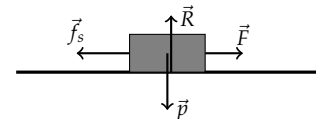
Frottement visqueux

$$\vec{F} = -\lambda\vec{v}$$

où  $\vec{v}$  est le vecteur vitesse du mobile par rapport au fluide. On rappellera plus précisément la définition précise du vecteur vitesse, dans le chapitre 2 dédié à la cinématique.

Frottement solide :

Pour déplacer le solide il faut que,  $\|\vec{F}\| > k_s\|\vec{R}\|$ ;  $\vec{R} \perp$  support.



Cette loi du frottement solide peut être généralisée en remarquant que la norme de la réaction orthogonale au support  $\vec{R}_n$ , est égale à la norme du poids,  $\|\vec{R}_n\| = mg$ . On aura donc :

$$\|\vec{f}_s\| < k_s \|\vec{R}_n\|; \vec{R}_n \perp \text{support.} \quad (3.3)$$

C'est cette dernière expression plus générale qui est considérée comme la loi du frottement solide. La norme de la force de frottement exercée par le support (et parallèle à ce dernier) ne peut pas être supérieure à  $k_s \|\vec{R}_n\|$  où  $\vec{R}_n$  est la force exercée par le support et qui est orthogonale à ce dernier.

Lorsque la force appliquée  $\vec{F}$  est suffisamment grande pour que le solide se mette en mouvement, c'est à dire que  $\|\vec{F}\| > k_s \|\vec{R}_n\|$ , alors la force de frottement  $\vec{f}_c$  que le support exerce sur le solide a une norme plus faible que lorsque le solide était au repos. C'est à dire que  $\|\vec{f}_c\| < \|\vec{f}_s\|$ . La force  $\vec{f}_c$  est appelée *force de frottement solide cinétique*. C'est la force de frottement exercée par le support lorsque le solide est en mouvement par rapport au support. L'expérience montre que :

$$\|\vec{f}_c\| = k_c \|\vec{R}_n\|, \quad (3.4)$$

où  $k_c$  est le coefficient de frottement cinétique. Comme  $\|\vec{f}_c\| < \|\vec{f}_s\|$  et  $\|\vec{f}_s\| < k_s \|\vec{R}_n\|$ , on a aussi :

$$k_c < k_s.$$

Un des résultats marquant des expériences de Amontou et Coulomb est que les coefficients de frottement  $k_s$  et  $k_c$  ne dépendent que de la nature des matériaux en contact, et ne dépendent pas de la géométrie des surfaces en contact. Le frottement solide ne constitue pas une interaction fondamentale. Cette force résulte de l'interaction entre les atomes et/ou molécules des surfaces qui sont en contact. L'étude de l'origine microscopique du frottement, et en particulier des lois de Coulomb est aujourd'hui un sujet de recherche actif qui est appelé la *tribologie*.

### 3.3 Seconde loi de Newton

#### 3.3.1 Principe fondamental de la dynamique

C'est dans sa seconde loi que Newton précise la façon dont la force affecte le mouvement. La force fait changer la quantité de mouvement. La quantité de mouvement est en générale notée  $\vec{p}$  (ne pas confondre avec le poids). La quantité de mouvement d'un point matériel de masse  $m$  et possédant une vitesse  $\vec{v}$  est une quantité vectorielle :

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

La norme de la force de frottement solide qui s'applique sur un solide immobile  $\vec{f}_s$  vérifie :

$$\|\vec{f}_s\| < k_s \|\vec{R}_n\|; \vec{R}_n \perp \text{support.}$$

$k_s$  est le coefficient de frottement statique.

La norme de la force de frottement solide qui s'applique sur un solide en mouvement  $\vec{f}_c$  vérifie :

$$\|\vec{f}_c\| = k_c \|\vec{R}_n\|; \vec{R}_n \perp \text{support.}$$

$k_c$  est le coefficient de frottement cinétique (ou dynamique).

$$\|\vec{f}_c\| < \|\vec{f}_s\| \Rightarrow k_c < k_s.$$

La seconde loi de Newton, aussi appelée Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) peut s'énoncer comme suit : la somme  $\vec{F}$  des forces appliquées sur le point matériel, induit une variation de sa quantité de mouvement :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \quad (3.5)$$

Si la masse  $m$  reste constante au cours du temps alors

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}.$$

Le PFD Eq. (3.5) devient donc :

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (3.6)$$

Comme  $\vec{a}$  est la dérivée seconde de la position  $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$  et qu'en général les forces dépendent de la position (ou même de la vitesse),  $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v})$ , le PFD est une relation entre la position, la dérivée première et la dérivée seconde de la position. C'est ce qu'on appelle une *équation différentielle*. Dans le cas particulier de la dynamique, on l'appelle l'équation différentielle du mouvement.

Cette équation permet en principe d'obtenir le vecteur position à chaque instant  $t$  connaissant la position et la vitesse à un instant initial. En effet, supposons connus le vecteur position  $\vec{r}(t)$  et le vecteur vitesse  $\vec{v}(t)$ , à l'instant  $t$ . On connaît donc la résultante des forces  $\vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t))$ . A l'aide du PDF, nous obtenons le vecteur accélération  $\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}}{m}$ , toujours à l'instant  $t$ . Or dans la limite où  $\Delta t$  est très petit, on peut écrire :

$$\frac{\vec{F}}{m} = \vec{a} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \Leftrightarrow \vec{v}(t + \Delta t) = \vec{v}(t) + \frac{\Delta t}{m} \vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t)).$$

On obtient ainsi la vitesse à l'instant  $t + \Delta t$ . De la même façon on peut écrire pour le vecteur position  $\vec{r}$  :

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta t \vec{v}(t).$$

On a donc obtenu la vitesse et la position à l'instant  $t + \Delta t$ , ce qui permet d'en déduire la résultante des forces à l'instant  $t + \Delta t$  et donc l'accélération à l'instant  $t + \Delta t$ . On peut donc, en principe, itérer et obtenir ainsi l'équation horaire  $\vec{r}(t)$  pour tout instant  $t$ .

Au sujet des équations différentielles, on pourra se reporter à l'annexe C, page 101.

### 3.3.2 Cas particulier où la somme des forces est nulle

Lorsque la somme vectorielle des forces appliquées  $\sum_{\vec{F}_{\text{appliquées}}} \vec{F}$  est nulle :

$$\sum_{\vec{F}_{\text{appliquées}}} \vec{F} = \vec{0}, \quad (3.7)$$

**Principe fondamental de la dynamique (PFD) :** Soit  $\vec{F}$  la somme des forces appliquées sur un point matériel de masse  $m$  :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

où,  $\vec{p} = m\vec{v}$  est la quantité de mouvement du point matériel de vitesse  $\vec{v}$ . Si la masse  $m$  ne varie pas alors le PFD devient :

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

alors en vertu du PFD, l'accélération du mobile est nulle  $\vec{a} = \vec{0}$ . On a vu dans le chapitre précédent (voir section 2.5.2, 20) que dans ce cas le mouvement est *rectiligne et uniforme*.

Un mobile isolé possède donc un mouvement rectiligne et uniforme. On retrouve ainsi la première loi de Newton.

### 3.3.3 Cas particulier de l'équilibre

Lorsque le corps est immobile, sa vitesse est nulle à tout instant et donc son accélération est nulle aussi. Dans ce cas particulier, la seconde loi de Newton implique que la somme vectorielle des forces appliquées  $\sum_{\vec{F} \text{ appliquées}} \vec{F}$  est nulle :

$$\sum_{\vec{F} \text{ appliquées}} \vec{F} = \vec{0}. \quad (3.8)$$

## 3.4 Résoudre un problème de dynamique

Nous résumons dans cette section les différentes étapes à franchir pour résoudre un problème de dynamique du point matériel.

1. **Identification du système** : il faut dans un premier temps bien identifier le système qui nous intéresse. En général, il s'agira d'un point matériel qu'il faudra identifier.
2. **Bilan des forces** : on établit le bilan des forces qui s'appliquent sur le point matériel de masse  $m$  dont on cherche à prédire le mouvement.
3. **Composantes dans un repère cartésien** : on détermine les composantes de chacune des forces, ou si c'est possible directement, de la somme  $\vec{F}$  vectorielle des forces, sur une base orthornormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  bien adaptée au problème. Ces composantes sont en général des fonctions de la position et de la vitesse du point matériel considéré. On obtiendra donc une relation du type :

$$\vec{F} = F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} + F_3 \vec{k}$$

où les trois composantes  $F_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sont en fait des fonctions des trois composantes du vecteur vitesse  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , et des trois composantes du vecteur position  $(x, y, z)$ , dans la même base.

4. **PFD** : On pose alors le PFD, qui est une relation vectorielle, mais qui peut aussi s'écrire composante par composante dans la base orthornormée. En effet :

$$m\vec{a} = \vec{F} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = F_1(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z) \\ m\ddot{y} = F_2(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z) \\ m\ddot{z} = F_3(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z) \end{cases} \quad (3.9)$$

On obtient donc en général trois équations différentielles du second ordre, c'est à dire trois équations reliant les composantes de la position, de ses dérivées et de ses dérivées secondes. C'est ce qu'on appelle les *équations différentielles du mouvement*.

5. **Solution des équations différentielles du mouvement** : le mouvement du point matériel est décrit par les trois composantes  $(x(t), y(t), z(t))$  du vecteur position  $\overrightarrow{OM}(t)$  à chaque instant  $t$ . Ce sont les *équations horaires* (ou équations paramétriques) du mouvement. Les trois fonctions du temps  $(x(t), y(t), z(t))$  sont une solution des équations différentielles Eq. 3.9, qui satisfait aux conditions initiales. En effet, comme en général les équations différentielles du mouvement sont du second ordre, pour obtenir une solution unique, il faut connaître la position et la vitesse du point matériel à un instant donné, pris souvent comme l'origine des temps, d'où l'appellation *conditions initiales*. Il faut donc savoir résoudre les équations différentielles du mouvement, obtenir les solutions possibles de ces équations. Puis choisir parmi ces solutions celle qui correspond aux conditions initiales de notre problème.

Tel est le programme que nous allons appliquer dans la suite de ce chapitre sur plusieurs exemples simples.

### 3.5 Exemples d'application

#### 3.5.1 Chute d'un corps proche de la surface de la Terre

*Rectiligne sans frottement* : On lâche d'une hauteur  $h$  sans vitesse initiale une bille, de masse  $m$ , que l'on considère comme ponctuelle. On néglige les frottements de la bille sur l'air. On veut connaître sa hauteur à chaque instant  $t$ . On applique le programme de la section précédente :

1. **Identification du système** : Le système est la bille de masse  $m$ . Les conditions initiales sont bien spécifiées : la position est donnée par la hauteur  $h$  de la bille et la vitesse initiale est nulle.
2. **Bilan des forces** : au cours de sa chute, la bille n'est soumise qu'à son poids  $\vec{P} = m\vec{g}$ .
3. **Composantes dans un repère cartésien** : on choisit un repère cartésien, où l'axe  $Oz$  est vertical orienté vers le haut et porté par un vecteur unitaire  $\vec{k}$ . On aura donc  $\vec{P} = -mg\vec{k}$ , où  $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$ .
4. **PFD** : on applique le PFD :  $m\vec{a} = -mg\vec{k} \Rightarrow \vec{a} = -g\vec{k}$ . Or  $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$ , donc :

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 0 \\ \ddot{y} &= 0 \\ \ddot{z} &= -g\end{aligned}$$

**Equations différentielles du mouvement** : le PFD consiste en trois équations différentielles, appelées les équations différentielles du mouvement :

$$m\vec{a} = \vec{F} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = F_1(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z) \\ m\ddot{y} = F_2(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z) \\ m\ddot{z} = F_3(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z) \end{cases}$$

où  $F_1$ ,  $F_2$  et  $F_3$  sont les trois composantes de la résultante des forces et  $x, y, z$  les composantes du vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  du point matériel, dans une base orthonormée.

Ce sont les trois équations différentielles du mouvement.

5. **Solution des équations différentielles du mouvement :** la solution des équations différentielles du mouvement est ici très simple, en effet il suffit d'intégrer (de prendre la primitive) ces équations pour obtenir les composantes du vecteur vitesse :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \text{Cte} \\ \dot{y} &= \text{Cte}' \\ \dot{z} &= -gt + \text{Cte}''\end{aligned}$$

où Cte, Cte' et Cte'' sont des constantes. Comme à l'instant initial ( $t = 0$ ), la vitesse est nulle, on doit choisir ces 3 constantes égales à zéro. On obtient donc :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 0 \\ \dot{y} &= 0 \\ \dot{z} &= -gt\end{aligned}$$

Pour obtenir les équations paramétriques du mouvement, il suffit d'intégrer les composantes du vecteur vitesse pour obtenir les composantes  $(x, y, z)$  :

$$\begin{aligned}x &= \text{Cte} \\ y &= \text{Cte}' \\ z &= -\frac{1}{2}gt^2 + \text{Cte}''\end{aligned}$$

où Cte, Cte' et Cte'' sont de nouvelles constantes. Or à l'instant  $t = 0$ , on sait que  $z = h$  et on peut choisir  $x(t = 0) = y(t = 0) = 0$ , donc Cte = 0, Cte' = 0 et Cte'' = h. Donc, les équations horaires du mouvement sont :

$$\begin{aligned}x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= h - \frac{1}{2}gt^2\end{aligned}$$

*Lancé d'un projectile :* On lance un ballon de masse  $m$ , avec une vitesse initiale qui fait un angle  $\alpha$  avec l'horizontale. On note  $v_0 \equiv \|\vec{v}_0\|$  la norme de  $\vec{v}_0$ . On néglige les frottements ainsi que la poussée d'Archimède que l'air exerce sur le ballon. On considère le ballon comme une masse ponctuelle.

1. **Identification du système :** Le système est le ballon de masse  $m$ .
2. **Bilan des forces :** Au cours de sa trajectoire, le ballon n'est soumis qu'à son poids  $\vec{P} = m\vec{g}$ .

3. **Composantes dans un repère cartésien** : Le repère cartésien  $Oxyz$  est choisi de telle sorte que le plan  $Oxz$  soit vertical et contienne le vecteur vitesse initial  $\vec{v}_0$ ; l'axe  $Oz$  étant vertical, orienté vers le haut et l'axe  $Ox$  horizontal. On choisit la position initiale du ballon pour origine  $O$ . Dans ce repère le poids du ballon s'écrit simplement :  $\vec{P} = -mg\vec{k}$ , où  $\vec{k}$  est le vecteur unitaire porté par l'axe  $Oz$ .
4. **PFD** : Le PFD s'écrit simplement  $m\vec{a} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$ . Comme  $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$ , le PFD est équivalent à :

$$m\vec{a} = \vec{P} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

5. **Solution des équations différentielles du mouvement** : Les trois équations différentielles du mouvement sont simples et indépendantes les unes des autres. On obtient les composantes de la vitesse  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  en intégrant par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= C_1 \\ \dot{y}(t) &= C_2 \\ \dot{z}(t) &= -gt + C_3, \end{aligned}$$

où  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  sont des constantes qu'il faut choisir pour que les composantes de la vitesse soient conformes aux conditions initiales. Or à l'instant  $t = 0$ ,

$$\vec{v}(t = 0) = v_0 \cos \alpha \vec{i} + v_0 \sin \alpha \vec{k}$$

donc  $C_1 = v_0 \cos \alpha$ ,  $C_2 = 0$  et  $C_3 = v_0 \sin \alpha$ . Les composantes de la vitesse sont donc :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v_0 \cos \alpha \\ \dot{y}(t) &= 0 \\ \dot{z}(t) &= -gt + v_0 \sin \alpha \end{aligned}$$

Pour obtenir les composantes  $(x(t), y(t), z(t))$  du vecteur position  $\vec{OM}(t)$ , il suffit d'intégrer par rapport au temps les composantes de la vitesse. On obtient :

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cos \alpha t + D_1 \\ y(t) &= D_2 \\ z(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t + D_3, \end{aligned}$$

où les constantes  $D_1$ ,  $D_2$  et  $D_3$  sont des constantes qu'il faut déterminer pour que  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  soient conformes aux conditions initiales.

Comme, on a choisi l'origine  $O$  de notre repère comme la position initiale du ballon,  $x(t=0) = y(t=0) = z(t=0) = 0$ . On en déduit que  $D_1 = 0$ ,  $D_2 = 0$  et  $D_3 = 0$ . Les équations paramétriques de la trajectoire sont donc :

$$\begin{aligned}x(t) &= v_0 \cos \alpha t \\y(t) &= 0 \\z(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t\end{aligned}$$

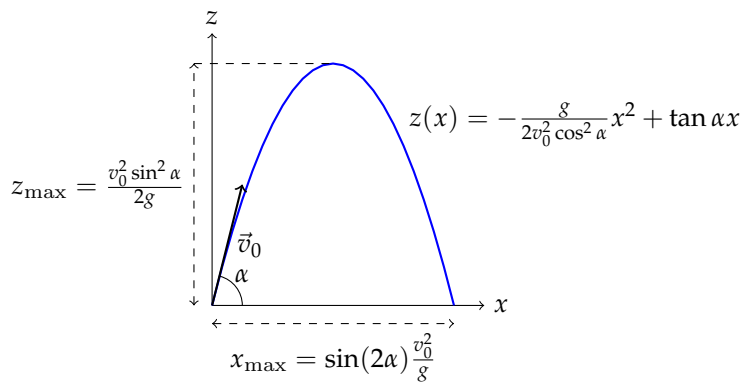


FIGURE 3.3: *Lancé d'un projectile. La portée notée  $x_{\max}$ , et le sommet de la trajectoire noté  $z_{\max}$ .*

#### Remarques

- La composante horizontale du mouvement (sur l'axe  $Ox$ ) est uniforme. En effet,  $\dot{x}$  est constant (ne dépend pas du temps). La composante verticale est uniformément variée.
- On peut obtenir l'équation de la trajectoire sous la forme  $z = f(x)$ . En effet, à l'aide de la première équation, on obtient  $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ . En utilisant cette expression dans la troisième équation, on obtient :

$$\begin{aligned}z(x) &= -\frac{1}{2}g \left( \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + v_0 \sin \alpha \left( \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right) \\&= -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x \\&= x \left( -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x + \tan \alpha \right).\end{aligned}$$

C'est une parabole dans le plan  $Oxz$  qui passe par le point  $(x=0, z=0)$  et par le point  $(x = 2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{v_0^2}{g}, z=0)$ . On en déduit que la portée  $x_{\max}$  du projectile, c'est à dire la distance horizontale, maximale atteinte par le projectile est :

$$x_{\max} = 2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{v_0^2}{g} = \sin(2\alpha) \frac{v_0^2}{g},$$



où on a utilisé la relation trigonométrique :  $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin(2\alpha)$ . On en déduit que pour une norme  $v_0$  donnée, la portée maximale est atteinte quand  $\sin(2\alpha)$  est maximum, c'est à dire quand  $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ , soit  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , c'est à dire  $\alpha = 45^\circ$ .

La parabole étant une courbe symétrique par rapport à son maximum, la hauteur maximale atteinte par le ballon, se produit lorsque  $x = \frac{x_{\max}}{2}$ . En remplaçant  $x = \frac{x_{\max}}{2} = \sin(2\alpha) \frac{v_0^2}{2g}$  dans l'expression de  $z(x)$ , on obtient la hauteur maximale  $z_{\max}$  atteinte par le ballon :

$$z_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

*Rectiligne avec frottement solide* : On considère un mobile de masse  $m$  qui glisse sur un plan incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale.

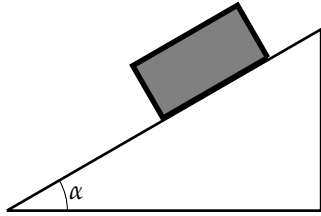


FIGURE 3.4: Corps de masse  $m$  sur un plan incliné.

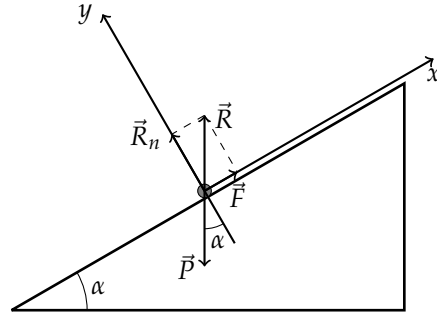
Dans un premier temps nous allons nous intéresser aux conditions pour que le corps de masse  $m$  soit à l'équilibre. Il est clair que si l'angle d'inclinaison  $\alpha$  n'est pas trop grand, le corps restera immobile. Si on augmente progressivement l'angle  $\alpha$ , il existera une valeur de  $\alpha = \alpha_s$  à partir de laquelle le mobile commencera à glisser sur le plan incliné. C'est à dire que pour  $\alpha < \alpha_s$  le corps restera immobile. La question que nous nous posons est quelle est la valeur de cet angle  $\alpha_s$  ou plus précisément comment dépend-il du coefficient de frottement  $k_s$  et de la masse  $m$  du mobile.

Supposons donc que le corps de masse  $m$  est à l'équilibre sur le plan incliné. Sa vitesse est nulle à tout instant et donc son accélération est aussi nulle à tout instant. La seconde loi de Newton permet donc d'écrire que

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0},$$

où  $\vec{P} = m\vec{g}$  est le poids de  $A$  et  $\vec{R}$  est la force exercée par le plan incliné (c'est à dire le support), sur le mobile. On peut décomposer  $\vec{R}$  comme la somme de deux vecteurs orthogonaux :  $\vec{R}_n$  et  $\vec{f}_s$ .  $\vec{R}_n$  est orthogonale au support et  $\vec{f}_s$  est parallèle au support. Cette dernière correspond à la force de frottement solide statique (voir section 3.2.2, page 25).

Il est avantageux de choisir un système d'axe  $Oxy$ , avec  $Ox$  parallèle et  $Oy$  perpendiculaire au support. On note  $(\vec{i}, \vec{j})$  la base orthonormée

FIGURE 3.5: *Contact avec frottement sur un plan incliné.*

associée. En décomposant les vecteurs forces dans cette base, on obtient :

$$\begin{aligned}\vec{R} &= f_s \vec{i} + R_n \vec{j} \\ \vec{P} &= -mg (\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j}).\end{aligned}$$

Ce qu'on peut aussi écrire :

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} f_s \\ R_n \end{pmatrix}; \quad \vec{P} = -mg \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

La relation vectorielle  $\vec{R} + \vec{P} = \vec{0}$  donne donc deux équations :

$$\begin{aligned}f_s - mg \sin \alpha &= 0 \\ R_n - mg \cos \alpha &= 0\end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned}f_s &= mg \sin \alpha \\ R_n &= mg \cos \alpha\end{aligned}$$

En effectuant le rapport entre les deux équations, on obtient :

$$\tan \alpha = \frac{f_s}{R_n}. \quad (3.10)$$

L'expérience montre que la norme de la force de frottement exercée par le support sur  $A$  vérifie l'inégalité (voir Eq. 3.3, page 26) :

$$\|\vec{f}_s\| < k_s \|\vec{R}_n\|, \quad (3.11)$$

où  $k_s$  est le coefficient de frottement solide statique que nous avons défini précédemment (voir Eq. (3.3), page 26). En utilisant l'Eq. (3.10), on en déduit que pour que  $A$  reste à l'équilibre, il faut que l'angle d'inclinaison vérifie :

$$\tan \alpha < k_s.$$

Si on définit l'angle critique  $\alpha_s$  tel que  $\tan \alpha_s = k_s$ , alors  $A$  sera en équilibre tant que  $\alpha < \alpha_s$ . Lorsque  $\alpha \geq \alpha_s$ , le support ne peut plus

fournir une force de frottement suffisante pour s'opposer à la composante du poids le long de la pente.

On peut maintenant s'intéresser au cas où il y a mouvement. Dans ce cas la force de frottement que nous noterons  $\vec{f}_s$  n'est plus exactement la même. On a vu que lorsqu'il y a un mouvement relatif entre le solide et son support, l'intensité de force de frottement parallèle au support  $\|\vec{f}_c\|$  est proportionnelle à la composante orthogonale de la réaction du support  $\|\vec{R}_n\|$  (voir équation 3.4, page 26) :

$$\|\vec{F}\| = k_c \|\vec{R}_n\|$$

et  $k_c$  est le coefficient de frottement cinétique qui vérifie  $k_c < k_s$ . La résolution complète de cet exemple sera traité en TD. Il suffit de décomposer le principe fondamental de la dynamique sur les axes  $Ox$  et  $Oy$  que nous avons défini plus haut.

*Rectiligne avec frottement visqueux* : On reprend le problème de la chute rectiligne de la bille, mais on considère que la bille est dans un fluide visqueux. On lâche donc une bille de masse  $m$  d'une hauteur  $h$  sans vitesse initiale.

1. **Bilan des forces** : en plus du poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  on ajoute dans notre modélisation la force de frottement visqueux (voir Eq. (3.2), page 25)  $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$  où  $\vec{v}$  est la vitesse de la bille à chaque instant.
2. **Composantes dans un repère cartésien** : dans le même repère, en plus de  $\vec{P} = -mg\vec{k}$ , on aura  $\vec{F} = -\lambda(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k})$ , où  $(v_x, v_y, v_z)$  sont les composantes du vecteur vitesse  $\vec{v}$  et  $\lambda$  est une constante.
3. **PFD** : Comme  $\vec{a} = \dot{v}_x\vec{i} + \dot{v}_y\vec{j} + \dot{v}_z\vec{k}$  le PFD est équivalent aux trois équations suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} m\dot{v}_x = -\lambda v_x \\ m\dot{v}_y = -\lambda v_y \\ m\dot{v}_z = -\lambda v_z - mg \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{v}_x + \frac{\lambda}{m}v_x = 0 \\ \dot{v}_y + \frac{\lambda}{m}v_y = 0 \\ \dot{v}_z + \frac{\lambda}{m}v_z = -g \end{array}$$

Les composantes de la vitesse vérifient donc trois équations différentielles du premier ordre, linéaires, à coefficients constants. Les deux premières sont homogènes (sans second membre) et la dernière n'est pas homogène et le second membre est une constante ( $-g$ ).

4. **Solution des équations différentielles du mouvement** : Nous avons bien identifié le type des équations différentielles du mouvement. On rappelle la solution générale (c'est à dire l'ensemble des solutions) d'une équation différentielle linéaire à coefficients constant homogène du premier ordre (voir Appendice C) :

$$\dot{v}(t) + \frac{1}{\tau}v(t) = 0 \Leftrightarrow v(t) = Ce^{-\frac{t}{\tau}}$$

où  $C$  est une constante. Donc, on obtient ici l'ensemble des solutions des deux premières équations, en posant  $\tau \equiv \frac{m}{\lambda}$  :

$$\begin{aligned}v_x(t) &= C_1 e^{-\frac{t}{\tau}} \\v_y(t) &= C_2 e^{-\frac{t}{\tau}}\end{aligned}$$

Comme à l'instant initial  $t = 0$ ,  $v_x = v_y = 0$ , on doit choisir  $C_1 = C_2 = 0$ . Donc,  $\forall t > 0$  les composantes  $v_x$  et  $v_y$  de la vitesse restent nulles.

Regardons maintenant la composante  $v_z(t)$ . Elle vérifie une équation inhomogène (avec second membre) :

$$\dot{v}_z(t) + \frac{\lambda}{m} v_z(t) = -g.$$

Or on sait que la solution générale  $v_z(t)$  d'une équation différentielle inhomogène s'obtient en prenant la somme  $v_z(t) = v_z^{(h)}(t) + v_z^{(p)}(t)$  de la solution générale de l'équation différentielle homogène  $v_z^{(h)}(t)$  (sans second membre) et d'une solution particulière  $v_z^{(p)}(t)$  de l'équation inhomogène (avec le second membre).

— La solution générale de l'équation homogène est :

$$v_z^{(h)}(t) = C e^{-\frac{t}{\tau}}$$

puisque l'équation différentielle homogène est la même que pour les autres composantes de la vitesse.

— Comme le second membre est une constante, il est très simple de trouver une solution particulière. Il suffit de chercher une solution constante (qui ne dépend pas du temps  $t$ ). Si  $v_z^{(p)}$  est une constante alors sa dérivée est nulle et l'équation différentielle devient

$$\frac{\lambda}{m} v_z^{(p)} = -g \Leftrightarrow v_z^{(p)} = -\frac{mg}{\lambda} = -g\tau.$$

où on a remplacé  $\frac{m}{\lambda} \equiv \tau$ .

On en déduit la solution générale :

$$v_z(t) = v_z^{(h)}(t) + v_z^{(p)} = C e^{-\frac{t}{\tau}} - g\tau.$$

Il faut maintenant choisir la valeur de la constante  $C$ , pour que la condition initiale sur la vitesse soit satisfaite, c'est à dire  $v_z(t = 0) = 0$ . On obtient :

$$v_z(t = 0) = 0 \Rightarrow C - g\tau \Rightarrow C = g\tau.$$

On en déduit la vitesse de la bille à chaque instant  $t$  :

$$v_z(t) = -g\tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right); \quad \text{avec } \tau \equiv \frac{m}{\lambda}.$$

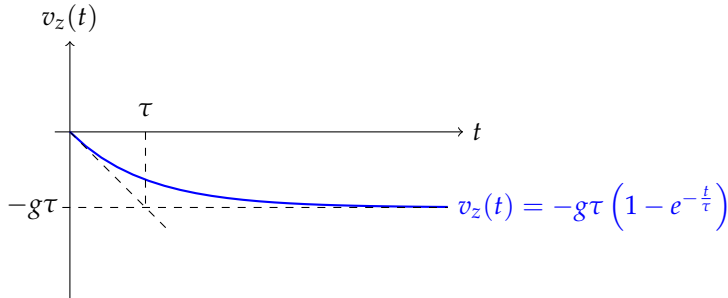


FIGURE 3.6: Composante verticale de la vitesse en fonction du temps. Quand  $t \gg \tau$ ,  $v_z(t) \simeq -g\tau$ . La droite tangente au graphe de la fonction  $v_z(t)$ , au point  $t = 0$ , intersecte l'asymptote  $v_z = -g\tau$ , au point de coordonnées  $(\tau, -g\tau)$

Le graphe de la fonction  $v_z(t)$  en fonction du temps  $t$  est présenté sur la figure 3.6.

On en déduit la position de la bille en prenant une primitive de  $v_z(t)$  pour obtenir  $z(t)$ . On obtient :

$$z(t) = -g\tau \left( t + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right) + C \Rightarrow z(t) = -g\tau^2 \left( \frac{t}{\tau} + e^{-\frac{t}{\tau}} \right) + C.$$

où  $C$  est une constante qu'il faut choisir pour que  $z(t)$  vérifie bien la condition initiale  $z(t = 0) = h$  ce qui donne :

$$h = -g\tau^2 + C \Rightarrow C = h + g\tau^2.$$

On obtient donc la côte  $z(t)$  de la bille en fonction du temps  $t$  :

$$z(t) = h - g\tau^2 \left( \frac{t}{\tau} + e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 \right).$$

#### Remarques

- On vérifie simplement que  $\tau$  possède bien la dimension d'un temps  $[\tau] = T$  et que donc les expressions donnant  $v_z(t)$  et  $z(t)$  sont correctement dimensionnées.
- Lorsque  $t \gg \tau$  alors  $e^{-\frac{t}{\tau}} \ll 1$ . On peut donc négliger le terme exponentiel dans l'expression qui donne  $v_z(t)$  ainsi que dans celle donnant  $z(t)$ . On a donc :

$$t \gg \tau \Rightarrow \begin{cases} v_z \simeq -g\tau = -\frac{mg}{\lambda} \\ z(t) \simeq h - g\tau t = h - \frac{mg}{\lambda} t \end{cases}$$

C'est à dire que la vitesse est constante et le mouvement devient uniforme (voir figure 3.6). On dit que la bille possède une vitesse limite dont la norme est donnée par  $g\tau = \frac{mg}{\lambda}$ .

#### 3.5.2 Oscillateur harmonique

On considère une bille de masse  $m$ , considérée comme ponctuelle qui est accrochée à l'extrémité d'un ressort horizontal, de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ . L'autre extrémité du ressort est fixée en un point C. A

l'instant initial que l'on prendra  $t = 0$ , on étire le ressort d'une quantité  $x_0$ , par rapport à sa position au repos, et on lâche la bille sans vitesse initiale. Le mouvement de la bille et du ressort est horizontal et reste le long d'un axe  $Ox$ , porté par le vecteur unitaire  $\vec{i}$ , et dont l'origine  $O$  correspond à la position au repos. On néglige la masse du ressort ainsi que tous les frottements possibles. Le mouvement de la masse est un mouvement périodique d'oscillations, qui se répètera infiniment puisqu'on a négligé les forces de frottement.

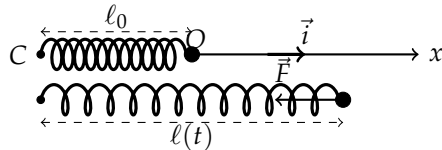


FIGURE 3.7: Bille de masse  $m$  accrochée à un ressort.

1. **Identification du système :** Le système étudié est la bille de masse  $m$  qui est accrochée au ressort. Le ressort ne fait pas partie du système étudié, il est extérieur au système et exerce une force sur la bille.
2. **Bilan des forces :** Les forces qui s'appliquent sur la bille sont : le poids de la bille  $\vec{P}$  qui est complètement compensé par la réaction  $\vec{R}$  du support horizontal sur lequel la bille est posée. Le ressort exerce une force de rappel  $\vec{F}$  sur la bille qui est proportionnelle à l'allongement du ressort  $\vec{F} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{i}$  (voir section 3.2.2, Eq. 3.1, page 24), où  $\ell(t)$  est la longueur du ressort à un instant  $t$  quelconque, au cours du mouvement de la bille.
3. **Composantes dans un repère cartésien :** Le mouvement est rectiligne. Il a lieu le long de l'axe  $Ox$ . Il est avantageux de prendre la position de la bille à l'équilibre pour l'origine  $O$  des coordonnées sur l'axe  $Ox$ . En effet dans ce cas la force de rappel du ressort s'écrit :  $\vec{F} = -kx(t)\vec{i}$ , où  $x(t) = \ell(t) - \ell_0$ . Comme le mouvement reste rectiligne sur l'axe  $Ox$ , la somme des composantes des forces orthogonales à  $Ox$  doit être nulle. On a donc  $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$ .
4. **PFD :** La résultante des forces est donc la force de rappel du ressort  $\vec{F} = -kx(t)\vec{i}$ , on a donc :

$$m\vec{a} = \vec{F} = -kx(t)\vec{i}$$

Comme  $\vec{a} = \ddot{x}(t)\vec{i}$ , le PFD devient :

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) \Leftrightarrow \ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0.$$

On obtient une équation différentielle du second ordre, homogène (le second membre est nul), linéaire et à coefficients constants.

**Oscillateur harmonique :** masse  $m$  accrochée à un ressort horizontal de raideur  $k$ . Equation différentielle du mouvement :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \text{avec } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Solution correspondant aux conditions initiales :

$$x_0 = x(t=0), \quad v_0 = \dot{x}(t=0)$$

est

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

Le mouvement est périodique de période  $T$ , avec :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

5. **Solution des équations différentielles du mouvement :** L'équation différentielle du mouvement peut s'écrire :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \text{avec } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.12)$$

où  $\omega$  à la dimension de l'inverse d'un temps  $[\omega] = T^{-1}$ . En effet, on montre facilement que  $[\frac{k}{m}] = T^{-2}$ , pour que l'équation différentielle soit homogène.

La solution générale (c'est à dire l'ensemble de toutes les solutions) de cette équation différentielle peut s'écrire :

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (3.13)$$

où  $A$  et  $B$  sont deux constantes réelles quelconques.

Les constantes  $A$  et  $B$  doivent être choisies de telle sorte que le mouvement soit conforme aux conditions initiales. Notons  $x_0$  et  $v_0$ , la position et la vitesse de la bille à l'instant  $t = 0$ , c'est à dire que :

$$x_0 \equiv x(t = 0); \quad v_0 \equiv \dot{x}(t = 0). \quad (3.14)$$

A l'aide l'équation (3.13), on obtient :  $x(t = 0) = A$  et en dérivant l'équation (3.13) par rapport au temps, on obtient  $\dot{x}(t = 0) = \omega B$ .  
Donc :

$$A = x_0 \text{ et } B = \frac{v_0}{\omega}.$$

L'équation horaire de l'oscillateur harmonique, avec les conditions initiales données par l'Eq. (3.14) est donc :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t); \quad \text{avec } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3.15)$$

*Remarques* On trouve bien un mouvement périodique. Par définition, la période est donnée par la plus petite valeur de  $T$  telle que  $x(t + T) = x(t)$ . C'est à dire que  $T$  est telle que  $x_0 \cos(\omega t + \omega T) = x_0 \cos(\omega t)$ . Comme la période de la fonction  $\cos$  est égale à  $2\pi$ , on a  $\omega T = 2\pi$  et donc

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

On remarque que la période du mouvement ne dépend pas des condition initiales  $x_0$  et  $v_0$ . C'est ce qu'on appelle l'isochronie des oscillations. Cette propriété n'est pas très intuitive et elle est liée au fait que la force de rappel  $\vec{F}$  est proportionnelle à l'allongement du ressort. Dans la réalité, cette isochronie n'est vraie que pour une faible amplitude d'oscillation. Si on étire trop le ressort, la période deviendra une fonction de l'amplitude. Elle augmentera quand l'amplitude augmentera.





# 4

## *Energie*

### 4.1 *Introduction*

#### 4.1.1 *Énergie et lois de conservation*

La notion « d'énergie » est rentrée dans l'usage courant depuis bien longtemps, mais de quoi parle-t-on précisément ? Considérons quelques petits exemples pour en cerner les contours.

*Exemple 1 : moteur de voiture.* – Afin de faire avancer une voiture, on brûle de l'essence dans un moteur. Le phénomène de combustion des hydrocarbure libère de l'*énergie chimique* qui est convertie en *énergie mécanique* (mouvement des pistons et rotation des roues) :

énergie chimique  $\longrightarrow$  énergie mécanique

*Exemple 2 : freinage de la voiture.* – La voiture est lancée avec une certaine vitesse, on peut l'arrêter en appuyant sur la pédale de frein. On induit ainsi une force de frottement. L'énergie mécanique est convertie en énergie thermique (les plaques de frein chauffent) :

mécanique  $\longrightarrow$  thermique

*Exemple 3 : barrage hydro-électrique.* – Le principe de la production d'électricité à l'aide d'un barrage consiste à accumuler un stock d'eau dans un réservoir puis à canaliser l'écoulement de manière à faire tourner une turbine. Un alternateur génère un courant électrique à partir du mouvement de la turbine. La chaîne de conversion de l'énergie est donc

gravitationnelle  $\longrightarrow$  mécanique  $\longrightarrow$  électrique

*Exemple 4 : centrale nucléaire.* – En France, l'électricité est majoritairement produite par les centrales nucléaires. On dispose d'un combustible fissile (Uranium,...) : on casse le noyau atomique afin de récupérer une partie de l'énergie de liaison entre nucléons (c'est l'analogie d'une

combustion qui casse une liaison chimique entre atomes). Cette énergie chauffe un fluide dont le mouvement fait tourner une turbine :

nucléaire  $\longrightarrow$  thermique  $\longrightarrow$  mécanique  $\longrightarrow$  électrique

*Lois de conservation* : Ces quelques exemples illustrent l'un des aspects les plus importants lié à l'énergie, à savoir sa **conservation**, et éventuellement sa conversion d'une forme en une autre forme. L'idée de dégager des lois de conservation est une idée extrêmement féconde en physique, qui en traverse tous les domaines. Cette idée fondamentale fournit également des moyens pratiques pour aider à la résolution de certains problèmes. Quelques remarques :

- La notion d'énergie permet de *penser globalement* plutôt que localement. C'est à dire qu'on ne s'intéresse pas forcément à ce qui se passe à chaque instant, mais on fait un bilan global de ce qu'on a gagné ou perdu entre deux instants. La notion d'énergie fournit ainsi des outils pour raisonner en termes de **gains et pertes** (ou de définir un « coût »).
- Finalement notons que les lois de conservation permettent de faire des découvertes.

Par exemple, c'est l'analyse énergétique de la désintégration  $\beta$  des noyaux de Bismuth en Polonium qui a conduit à postuler l'existence d'une nouvelle particule, appelée neutrino (Pauli, 1931), de telle sorte que la conservation de l'énergie soit satisfaite.

*Remarque* : Au niveau *élémentaire*, n'existent que deux formes d'énergie : l'énergie *cinétique* et l'énergie *potentielle*. L'énergie chimique (énergie de liaison des atomes pour former des molécules) combine énergie cinétique des électrons et énergie potentielle électrostatique à l'échelle atomique. L'énergie nucléaire est essentiellement l'énergie potentielle associée à l'interaction forte assurant la liaison des nucléons pour former des noyaux. L'énergie électrique est soit de l'énergie cinétique (mouvement des électrons), soit de l'énergie potentielle électrique. L'énergie thermique traduit l'agitation thermique au niveau microscopique (énergie cinétique des atomes), etc.

#### 4.1.2 *L'énergie en mécanique du point*

Dans un système mécanique l'énergie peut se présenter sous deux formes différentes : l'énergie cinétique  $E_c$  et le travail des forces qui s'appliquent au système. L'énergie cinétique représente l'état du système. Elle dépend de la masse et de la norme de la vitesse du système physique étudié. Le travail des forces est l'énergie apportée ou retirée au système, par les forces qui s'appliquent au système. Ce travail des forces, lorsqu'il

existe, fait varier l'énergie cinétique du système et change donc l'état du système. La relation entre la variation de l'énergie cinétique et le travail des forces appliquées est appelé le *théorème de l'énergie cinétique*.

Les forces qui s'appliquent peuvent être conservatives ou non conservatives. Aux forces conservatives, on peut associer une énergie potentielle  $E_p$ . On introduit alors l'énergie mécanique  $E_m$  du système :

$$E_m = E_c + E_p.$$

Si l'ensemble des forces qui travaillent sont conservatives, alors l'énergie mécanique  $E_m$  est une quantité conservée. C'est à dire que  $E_m$  ne dépend pas du temps. On dit que le *système est conservatif*. Si des forces non conservatives (et dont le travail est non nul) s'appliquent, alors  $E_m$  ne sera pas constant. La relation entre le travail des forces non conservatives et la variation de  $E_m$  est appelé le *théorème de l'énergie mécanique*. Souvent, les forces non conservatives sont des forces de frottements qui transforment l'énergie cinétique du système en chaleur. Autrement dit, l'énergie est transformée en énergie cinétique des atomes ou molécules du support ou de l'environnement (solide, liquide ou gaz) responsable du frottement. En effet, la chaleur est l'énergie cinétique d'agitation désordonnée des atomes ou molécules.

Les théorèmes sur l'énergie sont très puissants. Ils permettent de répondre à des questions globales, sans avoir à calculer les positions et vitesses du système à chaque instant. Comme cela serait le cas si on utilisait le PFD.

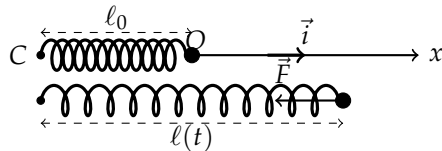
Dans le cas où le système est conservatif, la donnée de l'énergie mécanique pour toutes les positions du système est suffisant pour obtenir la dynamique complète du système. Dans ce cas le concept de force n'est plus nécessaire. C'est cette façon de faire qui a prévalu et qui a permis de formuler des théories plus générales comme la mécanique quantique par exemple.

Pour donner un sens précis à toutes ces affirmations, nous devons dans un premier temps définir ce qu'est le *travail d'une force*. Nous démontrerons ensuite le *théorème de l'énergie cinétique*. Puis, nous définirons *l'énergie potentielle* et démontrerons le *théorème de l'énergie mécanique*. Dans ce cours, nous ne traiterons pas de ces questions dans toute leur généralité. Nous nous restreindrons au cas où la trajectoire du point matériel est rectiligne. Le cas d'une trajectoire quelconque, demande l'introduction de techniques mathématiques un peu plus complexes (intégrale de circulation d'un champs de vecteur) et sera traité dans le cours de 'Mécanique II' au second semestre.

Avant de commencer, traitons un exemple simple, que nous connaissons bien : l'oscillateur harmonique.

## 4.1.3 Exemple : l'oscillateur harmonique

On considère le système de la section 3.5.2 (voir page 37) et représenté sur la figure 4.1. Il s'agit d'une bille de masse  $m$  accrochée à un ressort horizontal, de raideur  $k$ . On repère la position de la masse  $m$  par son abscisse  $x$ ; l'origine  $x = 0$  étant choisie comme la position d'équilibre.

FIGURE 4.1: Bille de masse  $m$  accrochée à un ressort.

L'équation différentielle du mouvement que nous avons obtenu à l'aide du PFD est :

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

Multiplions cette équation par  $\dot{x}$ , pour obtenir :

$$m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}x = 0. \quad (4.1)$$

Or  $\dot{x}\ddot{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\dot{x}]^2$  et  $\dot{x}x = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} x^2$ . L'Eq. (4.1) peut donc être écrite de la façon suivante :

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right\} = 0.$$

On en déduit que la quantité entre accolade est une *constante indépendante du temps*. Cette constante est l'énergie mécanique  $E_m$  de la bille :

$$E_m = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2.$$

On reconnaît l'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} m\dot{x}^2.$$

Le deuxième terme est l'énergie potentielle  $E_p$  associée à la force de rappel  $\vec{F} = -kx\vec{i}$  du ressort, qui s'applique sur la bille :

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2.$$

Au cours de son mouvement d'oscillation, chacun des deux termes varient au cours du temps mais leur somme est une constante. Lorsque  $x$  est à son maximum  $E_p$  sera maximum, et  $E_c$  sera nulle (vitesse nulle). Au point où la norme de la vitesse  $|\dot{x}|$  est maximum,  $E_c$  sera aussi maximum mais  $E_p$  sera minimum.

La force de rappel du ressort (qui est la résultante des forces appliquées) est une force conservative. L'énergie mécanique  $E_m$  de la bille est donc conservée.

**Energie mécanique d'un oscillateur harmonique**

$$m\ddot{x} + kx = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right\} = 0.$$

L'énergie mécanique  $E_m$  :

$$E_m = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

est une constante indépendante du temps. On dit que c'est une constante du mouvement.

Prenons maintenant en compte la force de frottement fluide qui s'applique sur la bille (frottement sur l'air par exemple) :

$$\vec{f} = -\lambda\vec{v},$$

où  $\lambda$  est une constante positive. A l'aide du PFD, on obtient l'équation différentielle du mouvement :

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0.$$

En effectuant le même "truc" que précédemment, on multiplie par  $\dot{x}$  cette équation et on obtient :

$$m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}x = -\lambda\dot{x}^2 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right\} = -\lambda\dot{x}^2,$$

Ce que l'on peut encore écrire :

$$\frac{dE_m}{dt} = -\lambda\dot{x}^2 < 0. \quad (4.2)$$

On voit donc que l'énergie mécanique  $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$  de la bille n'est plus conservée.  $E_m$  diminue (sa dérivée étant négative) au cours du temps. La force de frottement n'est pas conservative. On dit que la force est dissipative. Elle dissipe l'énergie de la bille. Le mouvement de la bille sera amorti. L'Eq.(4.2) constitue le théorème de l'énergie mécanique pour notre système amorti.

En fait, l'énergie de la bille est transférée à l'énergie cinétique des molécules constituant l'air qui frotte sur la bille. L'air s'échauffe donc. L'énergie totale de la bille et de l'air se conserve.

Nous avons obtenu l'énergie mécanique de la bille à partir de son équation différentielle du mouvement elle même déduite du PFD. Le but de ce chapitre est de définir l'énergie mécanique et de prévoir si elle se conserve ou non, sans avoir recours au PFD. Nous obtiendrons l'équation différentielle du mouvement à partir du théorème de l'énergie mécanique.

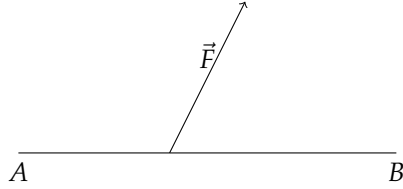
## 4.2 Travail d'une force

Dans cette section on définit le travail d'une force le long d'un chemin rectiligne. Dans ce cours, on se restreint au cas du chemin rectiligne, le cas d'un chemin de forme quelconque sera traité au second semestre.

### 4.2.1 Définitions

*Cas d'une force constante :* Le travail  $W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$  d'une force constante  $\vec{F}$  sur un segment rectiligne du point  $A$  au point  $B$  est défini par :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}. \quad (4.3)$$



Il s'agit du produit scalaire du vecteur force avec le vecteur déplacement. Cette expression n'est valable que si la force est constante, c'est à dire qu'elle ne varie pas lorsque le système emprunte le chemin  $AB$ .

On remarque que si le chemin  $AB$  est emprunté dans l'autre sens (de  $B$  vers  $A$ ), alors le travail de la force change de signe :

$$W_{B \rightarrow A}(\vec{F}) = -W_{A \rightarrow B}(\vec{F}). \quad (4.4)$$

Il est donc important de bien préciser l'orientation du chemin.

*Cas d'une force quelconque :* On considère que la force est quelconque. Elle peut varier en direction, sens ou norme au cours de déplacement sur le chemin  $AB$ , qui lui reste rectiligne.

Pour définir le travail dans ce cas plus général, on divise le chemin  $AB$  en  $N$  segments plus petits, de même longueur égale à  $\Delta x = \frac{AB}{N}$ . On peut choisir  $N$  aussi grand que l'on veut. On le choisit assez grand pour que sur chacun des  $N$  segments on puisse considérer que la force ne varie pas. On pourra alors se ramener à la définition précédente sur chacun des  $N$  petits segments. Le travail de la force sur le chemin  $AB$  sera égal à la somme des  $N$  travaux sur chacun des  $N$  segments. En fait, mathématiquement, on prendra la limite quand  $N \rightarrow \infty$  et la longueur de chacun des  $N$  segments tendra vers zéro,  $\Delta x = \frac{AB}{N} \rightarrow 0$ .

Construisons formellement ce que nous venons d'énoncer. Sur le segment  $AB$ , on introduit donc  $N + 1$  points équidistants,  $M_k (k = 0, 1, \dots, N)$ , de telle sorte que  $M_0 = A$ ,  $M_N = B$  et tel que

$$\overrightarrow{M_{k-1}M_k} = \Delta x \vec{i}; \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

où  $\vec{i}$  est un vecteur unitaire (de norme égale à 1) dans la direction et le sens de  $\overrightarrow{AB}$ . ( $\vec{i} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$ ).

On définit le travail élémentaire  $\delta W_{M_{k-1}M_k}(\vec{F}(M_k))$  sur le  $k^{\text{eme}}$  segment, en considérant que la force est constante sur ce segment :

$$\delta W_{M_{k-1}M_k}(\vec{F}(M_k)) = \vec{F}(M_k) \cdot \overrightarrow{M_{k-1}M_k} = \vec{F}(M_k) \cdot \vec{i} \Delta x$$

On définit le travail de la force  $\vec{F}$  sur le segment  $AB$  comme la somme des travaux élémentaires, dans la limite où le nombre  $N$  de segments tend vers l'infini :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \delta W_{M_{k-1}M_k}(\vec{F}(M_k)),$$

**Travail d'une force constante sur un chemin rectiligne :** Le travail  $W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$  de la force  $\vec{F}$  constante, sur le segment  $AB$  est :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

ce qu'on peut encore écrire :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^N \vec{F}(M_k) \cdot \vec{i} \Delta x.$$

La limite de cette somme peut être interprétée comme la définition de l'intégrale de Riemann (voir annexe F, page 125), sur l'intervalle  $[x_A, x_B]$  de la fonction  $f(x) \equiv \vec{F}(x) \cdot \vec{i}$ , qui représente la composante de la force (calculée au point  $M$  d'abscisse  $x$ ) sur l'axe  $AB$ . On notera :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_{A \rightarrow B} \vec{F}(x) \cdot \vec{i} dx.$$

**Travail d'une force quelconque sur un chemin rectiligne :** Le travail de la force  $\vec{F}$  sur le segment  $AB$  est :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_{A \rightarrow B} \vec{F}(x) \cdot \vec{i} dx$$

où  $\vec{AM} = x\vec{i}$ .

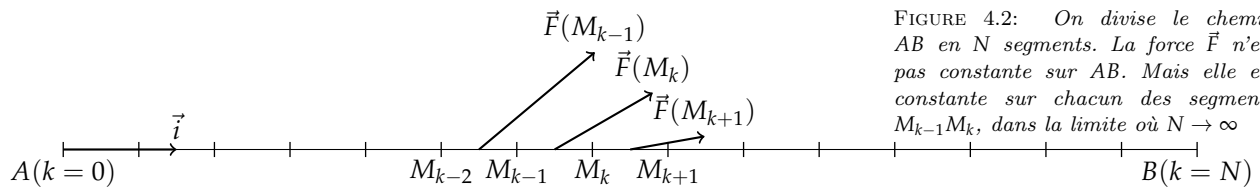


FIGURE 4.2: On divise le chemin  $AB$  en  $N$  segments. La force  $\vec{F}$  n'est pas constante sur  $AB$ . Mais elle est constante sur chacun des segments  $M_{k-1}M_k$ , dans la limite où  $N \rightarrow \infty$

#### 4.2.2 Propriétés

*Dimension et unité* La dimension d'un travail est la dimension d'une longueur multipliée par celle d'une force, soit :

$$[W_{A \rightarrow B}(\vec{F})] = [\vec{F}] L = ML^2T^{-2}.$$

Le travail a donc la même dimension que celle d'une énergie. Le travail d'une force qui s'applique sur un système est l'énergie apportée (si le travail est positif) ou retirée (s'il est négatif) au système, par la force. Lorsqu'il est positif, on dira que le travail est *moteur* et lorsqu'il est négatif on dira que le travail est *résistant*.

Le travail d'une force étant une énergie, son unité dans le système international est donc le joule.

*Orthogonalité :* Lorsque en tout point du chemin, la direction de la force est orthogonale au chemin, le travail de la force sur le chemin est nul. En effet, le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul.

*Relation de Chasle :* Soit  $C$  un point du segment  $AB$ . En partant de la définition du travail, il n'est pas difficile de montrer la relation suivante :

$$W_{A \rightarrow C}(\vec{F}) + W_{C \rightarrow B}(\vec{F}) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}). \quad (4.5)$$

*Linéarité* : Soit  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$ , deux forces qui s'appliquent au même point du système lorsqu'il parcourt le segment  $AB$ . A partir de la définition du travail, on montre simplement que :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_1) + W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_2)$$

### 4.2.3 Calculs de travaux

*Recette* : Pour calculer le travail d'une force  $\vec{F}$  sur un segment  $AB$ , il faudra réaliser les étapes suivantes :

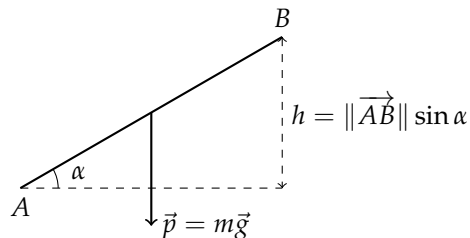
1. **Paramétrisation du chemin  $AB$**  : On choisit un axe  $Ox$  contenant le segment  $AB$ . La position d'un point  $M$  quelconque sur le segment  $AB$  est repérée par son abscisse  $x$ . On note  $x_A$  l'abscisse du point  $A$  et  $x_B$  l'abscisse sur point  $B$ .
2. En un point  $M$  quelconque du chemin, d'abscisse  $x$ , on calcule le produit scalaire  $f(x) \equiv \vec{F}(M) \cdot \vec{i}$ , qui est la composante de la force  $\vec{F}(M)$  sur l'axe  $Ox$ . C'est une fonction de l'abscisse  $x$  du point  $M$  sur l'axe  $Ox$ .
3. Le travail est donné par l'intégrale :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_{A \rightarrow B} \vec{F}(x) \cdot \vec{i} dx = \int_{x_A}^{x_B} f(x) dx.$$

Finalement, le calcul du travail d'une force revient à calculer une intégrale ordinaire.

*Exemples* :

1. **Travail du poids à la surface de la Terre** : On considère le travail du poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  qui s'applique sur un corps de masse  $m$  à la surface de la Terre, sur le segment  $AB$ . L'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$  est verticale et orientée vers le bas.  $AB$  fait un angle  $\alpha$  avec l'horizontale (voir figure 4.3).



Comme le poids est une force constante, le travail du poids sur le segment  $AB$  est simplement :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{AB} = mg \|\vec{AB}\| \cos(\widehat{\vec{P}, \vec{AB}}) = -mg \|\vec{AB}\| \sin \alpha.$$

**Propriétés :**

— **Dimension** :

$$[W_{A \rightarrow B}(\vec{F})] = ML^2T^{-2}.$$

Le travail est une énergie.

— **Unité** : unité internationale d'énergie : le joule.

— **Orthogonalité** : Si  $\forall M \in AB$ ,  $\vec{F}(M) \perp \vec{AB}$  alors  $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = 0$ .

— **Chasle** :

$$W_{A \rightarrow C}(\vec{F}) + W_{C \rightarrow B}(\vec{F}) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$$

.

— **Linéarité** :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_1) + W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_2),$$

si  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  s'appliquent au même point du système.

FIGURE 4.3: Travail du poids sur le segment  $AB$ .



On remarque que  $\|\vec{AB}\| \sin \alpha$  est la hauteur  $h$  du point  $B$  par rapport à celle de  $A$ . On en déduit que :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = -mg(z_B - z_A)$$

où  $z_A$  et  $z_B$  sont les hauteurs respectives des points  $A$  et  $B$ . On aurait pu trouver ce résultat d'une autre façon. On écrit les composantes des vecteurs  $\vec{P}$  et  $\vec{AB}$  sur la base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , où  $\vec{k}$  est vertical orienté vers le haut. On obtient :

$$\begin{aligned}\vec{P} &= -mg\vec{k} \\ \vec{AB} &= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}.\end{aligned}$$

On en déduit donc le travail en calculant produit scalaire :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{AB} = -mg(z_B - z_A).$$

On remarque que le travail du poids ne dépend que de la position du point initial  $A$  et final  $B$ . Plus précisément, il ne dépend que de la hauteur de  $A$  et  $B$ . Il ne dépend pas de la trajectoire empruntée pour aller de  $A$  à  $B$ .

2. **Travail de la force de rappel d'un ressort :** Revenons à l'exemple que nous avons traité au début de ce chapitre (voir section 4.1.3, 44). Considérons le travail de la force de rappel  $\vec{F} = -kx\vec{i}$ , qui s'applique sur la bille attachée au ressort horizontal, quand elle se déplace sur l'axe  $Ox$  d'un point  $A$  d'abscisse  $x_A$  à un point  $B$  d'abscisse  $x_B$ . La paramétrisation du chemin est ici évidente et  $f(x) = \vec{F} \cdot \vec{i} = -kx$ , donc

$$\begin{aligned}W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) &= \int_{A \rightarrow B} \vec{F}(x) \cdot \vec{i} dx = \int_{x_A}^{x_B} -kx dx = \left[ -\frac{1}{2}kx^2 \right]_{x_A}^{x_B} \\ &= \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2).\end{aligned}$$

On remarque que le travail de la force de rappel du ressort d'un point  $A$  à un point  $B$ , ne dépend que de la position du point de départ  $A$  et du point d'arrivée  $B$ . Il ne dépend pas de la trajectoire parcourue pour aller de  $A$  à  $B$ .

### 4.3 Théorème de l'énergie cinétique

#### 4.3.1 Énoncé du théorème

La variation de l'énergie cinétique entre deux points de la trajectoire d'un mobile est égale à la somme des travaux des forces qui s'appliquent sur le mobile, calculés sur la trajectoire du mobile entre ses deux mêmes points.

**Travail du poids :** Le travail du poids  $\vec{P} = m\vec{g}$ , sur le segment  $AB$  est :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = -mg(z_B - z_A).$$

où  $z_{A(B)}$  est la hauteur du point  $A(B)$ .

**Travail de la force de rappel élastique :** Le travail de la force de rappel élastique  $\vec{F} = -kx\vec{i}$  le segment  $AB$  est :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2).$$

Formalisons cet énoncé. Pour cela, considérons un point matériel de masse  $m$ , passant par le point  $A$  au temps  $t_A$  et par le point  $B$  au temps  $t_B$  ( $t_B > t_A$ ). Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit de la façon suivante :

$$E_c(t_B) - E_c(t_A) = \sum_{\vec{F}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}),$$

où  $E_c(t) = \frac{1}{2}m\|\vec{v}(t)\|^2$  est l'énergie cinétique du mobile au temps  $t$  et  $\sum_{\vec{F}}$  désigne la somme sur toutes les forces qui s'appliquent au mobile. Le travail  $W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$  est calculé sur la trajectoire effectivement empruntée par le mobile.

#### 4.3.2 Démonstration du théorème

Nous allons démontrer le théorème de l'énergie cinétique dans le cas particulier où la trajectoire est rectiligne, puisque nous avons défini le travail d'une force uniquement sur un chemin rectiligne. Mais, le théorème est général et est vrai quelque soit la forme de la trajectoire.

Le long de sa trajectoire, l'accélération du mobile satisfait le principe fondamental de la dynamique (PFD) :

$$m\vec{a} = \sum_{\vec{F}} \vec{F}.$$

On considère que la trajectoire est rectiligne. On repère la position du mobile par son abscisse  $x(t)$  à chaque instant  $t$  sur l'axe  $Ox$  support de sa trajectoire. On pourra donc écrire le PFD de la façon suivante :

$$m\ddot{x}\vec{i} = \sum_{\vec{F}} \vec{F}.$$

Effectuons le produit scalaire de cette équation avec le vecteur vitesse  $\vec{v} = \dot{x}\vec{i}$  du mobile, on obtient :

$$m\ddot{x}\dot{x} = \sum_{\vec{F}} \vec{F} \cdot \vec{i}\dot{x}. \quad (4.6)$$

Or  $\ddot{x}\dot{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}^2)$ , donc en intégrant par rapport au temps le membre de gauche de l'égalité Eq. (4.6), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{t_A}^{t_B} m\ddot{x}\dot{x} dt &= \int_{t_A}^{t_B} \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (\dot{x}^2) dt = \left[ \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right]_{t_A}^{t_B} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t_B) - \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t_A) \\ &= \frac{1}{2} m \|\vec{v}_B\|^2 - \frac{1}{2} m \|\vec{v}_A\|^2 \\ &= E_c(t_B) - E_c(t_A). \end{aligned}$$

maintenant, intégrons, par rapport au temps  $t$ , le membre de droite de l'Eq. (4.6), on obtient :

$$\int_{t_A}^{t_B} \sum_{\vec{F}} \vec{F} \cdot \vec{i}\dot{x} dt = \sum_{\vec{F}} \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot \vec{i} \frac{dx}{dt} dt = \sum_{\vec{F}} \int_{x_A}^{x_B} \vec{F} \cdot \vec{i} dx = \sum_{\vec{F}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}).$$

#### **Théorème de l'énergie cinétique :**

La variation de l'énergie cinétique d'un mobile entre deux points  $A$  et  $B$  de sa trajectoire est égale à la somme des travaux des forces qui s'appliquent sur le mobile, calculés sur la trajectoire empruntée par le mobile.

$$E_c(t_B) - E_c(t_A) = \sum_{\vec{F}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}).$$

Dans la seconde égalité nous avons effectué le changement de variable  $t \rightarrow x$  (donné par l'équation horaire  $x = x(t)$ ) dans l'intégrale (voir annexe F, Eq. F.14, page 129). Finalement, nous avons bien démontré, qu'en intégrant l'équation Eq. (4.6) par rapport au temps, on obtient ;

$$\int_{t_A}^{t_B} m\ddot{x}x dt = \int_{t_A}^{t_B} \sum_{\vec{F}} \vec{F} \cdot \vec{v} dt \Leftrightarrow E_c(t_B) - E_c(t_A) = \sum_{\vec{F}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}),$$

qui est bien le théorème de l'énergie cinétique.

### 4.3.3 Exemple

Un mobile de masse  $m$  est posé sur une table en un point  $O$ . Il est lancé avec une vitesse initial  $\vec{v}_0$  horizontale. Il glisse sur la table horizontale et subit une force de frottement solide que l'on notera  $\vec{f}$ . On notera  $k_c$  le coefficient de frottement cinétique. Quelle est la distance  $\ell$  parcourue par le mobile jusqu'à son immobilisation complète ?

Le mobile est soumis à son poids  $\vec{P} = m\vec{g}$ , vertical et orienté vers le bas, qui est complètement compensé par la force de réaction  $\vec{R}$  de la table, verticale et orientée vers le haut :  $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$ , puisqu'il n'y a pas d'accélération dans la direction verticale.

Le mobile est aussi soumis à la force de frottement solide  $\vec{f}$  dont la norme est donnée par :

$$\|\vec{f}\| = k_c \|\vec{R}\| = k_c mg,$$

et qui est opposée à la vitesse du mobile.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique, entre l'instant initial  $t = 0$  et l'instant final  $t_f$  auquel le mobile s'arrête.

$$E_c(t_f) - E_c(t = 0) = W_{O \rightarrow A}(\vec{P}) + W_{O \rightarrow A}(\vec{R}) + W_{O \rightarrow A}(\vec{f}).$$

où on a noté  $A$  le point atteint par le mobile à la fin de sa trajectoire. Comme  $\vec{P}$  et  $\vec{R}$  sont en tout point de la trajectoire orthogonale au déplacement, leur travail respectif est nul. Il reste donc :

$$E_c(t_f) - E_c(t = 0) = W_{O \rightarrow A}(\vec{f}).$$

Or,  $E_c(t_f) = 0$  puisque le mobile est à l'arrêt à l'instant  $t_f$ , et  $E_c(t = 0) = \frac{1}{2}m\|\vec{v}_0\|^2$ , donc :

$$\frac{1}{2}m\|\vec{v}_0\|^2 = -W_{O \rightarrow A}(\vec{f}).$$

Calculons le travail de la force de frottement. Comme la force est constante, on a simplement :

$$W_{O \rightarrow A}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{OA} = -k_c mg \|\vec{OA}\|.$$

On a donc obtenu :

$$\frac{1}{2}m\|\vec{v}_0\|^2 = k_c mg \|\vec{OA}\|.$$

La distance  $\ell = \|\vec{OA}\|$  cherchée est donc :

$$\ell = \frac{\|\vec{v}_0\|^2}{2k_c g}$$

*Remarque :* Nous avons obtenu la distance parcourue directement, sans avoir utilisé le PFD. Nous n'avons pas eu besoin de résoudre une équation différentielle. En contrepartie, nous n'avons pas d'information sur le temps mis par le mobile pour parcourir la distance  $\ell$ . Nous avons une réponse à une question globale temporellement, mais nous n'avons pas d'information locale en temps sur la cinématique du mobile tout au long de sa trajectoire du point  $O$  au point  $A$ .

#### 4.3.4 Version locale du théorème de l'énergie cinétique

*Enoncé du théorème :* La dérivée de l'énergie cinétique par rapport au temps est égale à la somme des puissances développées par les forces qui s'appliquent au système.

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_{\vec{F}} \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

où la somme  $\sum_{\vec{F}}$  est effectuée sur les forces  $\vec{F}$  qui s'appliquent sur le système et  $\vec{v}$  est la vitesse du point d'application de la force.

*Puissance développée par une force :* Le produit scalaire  $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$  est appelée puissance développée par la force sur le système.  $\mathcal{P}$  représente le travail exercée par la force par unité de temps. La dimension d'une puissance est donc celle d'une énergie divisé par un temps :

$$[\mathcal{P}] = [E]T^{-1} = ML^2T^{-3}.$$

Son unité dans le système international est le watt, noté W.

*Démonstration du théorème :* Considérons deux instants très proches l'un de l'autre,  $t_A$  et  $t_B = t_A + \Delta t$ . Les deux points correspondant  $A$  et  $B$  de la trajectoire du mobile, sont alors très proches l'un de l'autre,  $x_A$  et  $x_B = x_A + \Delta x$ . On choisit  $\Delta t$  assez petit pour que que les deux points  $A$  et  $B$  soient assez proches l'un de l'autre de telle sorte qu'on puisse approxier le travail par  $W_{A \rightarrow B}(\vec{F})(x_A) \simeq \vec{F} \cdot \vec{i} \Delta x$ . C'est à dire que la force ne varie pratiquement pas pendant le temps  $\Delta t$  où le mobile se déplace de  $\Delta x$ . Mathématiquement, on prendra la limite  $\Delta t \rightarrow 0$  et donc aussi  $\Delta x \rightarrow 0$ .

**Theorème de l'énergie cinétique local :**

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_{\vec{F}} \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

où la somme  $\sum_{\vec{F}}$  est effectuée sur les forces  $\vec{F}$  qui s'appliquent sur le système et  $\vec{v}$  est la vitesse du point d'application de la force.

**Puissance développée par une force :** la puissance  $\mathcal{P}$  développée par une force  $\vec{F}$  est :

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

$\mathcal{P}$  représente le travail exercée par la force par unité de temps.

$$[\mathcal{P}] = ML^2T^{-3}.$$

Son unité dans le S.I. est le watt, symbolisé par W.

Le théorème de l'énergie cinétique entre ces deux instants infiniment proches prend la forme suivante :

$$E_c(t_A + \Delta t) - E_c(t_A) = \sum_{\vec{F}} \vec{F}(x_A) \cdot \vec{i} \Delta x.$$

En divisant cette équation par  $\Delta t$  et en prenant la limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , on obtient l'expression :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E_c(t_A + \Delta t) - E_c(t_A)}{\Delta t} = \sum_{\vec{F}} \vec{F}(x_A) \cdot \vec{i} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

On reconnaît dans le membre de gauche de cette égalité la limite du taux d'accroissement de la fonction  $E_c(t)$ , c'est à dire la dérivée  $\frac{dE_c}{dt}$  et dans le membre de droite  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ . Or, comme on a considéré que la trajectoire était rectiligne (dans le sens du vecteur unitaire  $\vec{i}$ ), la vitesse du mobile est  $\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{i}$ . On obtient donc :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_{\vec{F}} \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

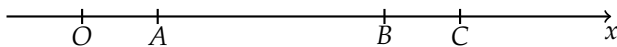
où la somme est effectuée sur l'ensemble des forces qui s'appliquent sur le système.

#### 4.4 Forces conservatives – Energie potentielle

##### 4.4.1 Forces conservatives

*Définition :* On dira qu'une force est conservative si elle ne dépend que de la position et si son travail d'un point  $A$  au point  $B$  ne dépend pas du chemin suivi, ceci quels que soient les point  $A$  et  $B$ . Dans ce cas le travail  $W(\vec{F})_{A \rightarrow B}$  de la force  $\vec{F}$  du point  $A$  au point  $B$  ne dépend que des positions des points  $A$  et  $B$ . Cette définition est totalement générale, mais nous n'avons pas défini le travail sur des chemins quelconques. Dans le cas où l'on ne s'autorise que des chemins rectilignes pour le calcul des travaux des forces, quelle est le sens de cette définition ? Quel est le sens de "ne dépend pas du chemin suivi" lorsque le travail est défini sur un segment rectiligne  $AB$  ? En fait, il est possible de définir une infinité de trajectoires rectilignes qui vont du point  $A$  au point  $B$  tout en restant sur la droite  $Ox$  qui passe par  $A$  et  $B$ . En effet, soit un point  $C$  situé sur la droite  $Ox$  mais en dehors du segment  $AB$ . Le chemin  $AC \cup CB$  est rectiligne, il part de  $A$  et arrive en  $B$ .

**Force conservative :** On dira qu'une force est conservative si elle ne dépend que de la position et si son travail d'un point  $A$  au point  $B$  ne dépend pas du chemin suivi, ceci quels que soient les point  $A$  et  $B$ . Dans ce cas le travail  $W(\vec{F})_{A \rightarrow B}$  de la force  $\vec{F}$  du point  $A$  au point  $B$  ne dépend que des positions des points  $A$  et  $B$ .



Si la force est conservative alors son travail de  $A$  à  $B$  en passant par un point  $C$  quelconque de la droite  $Ox$  ne dépend pas du point  $C$ , mais uniquement des abscisses  $x_A$  et  $x_B$  des points  $A$  et  $B$ .

*Exemples :*

1. **Force de rappel élastique :** Considérons l'oscillateur harmonique. Nous avons vu que le travail de la force de rappel élastique  $\vec{F} = -kx\vec{i}$  d'un point  $A$  à un point  $B$  était donné par l'expression suivante :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2).$$

Nous avons fait ce calcul en supposant que le chemin allait du point  $A$  au point  $B$  directement. On peut faire le même calcul en supposant que le chemin de  $A$  à  $B$  passe par un point  $C$  de l'axe  $Ox$  et qui n'appartient pas forcément au segment  $AB$ . En effet, le travail de  $A$  à  $B$  en passant par le point  $C$  peut s'écrire comme la somme :

$$W_{A \rightarrow C}(\vec{F}) + W_{C \rightarrow B}(\vec{F}) = \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_C^2) + \frac{1}{2}k(x_C^2 - x_B^2) = \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2).$$

On en déduit donc la force de rappel élastique est une force conservative.

2. **Force de frottement visqueux :** toujours dans le cas de l'oscillateur harmonique considérons la force de frottement visqueux, opposée à la vitesse  $\vec{f} = -\lambda\dot{x}\vec{i}$ . Le travail de cette force de  $A$  à  $B$  est :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = \int_{x_A}^{x_B} \vec{f} \cdot \vec{i} dx = -\lambda \int_{x_A}^{x_B} \dot{x} dx.$$

En effectuant le changement de variable  $x \rightarrow t$  (donné par la loi horaire  $x = x(t)$ ), on obtient :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = -\lambda \int_{t_A}^{t_B} \dot{x}^2 dt$$

Il est clair que le travail de cette force dépend du chemin suivi. Il ne dépend pas uniquement de la position de  $A$  et de  $B$  mais des instants  $t_A$  et  $t_B$  auxquels le mobile est en ces points et du carré de la vitesse tout le long de la trajectoire.

3. **Le poids à la surface de la Terre :** On montre simplement que le poids à la surface de Terre est une force conservative. Cela est vrai pour toute force constante.

#### 4.4.2 *Energie potentielle associée à une force*

*Définition :* Lorsqu'une force  $\vec{F}$  est conservative, on peut lui associer une énergie potentielle  $E_p(M)$  qui est une fonction de la position  $M$ . L'énergie potentielle est une fonction telle que :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = E_p(A) - E_p(B),$$

pour tout couple de points  $A$  et  $B$  de l'espace. En fait, on montre que si pour tous les points  $A$  et  $B$  de l'espace, il existe une fonction  $E_p(M)$ , qui

permet d'écrire le travail de  $\vec{F}$  de cette façon, alors la force est conservative.

Dans le cas particulier, considérer ici, où le chemin est rectiligne sur la droite  $Ox$ ,  $E_p(x)$  sera une fonction de l'abscisse  $x$  du mobile sur l'axe  $Ox$  et on pourra écrire :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = E_p(x_A) - E_p(x_B).$$

En effet, dans le cas d'une force conservative, le travail ne peut dépendre des positions que par la différence  $E_p(x_A) - E_p(x_B)$ . C'est une conséquence de la relation de Chasles (Eq. (4.5)). En effet, si on note  $f_{x_C}(x_A) \equiv W_{C \rightarrow A}(\vec{F})$  alors on aura :

$$\begin{aligned} W_{C \rightarrow A}(\vec{F}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) &= W_{C \rightarrow B}(\vec{F}) \Leftrightarrow W_{C \rightarrow A}(\vec{F}) - W_{C \rightarrow B}(\vec{F}) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) \\ &\Leftrightarrow f_{x_C}(x_A) - f_{x_C}(x_B) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}). \end{aligned}$$

On peut donc choisir l'énergie potentielle  $E_p(x) = f_{x_C}(x)$ . C'est l'énergie potentielle associée à  $\vec{F}$  qui s'annule pour  $x = x_C$ . En effet,  $E_p(x_C) = f_{x_C}(x_C) = W_{C \rightarrow C}(\vec{F}) = 0$ .

*Force et énergie potentielle :* On cherche une relation plus directe entre le vecteur force et la fonction énergie potentielle associée. Pour cela, partons de la définition et explicitons le travail de la force dans le cas où le chemin est rectiligne :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_{x_A}^{x_B} \vec{F}(x) \cdot \vec{i} dx = E_p(x_A) - E_p(x_B).$$

Si on note  $f(x)$  la composante de la force en chaque point d'abscisse  $x$  du chemin rectiligne :

$$f(x) = \vec{F}(x) \cdot \vec{i},$$

alors :

$$\int_{x_A}^{x_B} \vec{F}(x) \cdot \vec{i} dx = \int_{x_A}^{x_B} f(x) dx = E_p(x_A) - E_p(x_B).$$

Cette dernière égalité étant vraie pour tout couple de point  $A$  et  $B$ , on en déduit que  $E_p(x)$  est une primitive de  $-f(x)$ . Ce qui peut s'écrire :

$$\frac{dE_p}{dx} = -f(x) = -\vec{F}(x) \cdot \vec{i}.$$

On dit que *la force dérive de l'énergie potentielle*. En fait ici, il ne s'agit que de la composante de la force sur l'axe  $Ox$ . On peut aussi écrire :

$$E_p(x) = - \int_0^x \vec{F}(s) \cdot \vec{i} ds + C$$

**Energie potentielle associée à  $\vec{F}$  :** L'énergie potentielle associée à une force  $\vec{F}$  conservative, est une fonction  $E_p(M)$  de la position  $M$ , telle que :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = E_p(A) - E_p(B); \forall A, B \in \mathbb{R}^3.$$

Si le chemin est rectiligne, alors :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = E_p(x_A) - E_p(x_B),$$

où  $x_A$  et  $x_B$  sont les abscisses respectives de  $A$  et  $B$ .

**La force dérive de l'énergie potentielle :** L'énergie potentielle est une primitive de la composante de la force sur le chemin rectiligne :

$$\frac{dE_p}{dx} = -\vec{F}(x) \cdot \vec{i}.$$

ou encore :

$$E_p(x) = - \int_0^x \vec{F}(s) \cdot \vec{i} ds + C$$

*Origine de l'énergie potentielle* L'énergie potentielle n'est pas unique, elle est définie à une constante près. En effet, Si  $E_p(x)$  est l'énergie potentielle associée à la force  $\vec{F}$  alors  $U_p(x) = E_p(x) + C$ , où  $C$  est une constante, est aussi une énergie potentielle associée à  $\vec{F}$ , puisque  $\frac{dE_p}{dx} = \frac{dU_p}{dx} = -\vec{F}(x) \cdot \vec{i}$ . Choisir une énergie potentielle (choisir  $C$ ) c'est choisir l'*origine de l'énergie potentielle*, c'est à dire le point  $x$  pour lequel  $E_p(x) = 0$ . Le choix de l'origine de l'énergie potentielle est arbitraire et n'a aucune incidence sur la physique du système, puisque la force (sa composante en fait) s'obtient en dérivant l'énergie potentielle.

#### 4.5 Energie potentielle et énergie mécanique d'un système

##### 4.5.1 Définitions

*Energie potentielle d'un système* : L'énergie potentielle  $E_p$  d'un système est la somme des énergies potentielles, associées aux forces conservatives qui s'exercent sur le système.

On aura donc :

$$E_p(A) - E_p(B) = \sum_{\vec{F} \text{ conservatives}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}),$$

et aussi :

$$-\frac{dE_p}{dx} = \sum_{\vec{F} \text{ conservatives}} \vec{F}(x) \cdot \vec{i}.$$

*Energie mécanique d'un système* : L'énergie mécanique  $E_m$  du système est la somme de son énergie cinétique  $E_c$  et de son l'énergie potentielle  $E_p$ . Pour un point matériel de masse  $m$  et de vitesse  $\vec{v}$ , on aura donc :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 + E_p.$$

##### 4.5.2 Théorème de l'énergie mécanique

Le théorème de l'énergie mécanique est une conséquence directe du théorème de l'énergie cinétique.

*Enoncé du théorème* : La variation de l'énergie mécanique d'un système est égale à la somme des travaux des forces *non conservatives* qui s'appliquent sur le système, le long de sa trajectoire.

Comme pour le théorème de l'énergie cinétique on considère un point matériel de masse  $m$ , passant par le point  $A$  au temps  $t_A$  et par le point  $B$  au temps  $t_B$  ( $t_B > t_A$ ) :

$$E_m(B) - E_m(A) = \sum_{\vec{F} \text{ non-conservatives}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}).$$

##### **Origine de l'énergie potentielle :**

L'énergie potentielle n'est pas unique, elle est définie à une constante près. Si  $E_p(x)$  est une énergie potentielle, alors  $E_p(x) + C$ , où  $C$  est une constante est aussi une énergie potentielle. Choisir une énergie potentielle c'est aussi choisir l'origine de l'énergie potentielle.

##### **Energie potentielle d'un système :**

L'énergie potentielle  $E_p$  d'un système est la somme des énergies potentielles, associées aux forces conservatives qui s'exercent sur le système.

**Energie mécanique :** l'énergie mécanique  $E_m$  d'un système est la somme de son énergie cinétique  $E_c$  et de son l'énergie potentielle  $E_p$ .

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 + E_p.$$



où le travail est calculé le long de la trajectoire empruntée par le mobile et où on a bien spécifié que la somme ne concernait que les forces non-conservatives.

*Démonstration :* On exprime le théorème de l'énergie cinétique, en séparant les forces conservatives des forces non conservatives :

$$E_c(B) - E_c(A) = \sum_{\vec{F} \text{ conservatives}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) + \sum_{\vec{F} \text{ non-conservatives}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}).$$

Or, par définition de l'énergie potentielle  $E_p$  du système,

$$E_p(A) - E_p(B) = \sum_{\vec{F} \text{ conservatives}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}),$$

Donc :

$$E_c(B) - E_c(A) = E_p(A) - E_p(B) + \sum_{\vec{F} \text{ non-conservatives}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}).$$

Ce qui peut s'écrire :

$$[E_c(B) + E_p(B)] - [E_c(A) + E_p(A)] = \sum_{\vec{F} \text{ non-conservatives}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}).$$

#### 4.5.3 Version locale du théorème de l'énergie mécanique

Comme pour le théorème de l'énergie cinétique, on a une version locale du théorème de l'énergie mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = \sum_{\vec{F} \text{ non-conservatives}} \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

La dérivée de l'énergie mécanique par rapport au temps est égale à la somme des puissances des forces non-conservatives qui s'appliquent au système.

#### 4.5.4 Conservation de l'énergie mécanique

Dans le cas particulier d'un système qui n'est soumis qu'à des forces conservatives, l'énergie mécanique du système est une constante, elle ne dépend pas du temps. On dit dans ce cas que *l'énergie mécanique est conservée* où que l'énergie mécanique est une constante du mouvement.

En effet, si le système n'est pas soumis à des forces non conservatives, alors le théorème de l'énergie mécanique devient :

$$E_m(B) - E_m(A) = 0 \Leftrightarrow E_m(A) = E_m(B).$$

Cette égalité étant vraie pour tout couple de points  $A$  et  $B$  de la trajectoire du mobile, l'énergie mécanique est une constante.

**Théorème de l'énergie mécanique :** La variation de l'énergie mécanique d'un système est égale à la somme des travaux des forces non conservatives qui s'appliquent sur le système, le long de sa trajectoire.

$$E_m(B) - E_m(A) = \sum_{\vec{F} \text{ non-conservatives}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}).$$

où le travail est calculé le long de la trajectoire empruntée par le mobile et  $A$  et  $B$  sont deux points de cette trajectoire.

**Théorème de l'énergie mécanique local :**

$$\frac{dE_m}{dt} = \sum_{\vec{F} \text{ non-conservatives}} \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

**Conservation de l'énergie mécanique :** Dans le cas particulier d'un système qui n'est soumis qu'à des forces conservatives, l'énergie mécanique du système est une constante, elle ne dépend pas du temps.

4.5.5 *Exemple*

*Oscillateur harmonique amorti* : Déterminons l'énergie mécanique de l'oscillateur harmonique amorti que nous avons considéré tout au début de ce chapitre. La bille de masse  $m$  accrochée au ressort est soumise à son poids  $\vec{P}$  et à la réaction du support  $\vec{R}$  qui compense complètement le poids :  $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$ , puisque le mouvement est horizontal. Il reste donc la force de rappel du ressort  $\vec{F} = -kx\vec{i}$  qui est conservative et la force de frottement  $\vec{f} = -\lambda\vec{v} = -\lambda\dot{x}\vec{i}$  qui elle n'est pas conservative.

L'énergie potentielle de la bille est donc l'énergie potentielle associée à  $\vec{F}$  puisque c'est la seule force conservative (qui travaille) qui s'applique au système. Comme  $\vec{F} \cdot \vec{i} = -kx$ , l'énergie potentielle est déterminée par :

$$\frac{dE_p}{dx} = -\vec{F} \cdot \vec{i} = kx.$$

Donc,

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 + C,$$

où  $C$  est une constante arbitraire.

Si on choisit l'origine de l'énergie mécanique à la position d'équilibre de la bille qui correspond à  $x = 0$ , il faudra prendre  $C = 0$ . Avec ce choix de l'origine, l'énergie mécanique de la bille est donc :

$$E_m = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

Si on néglige les frottements,  $E_m$  est une constante, l'énergie mécanique se conserve. Si on considère la force de frottement visqueux, alors le théorème de l'énergie mécanique, dans sa version locale, donne :

$$\frac{dE_m}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v} = -\lambda\vec{v} \cdot \vec{v} = -\lambda\|\vec{v}\|^2 = -\lambda\dot{x}^2.$$

Comme on l'avait déjà fait remarquer, l'énergie mécanique de la bille n'est pas une constante, elle diminue. Le travail de la force de frottement retire de l'énergie à la bille. La variation par unité de temps de l'énergie mécanique est donnée par la puissance  $\mathcal{P} = -\lambda\|\vec{v}\|^2$  de la force de frottement. Comme cette dernière est négative, il s'agit bien d'une diminution.

En dérivant par rapport au temps l'expression de  $E_m$  :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right] = -\lambda\dot{x}^2,$$

on obtient :

$$m\ddot{x} + kx = -\lambda\dot{x}^2 \Leftrightarrow m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0.$$

La version locale du théorème de l'énergie mécanique est équivalente à l'équation différentielle du mouvement que l'on aurait obtenue en appliquant le PFD.

**Energie potentielle élastique** : l'énergie potentielle  $E_p(\ell)$  associée à la force de rappel élastique

$$\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{i}$$

d'un ressort de longueur  $\ell$ , de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$  est donnée par :

$$E_p(\ell) = -\frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + C,$$

où  $C$  est une constante arbitraire.

*Satellite autour de la Terre :* Déterminons l'énergie mécanique d'un satellite en orbite autour de la Terre. Le satellite de masse  $m$  en un point  $S$  de sa trajectoire n'est soumis qu'à la force de gravitation :

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{\|\vec{OS}\|^3}\vec{OS} = -\frac{GmM}{x^2}\vec{i},$$

où  $G$  est la constante universelle de la gravitation,  $M$  est la masse de la Terre et  $x$  est la distance entre le centre de la Terre  $O$  et le satellite  $S$ .  $\vec{i} = \frac{\vec{OS}}{\|\vec{OS}\|}$  est un vecteur unitaire dans la direction et le sens de  $\vec{OS}$ .

L'énergie potentielle  $E_p$  du satellite est l'énergie potentielle associée à la force  $\vec{F}$ , elle est déterminée par :

$$\frac{dE_p}{dx} = -\vec{F} \cdot \vec{i} = \frac{GmM}{x^2}.$$

Donc :

$$E_p(x) = -\frac{GmM}{x} + C,$$

où  $C$  est une constante. Par convention, on prend l'origine de l'énergie potentielle gravitationnelle quand  $x \rightarrow \infty$ . C'est à dire que  $\lim_{x \rightarrow \infty} E_p(x) = 0$ . Pour cela on choisit  $C = 0$ .

Avec ce choix pour l'origine de l'énergie potentielle, l'énergie mécanique du satellite est :

$$E_m = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 - \frac{GmM}{\|\vec{OS}\|}.$$

Si on néglige les frottements du satellite sur l'atmosphère résiduelle, la force de gravitation est la seule force qui s'applique sur le satellite. Cette force étant conservative,  $E_m$  est conservée au cours du mouvement du satellite.

*Vitesse de libération :* La vitesse de libération est la vitesse minimale que doit avoir un projectile à la surface d'une planète pour qu'il ne retombe jamais sur la planète. On dit que le projectile est libéré de l'attraction gravitationnelle de la planète. On ne tient pas compte du frottement sur l'atmosphère, si atmosphère il y a.

Supposons donc que je suis sur la Terre et que je lance un projectile avec une vitesse initiale verticale vers le haut  $\vec{v}_0 = v_0\vec{k}$  ( $\vec{k}$  étant un vecteur unitaire vertical et orienté vers le haut). A cause de l'attraction gravitationnelle de la Terre la vitesse du projectile va diminuer. Si la norme de la vitesse initiale  $v_0$  n'est pas assez grande, au bout d'un certain temps la vitesse du projectile va s'annuler et il va retomber sur la Terre. Si la norme de la vitesse initiale est suffisamment grande, la vitesse du projectile diminuera mais ne s'annulera jamais. Le projectile s'éloignera infiniment de la Terre.

**Energie potentielle de gravitation :** L'énergie potentielle associée à la force de gravitation

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2}\vec{i},$$

qui s'applique sur une masse  $m$  située en  $S$  à une distance  $r$  d'une masse  $M$  située en  $O$ ,  $\vec{OS} = r\vec{i}$  est donnée par :

$$E_p = -\frac{GmM}{r}.$$

L'origine de l'énergie potentielle à été prise en l'infini ( $r \rightarrow \infty$ ).

Nous allons donc déterminer l'expression de la vitesse  $\vec{v} = v\vec{k}$  du projectile en un point quelconque de sa trajectoire et examiner quelle est la condition sur la vitesse initiale  $v_0$  pour que la vitesse  $v$  ne s'annule jamais. Pour cela nous allons utiliser la conservation de l'énergie mécanique. En effet, le projectile n'est soumis qu'à la force de gravitation qui est une force conservative et dont l'énergie potentielle associée est

$$E_P = -\frac{mMG}{r},$$

où  $m$  est la masse du projectile,  $M$  la masse de la planète,  $r$  la distance du projectile au centre de la planète et  $G$  est la constante universelle de la gravitation. On a choisi l'origine de l'énergie potentielle à l'infini (c'est à dire  $E_P(r \rightarrow \infty) = 0$ ).

A l'instant initial, la norme de la vitesse du projectile est  $v_0$ , donc son énergie cinétique est  $\frac{1}{2}mv_0^2$ . Le projectile est lancé de la surface de la planète dont on notera  $R$  le rayon. L'énergie potentielle du projectile est donc  $-\frac{mMG}{R}$ . L'énergie mécanique initiale  $E_i$  du projectile est donc :

$$E_i = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{mMG}{R}.$$

A un instant quelconque après son lancement, on notera  $v$  la norme de la vitesse du projectile et  $r \geq R$  sa distance au centre de la planète. Son énergie mécanique pourra donc s'écrire :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mMG}{r}.$$

La conservation de l'énergie mécanique du projectile :

$$E_i = E_m \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{mMG}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mMG}{r},$$

permet d'obtenir l'expression de la norme de la vitesse  $v$  en chaque point de la trajectoire :

$$v^2 = v_0^2 - 2MG \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right). \quad (4.7)$$

On souhaite que le projectile ne retombe jamais et s'éloigne infiniment de la planète, c'est à dire que lorsque  $r \rightarrow \infty$  alors  $v > 0$ . Or en utilisant l'Eq. (4.7), on obtient :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v^2 = v_0^2 - \frac{2MG}{R},$$

puisque  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} = 0$ . Pour que  $v^2$  reste positif, il faut donc que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v^2 > 0 \Leftrightarrow v_0^2 - \frac{2MG}{R} > 0 \Leftrightarrow v_0 > \sqrt{\frac{2MG}{R}} \equiv v_\ell.$$

**vitesse de libération :** La vitesse de libération  $v_\ell$  est la vitesse minimale que doit avoir un projectile à la surface d'une planète pour qu'il ne retombe jamais sur la planète. On dit que le projectile est libéré de l'attraction gravitationnelle de la planète. On montre que :

$$v_\ell = \sqrt{\frac{2MG}{R}} = \sqrt{2gR},$$

où  $M$  est la masse et  $R$  le rayon de la planète et  $G$  est la constante universelle de la gravitation.  $g$  est l'accélération de la pesanteur à la surface de la planète  $g = \frac{GM}{R^2}$ .

En conclusion, pour que le projectile ne retombe jamais sur la planète de masse  $M$  et de rayon  $R$ , il faut que la norme de sa vitesse initiale  $v_0$  soit supérieure à la vitesse de libération  $v_\ell$  dont l'expression est :

$$v_\ell = \sqrt{\frac{2MG}{R}} = \sqrt{2gR},$$

où  $g$  est l'accélération de la pesanteur à la surface de la planète  $g = \frac{GM}{R^2}$ .

#### 4.6 Energie, équilibre et stabilité

Dans cette section on ne s'intéresse qu'aux systèmes conservatifs, c'est à dire aux systèmes qui ne sont soumis qu'à des forces conservatives. Dans ce cas, la donnée de l'énergie potentielle  $E_p(M)$  en fonction de la position  $M$  du système permet de déterminer les positions où le système est à l'équilibre et d'étudier la stabilité des positions d'équilibre.

##### 4.6.1 Définitions

*Position d'équilibre* On dira qu'un point matériel est à l'équilibre si la somme des forces appliquées est nulle. La position  $M_e$  du point correspondante est appelée position d'équilibre.

*Equilibre stable* On dira que la position d'équilibre  $M_e$  est une position d'équilibre stable, si lorsqu'on écarte le système de  $M_e$ , les forces tendent à le rapprocher de  $M_e$ .

*Equilibre instable* On dira que la position d'équilibre  $M_e$  est instable, si lorsqu'on écarte le système de sa position d'équilibre, les forces tendent à l'éloigner de  $M_e$ .

##### 4.6.2 Extrema de l'énergie potentielle

Nous allons montrer qu'une position d'équilibre  $M_e$  est un extremum de l'énergie potentielle. La position d'équilibre est stable si  $M_e$  est un minimum local et l'équilibre est instable si  $M_e$  est un maximum local de l'énergie potentielle.

Cette propriété de l'énergie potentielle est générale, nous la démontrons ici uniquement dans le cas où  $E_p(x)$  est une fonction d'une variable  $x$ , représentant l'abscisse de  $M$  sur un axe.

*Démonstration* La résultante  $\vec{F}$  des forces qui s'appliquent sur le système dérive d'une énergie potentielle, puisqu'elle est conservative. On a donc :

$$\frac{dE_p}{dx} = -f(x) = -\vec{F}(x) \cdot \vec{i}.$$

**Une position d'équilibre** d'un point matériel est un point  $M_e$  tel que

$$\sum_{\vec{F}} \vec{F}(M_e) = \vec{0}.$$

**Equilibre stable :**  $M_e$  est une position d'équilibre stable si dans un voisinage de  $M_e$  la résultante des forces tend à rapprocher le système de  $M_e$ . Une position d'équilibre  $M_e$  est stable si et seulement si  $M_e$  est un minimum de l'énergie potentielle.

Considérons une position d'équilibre  $x = x_e$ . Par définition  $\vec{F}(x_e) = \vec{0}$  et donc

$$\left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x=x_e} = 0; \quad x_e \text{ une position d'équilibre.}$$

C'est la définition d'un extremum. La tangente à la courbe d'équation  $y = E_p(x)$  au point  $x_e$  est horizontale. En  $x_e$ , la fonction  $E_p(x)$  possède soit un minimum, soit un maximum soit un point d'inflexion.

Supposons que le système est à l'équilibre, en  $x_e$ . Écartons le d'une petite quantité  $\Delta x$  de sa position d'équilibre. Si l'équilibre est stable, la résultante des forces au point  $x_e + \Delta x$  tend à rapprocher le système de  $x = x_e$ , c'est à dire que la composante de la force sur le déplacement  $\Delta x \vec{i}$  est opposée au déplacement.

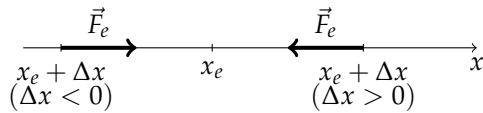


FIGURE 4.4:  $x_e$  est un équilibre stable si lorsqu'on éloigne le système de  $x_e$  la résultante des forces  $\vec{F}_e$  tend à le rapprocher à nouveau vers  $x_e$ . Ceux qui peut se résumer par  $\vec{F}_e \cdot \vec{i}\Delta x < 0$ .

Cela peut s'écrire de la façon suivante (voir Fig. 4.4) :

$$\vec{F}(x_e + \Delta x) \cdot \vec{i}\Delta x < 0; \quad x_e \text{ équilibre stable.}$$

Soit :

$$-\Delta x \left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_e + \Delta x} < 0 \Leftrightarrow \Delta x \left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_e + \Delta x} > 0,$$

où on a précisé le point  $x_e + \Delta x$  ou la dérivée de  $E_p$  devait être calculée. On en déduit que si  $\Delta x$  est positif la dérivée  $\left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_e + \Delta x}$  est positive, donc la fonction  $E_p(x)$  augmente, alors que si  $\Delta x$  est négatif, la dérivée  $\left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_e + \Delta x}$  est négative et donc la fonction  $E_p(x)$  diminue.  $x_e$  est donc bien un minimum.

Une autre façon de le montrer est d'écrire que :

$$\left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_e + \Delta x} \simeq \left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_e} + \left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x_e} \Delta x = \left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x_e} \Delta x,$$

où on a utilisé le fait qu'en  $x = x_e$ ,  $\left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_e} = 0$ . On obtient donc :

$$\left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_e + \Delta x} \Delta x > 0 \Leftrightarrow \left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x_e} (\Delta x)^2 \Leftrightarrow \left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x_e} > 0$$

Ce qui est la définition d'un minimum.

*Exemple* Considérons l'oscillateur harmonique :

$$E_p(x) = \frac{1}{2}k(x - x_e)^2 + C$$

Le minimum de l'énergie potentielle est  $x = x_e$ , il correspond bien à la position d'équilibre stable du l'oscillateur.

### 4.6.3 Dynamique dans le voisinage d'une position d'équilibre stable

On considère toujours que le système est conservatif, c'est à dire que les forces appliquées (qui travaillent) sont conservatives. En vertu du théorème de l'énergie mécanique, cette dernière est conservée, c'est à dire qu'elle est constante au cours du temps. Supposons de plus que la dynamique du système a lieu proche d'un point d'équilibre stable  $x_e$ . C'est à dire que l'on suppose que  $x(t)$  reste assez proche de  $x_e$  de telle sorte qu'on puisse approcher l'énergie potentielle  $E_p(x)$  par son développement limité au voisinage de  $x_e$ . On pourra écrire donc :

$$E_p(x) \simeq E_p(x_e) + \left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x=x_e} (x - x_e) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x=x_e} (x - x_e)^2.$$

Le deuxième terme  $\left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x=x_e}$  est nul puisque  $x_e$  est une position d'équilibre. Donc :

$$E_p(x) \simeq \frac{1}{2}k(x - x_e)^2 + E_p(x_e)$$

où on a défini

$$k = \left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x=x_e}.$$

On reconnaît que l'énergie potentielle  $E_p(x)$  a exactement la même forme que celle de l'oscillateur harmonique. Le paramètre  $k$  ne représente plus la raideur du ressort mais est la dérivée seconde de l'énergie potentielle calculée au point  $x_e$ . On en déduit que la dynamique dans le voisinage d'une position d'équilibre stable est approximativement la même que celle d'un oscillateur harmonique. C'est à dire que la loi horaire est sinusoïdale :

$$x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t),$$

où la pulsation  $\omega$  est :

$$\omega = \left[ \frac{1}{m} \left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x=x_e} \right]^{1/2}.$$

Dans le voisinage d'une position d'équilibre la dynamique d'un système conservatif est approximativement la même que celle d'un oscillateur harmonique. C'est à dire que la loi horaire est sinusoïdale :

$$x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t),$$

où la pulsation est  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , soit

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x=x_e}}$$

et  $E_p$  est l'énergie potentielle du système.





# 5

## Oscillations

### 5.1 Introduction

Nous allons revenir sur un problème que nous avons déjà abordé brièvement, celui de l'oscillateur harmonique. Cette question est d'une *importance fondamentale* en physique, notamment car ce problème apparaît de manière transversale dans des contextes extrêmement variés. La raison de l'importance de ce problème repose sur l'observation que lorsqu'un système physique se trouve proche d'un *état d'équilibre stable*, donc proche d'un minimum local de l'énergie potentielle  $E_p$ , cette dernière présente un comportement régulier en fonction des variables qui mesurent l'écart à l'équilibre :

$$E_p \propto (\text{écart à l'équilibre})^2 \quad (5.1)$$

où le symbole «  $\propto$  » signifie « proportionnel à ». Autrement dit, la force est proportionnelle à l'écart à l'équilibre (force linéaire). Donnons quelques exemples :

- **Une masse accrochée à un ressort** (dans la limite des petites élongations). On a vu qu'en utilisant la loi de Hooke pour décrire la force de rappel on aboutit à une équation différentielle

$$m\ddot{x} + kx = 0. \quad (5.2)$$

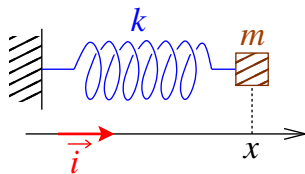


FIGURE 5.1: Masse fixée à un ressort.  $\vec{i}$  est le vecteur unitaire portant la direction du mouvement.

Rappelons que l'énergie potentielle (élastique) est

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2. \quad (5.3)$$

- **Un pendule.** Considérons une bille de masse  $m$ , considérée comme ponctuelle et accrochée au bout d'une tige de longueur  $l$ , l'autre extrémité étant fixée sur un axe horizontal de telle sorte que la tige puisse pivoter dans un plan vertical. On repère la position de la bille, par l'angle  $\theta$  que fait la tige avec la verticale (voir figure 5.2). On montre que la seule force qui travaille est le poids de la bille, et donc l'énergie potentielle de la bille est l'énergie potentielle gravitationnelle. Pour des positions proches de la position d'équilibre c'est à dire dans la limite où l'angle  $\theta$  est faible :

$$E_p = mgz = mgl(1 - \cos \theta) \simeq \frac{1}{2}mgl\theta^2. \quad (5.4)$$

où on a utilisé le développement limité de la fonction  $\cos$  au second ordre.

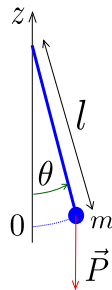


FIGURE 5.2: Masse fixée à une tige oscillant autour de la verticale.

- **Une molécule diatomique** (la vibration d'une molécule doit en principe être traitée dans le cadre de la mécanique quantique). Deux atomes sont liés par une liaison chimique (la mise en commun d'une fraction de leurs cortèges électroniques). La configuration stable de la molécule correspond à un minimum de l'énergie électrostatique. Lorsque la molécule reçoit de l'énergie, elle est susceptible de vibrer autour de sa position d'équilibre, ce qui est très bien décrit comme un oscillateur harmonique (si l'énergie reste faible devant l'énergie de liaison).
- **Un oscillateur électrique.** Si l'on considère une bobine d'inductance  $L$  et un condensateur de capacité  $C$  formant une boucle, les lois élémentaires de l'électrocinétique montrent que la dynamique du circuit est décrite par l'équation différentielle

$$L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0 \quad (5.5)$$

où  $q$  est la charge portée par le condensateur.

L'énergie cinétique est stockée dans la bobine

$$E_c = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}L\dot{q}^2 \quad (5.6)$$

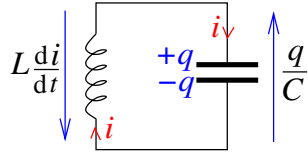


FIGURE 5.3: Oscillateur électrique.

où  $i$  est le courant dans le circuit. Alors que le condensateur stocke l'énergie potentielle (électrostatique)

$$E_p = \frac{1}{2C}q^2. \quad (5.7)$$

— Un mode du champ électromagnétique dans une cavité. La densité d'énergie électromagnétique est donnée par  $\mathcal{E}_{\text{em}} = \frac{1}{2}(\vec{\mathcal{E}}^2 + \vec{\mathcal{B}}^2)$ , où les champs électrique et magnétique sont liés par les équations de Maxwell. On peut montrer que chaque mode se comporte comme un oscillateur harmonique.

— etc.

Cette petite liste (non exhaustive) vise à souligner la remarque faite en entrée de chapitre : l'étude de l'oscillateur harmonique, i.e. de l'équation différentielle  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ , a des applications dans des domaines extrêmement variés.

Nous pouvons déjà énoncer deux propriétés très importantes de l'oscillateur harmonique :

1. La période des oscillations est la même pour toutes les trajectoires : elle est indépendante de l'énergie.
2. Il est possible de superposer des solutions (on parle aussi « d'oscillateur linéaire »).<sup>1</sup>

1. Si  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  sont deux solutions, alors  $\lambda x_1(t) + \mu x_2(t)$  est solution.

## 5.2 Oscillateur harmonique libre

### 5.2.1 Force de rappel élastique

Afin d'être concret, considérons un oscillateur mécanique constitué d'un point matériel de masse  $m$  attaché à l'extrémité d'un ressort, se mouvant le long d'un axe sans frottement (figure 5.1). Dans la limite des faibles élongations, la force de rappel est bien modélisée par la loi de Hooke que nous avons déjà introduite dans le chapitre 3.2.2 : cette loi *phénoménologique* postule que la force (la « réponse » du ressort) est *linéaire* en fonction de l'élongation (i.e. en fonction de la « perturbation »). On écrit alors

$$\vec{F}_r = -k(x - x_0)\vec{i} \quad (5.8)$$

où  $k$  est la raideur du ressort et  $x$  est une coordonnée repérant le déplacement selon  $\vec{i}$  par rapport à la position d'équilibre. Le point important

#### Force de rappel élastique :

La composante de la force de rappel est toujours **opposée** au déplacement :

$$F_x = -k(x - x_0)$$

est le signe négatif entre le déplacement et la force, et ce, *quelle que soit l'orientation de l'axe*. On illustre ce point sur la figure 5.4.

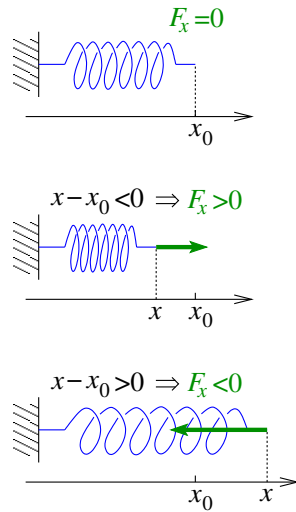


FIGURE 5.4: Force de rappel  $\vec{F}_r = F_x \vec{i}$ . La force a toujours un sens *opposé* à celui du déplacement.

### 5.2.2 Équation du mouvement

Dans la suite du chapitre nous simplifions l'expression de la force de rappel en *choisissant* l'origine des coordonnées afin que la position d'équilibre corresponde à l'abscisse  $x_0 = 0$ . La force de rappel prend la forme simplifiée  $\vec{F}_r = -k x \vec{i}$ . Après projection sur  $\vec{i}$ , le P.F.D conduit à l'équation différentielle algébrique :

$$m \ddot{x} = -k x. \quad (5.9)$$

À ce stade il est intéressant de regrouper les deux paramètres  $k$  et  $m$  dans une nouvelle notation. Remarquant que  $[k/m] = ([\text{Force}]/L)/M = MLT^{-2}/(ML) = T^{-2}$ , nous introduisons

$$\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.10)$$

qui a donc la dimension d'une *fréquence* (l'inverse d'un temps). Elle est appelée **pulsation propre** de l'oscillateur. L'équation du mouvement prend donc la forme

$$\boxed{\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0} \quad (5.11)$$

Remarquons que cette équation décrit aussi bien les autres problèmes physiques mentionnés dans l'introduction, à condition de donner une interprétation différente à la « coordonnée »  $x$  et à  $\omega_0$  (par exemple  $x \rightarrow \theta$  et  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$  pour le pendule).

**Equation différentielle du mouvement de l'oscillateur harmonique :**

$$\boxed{\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0}$$

### 5.2.3 Résolution

Nous proposons deux formulations permettant la résolution de l'équation différentielle (5.11).

*Rappel : expression introduite au chapitre 3, § 3.5.2.* – L'annexe C donne la méthode générale pour obtenir l'ensemble de toutes les solutions de ce type d'équation différentielle ce qu'on appelle "la solution générale". L'Equation (5.11) possède deux solutions indépendantes : le couple d'exponentielles complexes  $\{e^{+i\omega_0 t}, e^{-i\omega_0 t}\}$ . On peut donc écrire la solution générale de la manière suivante :

$$x(t) = Ce^{i\omega_0 t} + De^{-i\omega_0 t}, \quad (5.12)$$

où  $C$  et  $D$  sont à priori deux constantes complexes quelconques. Comme la solution physique cherchée  $x(t)$  représente un déplacement,  $x(t)$  est réel et non pas complexe, Il est donc plus commode d'utiliser l'expression  $e^{\pm i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) \pm i \sin(\omega_0 t)$  et de mettre la solution générale sous la forme suivante :

$$x(t) = (C + D) \cos(\omega_0 t) + i(C - D) \sin \omega_0 t$$

où on impose que  $C + D = a \in \mathbb{R}$  et  $i(C - D) = b \in \mathbb{R}$ . On obtient ainsi la solution physique la plus générale de l'équation différentielle comme la combinaison linéaire d'un sinus et d'un cosinus :

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t), \quad (5.13)$$

où les deux « constantes d'intégration »  $a$  et  $b$  sont fixées par des conditions initiales particulières. Par exemple la donnée de la position et de la vitesse au temps  $t = 0$  :  $x(0) = x_0$  et  $\dot{x}(0) = v_0$ . Pour un tel choix de conditions initiales, la base de solutions  $\{\cos, \sin\}$  se révèle particulièrement approprié puisque les deux constantes  $a$  et  $b$  sont très simplement reliées aux paramètres  $x_0$  et  $v_0$ . Finalement :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t). \quad (5.14)$$

*Période, amplitude, phase.* – L'examen de la solution montre que celle-ci est une fonction périodique, la période des oscillations étant définie comme le plus petit intervalle de temps  $T$  tel que  $x(t + T) = x(t)$ . Cela correspond à  $\omega_0 T = 2\pi$  :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (5.15)$$

Si l'expression (5.14) fait bien apparaître les paramètres  $x_0$  et  $v_0$ , elle ne fait pas ressortir encore très explicitement les propriétés intéressantes du mouvement. En utilisant qu'une combinaison linéaire d'un cos et d'un

**Solution générale harmonique :**

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t)$$

**Pulsation, période et fréquence :**  
la période des oscillations est reliée à la pulsation par

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

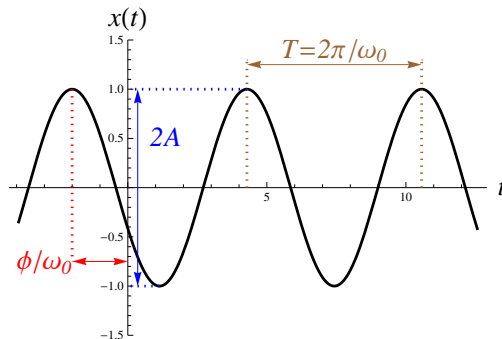
i.e. la fréquence est  $f = \frac{\omega_0}{2\pi}$ .

$\sin$  est encore une fonction sinusoïdale, nous voyons que nous pouvons re-écrire la solution sous la forme

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (5.16)$$

En développant le cosinus, nous identifions les deux nouveaux paramètres  $A$  et  $\phi$  en fonction de  $x_0$  et  $v_0$  :

$$\begin{cases} A \cos \phi = x_0 \\ A \sin \phi = -\frac{v_0}{\omega_0} \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2} \\ \tan \phi = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0} \end{cases} . \quad (5.17)$$



L'intérêt de la re-écriture (5.16) est de mettre en jeu des paramètres dont le sens est explicite :

- $A$  représente l'*amplitude des oscillations* (i.e.  $x(t)$  oscille entre  $-A$  et  $+A$ ).
- $\omega_0 t + \phi$  est appelée la *phase*.
- $\phi$  est le *déphasage*, ou la *phase à l'origine* (des temps).

*Méthode 2 : complexifier la solution.*— Nous allons montrer qu'il est plus simple de résoudre l'équation différentielle (5.11) en complexifiant (au sens figuré comme au sens propre) la solution. Si l'avantage de cette approche est ici léger, on verra tout le gain de la méthode dans les sections sur l'oscillateur amorti. On pourra aussi consulter l'annexe D où l'on fait un rappel sur les nombres complexes et leur utilisation pour représenter des signaux sinusoïdaux.

Notre but est toujours d'obtenir l'ensemble des solutions réelles  $x(t) \in \mathbb{R}$  de l'équation différentielle (5.11), mais nous allons écrire la solution générale de la façon suivante :

$$x(t) = \text{Re} [\tilde{x}(t)] \quad (5.18)$$

où  $\tilde{x}(t)$  est une solution complexe de l'Eq. (5.11).

Montrons que cette écriture Eq. (5.18) est toujours possible. Comme les coefficients de l'équation différentielle sont réels, si  $\tilde{x}(t)$  est une solution alors son complexe conjuguée  $\overline{\tilde{x}(t)}$  est aussi une solution. Donc en

#### Rappel de quelques relations de trigonométrie :

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

FIGURE 5.5: Mouvement de l'oscillateur harmonique

#### Une autre forme pour la solution générale harmonique :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

où  $A$  est l'amplitude,  
 $\omega_0 t + \phi$  est la phase,  
 $\omega_0$  est la pulsation,  
 $\phi$  est le déphasage.

vertu de la linéarité  $\frac{1}{2} [\tilde{x}(t) + \overline{\tilde{x}(t)}] = \text{Re} [\tilde{x}(t)]$  est aussi une solution de l'équation différentielle Eq. (5.11). L'écriture donnée par l'Eq. (5.18) permet ainsi d'obtenir l'ensemble de toutes les solutions réelles.

Notre stratégie consiste donc à chercher toutes les solutions de l'équation différentielle sous la forme complexe, sachant qu'à la fin, la solution physique s'obtiendra en en prenant la partie réelle.

De plus, nous pouvons écrire la solution complexe sous la forme

$$\tilde{x}(t) = \tilde{A} e^{+i\omega_0 t} \quad (5.19)$$

où  $\tilde{A}$  est un paramètre complexe. Puisque celui-ci est paramétré par deux paramètres réels, son module  $A = |\tilde{A}|$  et sa phase  $\phi$

$$\tilde{A} = A e^{i\phi}, \quad (5.20)$$

nous voyons que l'écriture de la solution *complexe* (5.19) permet de balayer toutes les solutions *réelles* possibles (dépendant de deux constantes d'intégration). Cette observation est explicite puisque l'on retrouve la **forme générale** (5.16)

$$\text{Re} [\tilde{x}(t)] = \text{Re} [\tilde{A} e^{+i\omega_0 t}] = A \cos(\omega_0 t + \phi). \quad (5.21)$$

Une autre façon de montrer que l'écriture donnée par l'Eq. (5.19) permet de balayer toutes les solutions physique est de partir de la solution générale donnée par l'Eq. (5.12) et d'imposer que la solution est réelle. Cette contrainte impose que  $D = \overline{C}$  et que donc l'ensemble des solution réelles peut s'écrire comme :

$$x(t) = C e^{i\omega_0 t} + \overline{C} e^{-i\omega_0 t}$$

soit :

$$x(t) = C e^{i\omega_0 t} + \overline{C e^{i\omega_0 t}} = \text{Re} [2C e^{i\omega_0 t}].$$

Donc en choisissant  $2C = \tilde{A}$ , on obtient bien la partie réelle de l'Eq. (5.19).

L'intérêt de cette approche est évident, puisque la forme simple (5.19) est clairement plus aisée à manipuler que la combinaison (5.13).

#### 5.2.4 Analyse énergétique

Analysons les aspects énergétiques du problème. En calculant le travail de la force de rappel  $F_x = -kx$ , nous avons vu au chapitre précédent que l'énergie potentielle élastique est

$$E_p(x) = \frac{1}{2} k x^2. \quad (5.22)$$

Reprenons l'analyse de la solution (5.14) ; pour simplifier nous considérons une situation telle que  $v_0 = 0$ . L'amplitude du mouvement est donc simplement  $A = x_0$  (et le déphasage  $\phi = 0$ ). La connaissance de

**Forme complexe de la solution :**

$$x(t) = \text{Re} [\tilde{A} e^{i\omega_0 t}]; \quad \text{avec } \tilde{A} = A e^{i\phi}$$

**Énergie potentielle :**

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

la loi horaire nous permet de suivre l'évolution temporelle des énergies cinétique et potentielle :

$$E_c(\dot{x}(t)) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2 \sin^2(\omega_0 t) \quad (5.23)$$

$$E_p(x(t)) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2 \cos^2(\omega_0 t). \quad (5.24)$$

Nous vérifions bien que l'énergie mécanique

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \quad (5.25)$$

reste constante au cours du temps — nous avons re-introduit l'amplitude  $A = x_0$ , afin que l'équation (5.25) soit parfaitement générale. L'énergie potentielle initiale  $E_p(x(0)) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2$  est donc convertie en énergie cinétique après un quart de période  $E_c(\dot{x}(T/4)) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2$ , puis reconverte en énergie potentielle, etc (figure 5.6).

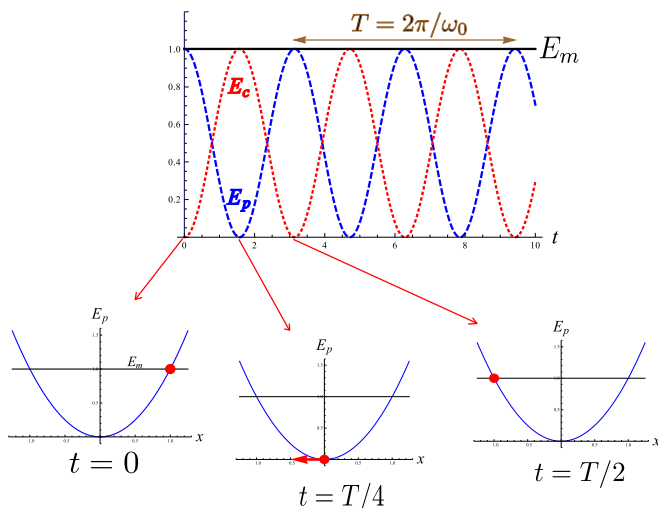


FIGURE 5.6: Oscillation des énergies potentielle et cinétique.

Il est intéressant d'introduire les moyennes temporelles des énergies (5.23) et (5.24) :<sup>2</sup>

$$\langle E_p \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{dt}{T} E_p(x(t)) = \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{dt}{T} E_p(x(t)) = \frac{1}{4}m\omega_0^2 A^2 \quad (5.26)$$

$$\langle E_c \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{dt}{T} E_c(x(t)) = \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{dt}{T} E_c(x(t)) = \frac{1}{4}m\omega_0^2 A^2 \quad (5.27)$$

Finalement nous trouvons une propriété propre à l'oscillateur harmonique

$$\langle E_p \rangle = \langle E_c \rangle = \frac{1}{2}E_m. \quad (5.28)$$

(c'est un cas particulier d'un théorème plus général appelé théorème du viriel).

2. On utilise

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\pi} \cos^2(x) = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\pi} \frac{1 + \cos(2x)}{2} = \frac{1}{2}.$$



### 5.3 Oscillateur forcé – Phénomène de résonance

#### 5.3.1 Position du problème

Étudions maintenant la situation où l'oscillateur est soumis à une force extérieure sinusoïdale, oscillant avec une pulsation  $\omega$ , **différente** de la pulsation propre  $\omega_0$  de l'oscillateur. Le P.F.D conduit alors à :

$$m \ddot{x}(t) = -k x(t) + F_{\text{ext}} \cos(\omega t) \quad \text{avec } \omega \neq \omega_0. \quad (5.29)$$

Si nous invoquons l'analogie entre la masse à l'extrémité du ressort et le pendule oscillant, cette équation décrirait par exemple la situation où une personne sur une balançoire est poussée périodiquement par une seconde personne (dans ce cas, même si l'excitation extérieure est bien périodique, elle n'aurait toutefois pas la forme d'une fonction sinusoïdale).

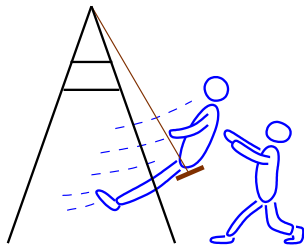


FIGURE 5.7: Balançoire : un exemple d'oscillateur forcé.

Comme nous l'avons expliqué dans la section précédente, il est plus commode de complexifier la recherche de la solution. Pour cela nous étudions l'équation différentielle auxiliaire

$$\frac{d^2}{dt^2} \tilde{x}(t) + \omega_0^2 \tilde{x}(t) = \omega_0^2 A_{\text{ext}} e^{i\omega t} \quad \text{avec } x(t) = \text{Re} [\tilde{x}(t)] \quad (5.30)$$

où nous avons introduit

$$\frac{1}{m} F_{\text{ext}} = \omega_0^2 A_{\text{ext}} \quad \text{i.e.} \quad A_{\text{ext}} = \frac{1}{k} F_{\text{ext}} \quad (5.31)$$

afin de caractériser l'intensité de l'excitation ( $A_{\text{ext}}$  a la dimension d'une longueur).  $A_{\text{ext}}$  représente l'élongation du ressort à l'équilibre lorsqu'il est soumis à une force constante et égale à  $F_{\text{ext}}$ .

Il est clair que si l'on trouve la solution générale complexe  $\tilde{x}(t)$  de l'équation (5.30), alors la partie réelle  $\text{Re} [\tilde{x}(t)]$  nous donne bien l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle Eq. (5.29). Montrons le. Si  $\tilde{x}(t)$  est solution de l'Eq. (5.30) alors son complexe conjugué  $\overline{\tilde{x}(t)}$  est solution de l'équation  $\frac{d^2}{dt^2} \overline{\tilde{x}(t)} + \omega_0^2 \overline{\tilde{x}(t)} = \omega_0^2 A_{\text{ext}} e^{-i\omega t}$  où nous avons pris le complexe conjugué de l'Eq. (5.30) et avons considéré que  $A_{\text{ext}}$  était réel. En effectuant la somme de cette équation avec l'Eq. (5.30) et en divisant par 2, on obtient bien l'équation Eq. (5.29).

Notre stratégie, pour obtenir l'ensemble des solutions réelles de l'Eq. (5.29) est d'obtenir l'ensemble des solutions complexes de l'Eq. (5.30), sachant que les solutions physiques seront obtenues en en prenant la partie réelle.

Nous avons déjà vu que la recherche de la solution générale d'une équation différentielle linéaire non homogène s'effectue en deux temps : recherche de *la* solution générale  $x_{\text{homo}}(t)$  de l'équation homogène (le problème de l'oscillateur libre résolu dans la section 5.2). Puis recherche d'*une* solution particulière  $x_{\text{part}}(t)$ , que nous menons dans la sous section suivante. Finalement, la solution générale de (5.29) est :

$$x(t) = \underbrace{x_{\text{homo}}(t)}_{\text{Éq. (5.16)}} + x_{\text{part}}(t). \quad (5.32)$$

### 5.3.2 Détermination et étude de la solution particulière

Notons  $\tilde{x}_{\text{part}}(t)$  la solution particulière de l'équation complexifiée (5.30). Nous cherchons  $\tilde{x}_{\text{part}}(t)$  telle que la combinaison linéaire de la fonction et de sa dérivée soit proportionnelle à la fonction complexe oscillante  $e^{i\omega t}$ . Essayons une solution sinusoïdale de la forme suivante :

$$\tilde{x}_{\text{part}}(t) = \tilde{A}_{\omega} e^{i\omega t}. \quad (5.33)$$

et déterminons le paramètre  $\tilde{A}_{\omega}$  pour qu'elle vérifie l'équation différentielle Eq. (5.30). Pour cela, on injecte  $\tilde{x}_{\text{part}}(t)$  dans l'équation (5.30) :

$$(-\omega^2 + \omega_0^2) \tilde{A}_{\omega} e^{i\omega t} = \omega_0^2 A_{\text{ext}} e^{i\omega t} \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad \tilde{A}_{\omega} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} A_{\text{ext}}.$$

L'indice  $\omega$  à  $\tilde{A}_{\omega}$ , permet de rappeler qu'il s'agit de la solution particulière correspondant à une force extérieure sinusoïdale de pulsation  $\omega$ .

En posant comme précédemment  $\tilde{A}_{\omega} = A_{\omega} e^{i\phi_{\omega}}$ , la solution réelle correspondante est

$$x_{\text{part}}(t) = A_{\omega} \cos(\omega t + \phi_{\omega}) \quad (5.34)$$

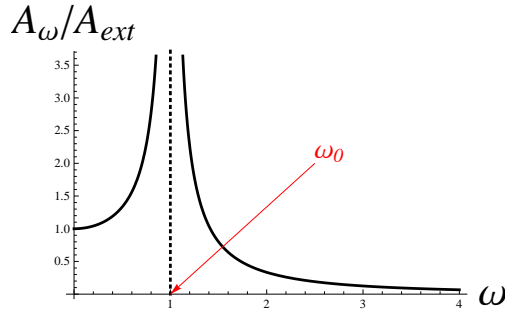
où l'amplitude et la phase sont données par (rappelons que  $A_{\text{ext}}$  est réel par définition)

$$A_{\omega} = \frac{\omega_0^2}{|\omega^2 - \omega_0^2|} A_{\text{ext}} \quad \text{et} \quad \phi_{\omega} = \begin{cases} 0 & \text{pour } \omega < \omega_0 \\ -\pi & \text{pour } \omega > \omega_0 \end{cases} \quad (5.35)$$

[Remarque : On aurait pu écrire la solution particulière de la façon suivante :  $x_{\text{part}}(t) = \tilde{A}_{\omega} \cos(\omega t)$  où  $\tilde{A}_{\omega} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} A_{\text{ext}}$ . Dans ce cas, le signe de  $\tilde{A}_{\omega}$  change avec le signe de  $\omega_0^2 - \omega^2$ . On préfère définir un quantité positive  $A_{\omega} = |\tilde{A}_{\omega}|$  que l'on appelle l'amplitude, et le changement de signe est pris en compte par la phase  $\phi_{\omega}$ . En effet, quand  $\omega < \omega_0$ ,

$A_\omega = \tilde{A}_\omega$  et donc avec  $\phi_\omega = 0$  on a bien  $\tilde{A}_\omega \cos(\omega t) = A_\omega \cos(\omega t)$ .  
 Par contre, quand  $\omega > \omega_0$ ,  $A_\omega = -\tilde{A}_\omega > 0$  et donc avec  $\phi_\omega = -\pi$  on a bien  $\tilde{A}_\omega \cos(\omega t) = A_\omega \cos(\omega t - \pi) = -A_\omega \cos(\omega t)$ .

Le choix du signe de la phase ( $\pm\pi$ ) est arbitraire ici. On a choisi  $\phi = -\pi$  car on verra que ce choix est en accord avec le cas où l'on ne néglige plus les frottements et l'oscillateur est ammorti (cf. figure 5.11)]



Le coefficient  $A_\omega$  mesure l'amplitude de la **réponse** de l'oscillateur à une excitation à pulsation  $\omega$ . Le déphasage  $\phi_\omega$  est nul pour  $\omega < \omega_0$  : la réponse est *en phase* avec l'excitation. Lorsque la fréquence dépasse le seuil,  $\omega > \omega_0$ , la réponse est *en opposition de phase* avec l'excitation,  $\phi_\omega = -\pi$ . Concentrons-nous sur l'amplitude  $A_\omega$  et analysons différents cas limites :

— *Basse fréquence* ( $\omega \ll \omega_0$ ). L'excitation est très lente, à l'échelle du temps caractéristique de l'oscillateur,  $T = 2\pi/\omega_0$ . L'oscillateur a donc le temps de répondre à l'excitation, et suit « adiabatiquement » le mouvement imposé, ce que traduit

$$A_\omega \simeq A_{\text{ext}} \text{ et } \phi_\omega = 0.$$

— *Haute fréquence* ( $\omega \gg \omega_0$ ). Si la fréquence excitatrice est très élevée, l'oscillateur ne peut suivre l'excitation trop rapide : il répond trop lentement à la sollicitation extérieure. Il est en opposition de phase avec l'excitation,  $\phi_\omega = -\pi$ , i.e. le ressort « résiste » à la force extérieure. L'amplitude des oscillations est d'autant plus petite que la fréquence augmente

$$A_\omega \simeq A_{\text{ext}} (\omega_0/\omega)^2 \ll A_{\text{ext}}.$$

— *Résonance* ( $\omega \sim \omega_0$ ). Un phénomène remarquable apparaît lorsque la fréquence excitatrice est proche de la fréquence propre de l'oscillateur. Dans ce cas nous voyons que l'amplitude de l'oscillateur « explose »

$$A_\omega \simeq \frac{\omega_0}{2|\omega - \omega_0|} A_{\text{ext}} \gg A_{\text{ext}}.$$

Elle diverge même lorsque les fréquences coïncident  $A_\omega \rightarrow \infty$  si  $\omega \rightarrow \omega_0$  (dans la pratique, nous verrons que cette divergence est

« coupée » par l'existence du frottement). Il y a un effet coopératif entre l'oscillation naturelle du système et l'excitation : c'est la situation de la personne sur la balançoire, poussée au moment où elle commence à reprendre de la vitesse afin d'amplifier au maximum le mouvement.

*Exercice :* Dans le cas de l'oscillateur forcé non amorti, il est également aisé de travailler avec des fonctions réelles : vérifier que si l'on injecte la forme  $x_{\text{part}}(t) = \tilde{A}_\omega \cos(\omega t)$  dans (5.29), on aboutit aux mêmes conclusions que précédemment.

L'avantage qu'il y a à complexifier la recherche de la solution deviendra clair dans les prochains paragraphes lorsque nous étudierons l'effet de la dissipation.

### 5.3.3 Considérations énergétiques

Nous calculons la puissance (instantanée) de la force extérieure, caractérisant l'énergie apportée (si  $> 0$ ) ou retirée (si  $< 0$ ) au système par unité de temps :<sup>3</sup>

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}(t) = F_{\text{ext}}(t) \dot{x}_{\text{part}}(t) = \frac{\omega}{2} m \omega_0^2 A_{\text{ext}}^2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin(2\omega t) \quad (5.36)$$

La force extérieure fournit et retire alternativement de l'énergie à l'oscillateur. *En moyenne* la force extérieure ne travaille pas :

$$\langle \mathcal{P}_{\text{ext}} \rangle = 0, \quad (5.37)$$

où la moyenne temporelle a été définie plus haut, éq. (5.26).

## 5.4 Oscillateur amorti (libre)

### 5.4.1 Position du problème – Échelles caractéristiques

Si nous confrontons notre expérience courante avec les résultats de l'analyse détaillée de la dynamique de l'oscillateur (libre ou forcé) menée ci-dessus, nous voyons qu'un ingrédient important que nous avons négligé est l'existence de **dissipation**, responsable de l'arrêt des oscillations après un certain temps, si le mouvement n'est pas entretenu. Jusqu'à la fin du chapitre, nous allons étudier l'effet de ce nouvel ingrédient sur le mouvement d'oscillations. Nous faisons l'hypothèse que le frottement est du type « frottement fluide », i.e. décrit par la force de frottement

$$\vec{F}_f = -\lambda \vec{v}, \quad (5.38)$$

où  $\lambda$  est un coefficient phénoménologique décrivant les détails du frottement (nature du fluide, forme de l'objet, etc), cf. chapitre 3, section 3.2.2,

3. Des formules trigonométriques utiles :  
 $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$   
 $= 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$   
 $\sin(2x) = 2 \cos x \sin x$ .

page 25. Après projection sur l'axe portant le mouvement de l'oscillateur mécanique, nous obtenons l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$m \ddot{x} = -\lambda \dot{x} - kx \quad (5.39)$$

Là encore, nous commençons par introduire les « bons » paramètres qui faciliteront l'analyse mathématique de l'équation. Ces choix sont guidés par l'analyse dimensionnelle.

— Rappelons qu'une première échelle de fréquence caractérisant le **rappel** est la pulsation propre

$$\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{k/m}.$$

Elle caractérise la fréquence des oscillations, en l'absence de frottement.

— L'inspection de l'équation différentielle montre qu'une seconde échelle ayant la dimension inverse d'un temps est

$$\frac{2}{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda}{m}.$$

L'échelle de temps  $\tau$  caractérise le **frottement**. Nous avons vu que  $\tau$  est le temps mis par la vitesse pour relaxer vers sa valeur limite, en l'absence de rappel.

Une question naturelle, à laquelle nous allons répondre, est : en présence de rappel et de frottement, comment ces deux échelles de temps  $1/\omega_0$  et  $\tau$  se combinent-elles ? Autrement dit, quelles sont les nouvelles échelles de temps contrôlant le problème de l'oscillateur amorti ?

#### 5.4.2 Résolution de l'équation différentielle

Nous pouvons re-écrire l'équation différentielle sous la forme

$$\boxed{\ddot{x}(t) + \frac{2}{\tau} \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0} \quad (5.40)$$

Nous recherchons une fonction telle qu'une certaine combinaison linéaire de  $x$ ,  $\dot{x}$  et  $\ddot{x}$  s'annule à tout temps. Puisque la fonction exponentielle est stable sous l'action de la dérivation, cela nous conduit à chercher la solution sous la forme  $x(t) = e^{-\lambda t}$ . Si nous injectons cette exponentielle dans (5.40), nous voyons immédiatement qu'elle est une solution satisfaisante  $\forall t$  à condition que  $\lambda$  soit une racine du polynôme caractéristique

$$\lambda^2 - \frac{2}{\tau} \lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (5.41)$$

Les solutions de cette équation polynomiale prennent la forme simple :

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2}. \quad (5.42)$$

**Equation différentielle de l'oscillateur amorti :**

$$\boxed{\ddot{x}(t) + \frac{2}{\tau} \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0;}$$

où  $\frac{2}{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda}{m}$  et  $\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{k/m}$

Nous avons identifié deux solutions indépendantes  $e^{-\lambda_+ t}$  et  $e^{-\lambda_- t}$  de l'équation différentielle linéaire (5.40). La solution générale est donc une combinaison linéaire de ces deux exponentielles :

$$x(t) = a e^{-\lambda_+ t} + b e^{-\lambda_- t},$$

où les deux constantes d'intégration sont fixées par les conditions initiales, par exemple :

$$\begin{cases} x(0) = a + b = x_0 \\ \dot{x}(0) = -\lambda_+ a - \lambda_- b = v_0 \end{cases}$$

L'inversion du système d'équations linéaires pour  $(a, b)$  fournit

$$x(t) = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \left[ (\lambda_+ x_0 + v_0) e^{-\lambda_- t} - (\lambda_- x_0 + v_0) e^{-\lambda_+ t} \right]. \quad (5.43)$$

Cette écriture très générale ne fait toutefois pas ressortir les propriétés physiques intéressantes de la solution. En effet, suivant le signe du discriminant réduit  $\Delta' = 1/\tau^2 - \omega_0^2$ , les solutions  $e^{-\lambda_+ t}$  et  $e^{-\lambda_- t}$  sont soit du type exponentielles réelles décroissantes ( $\Delta' > 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} \in \mathbb{R}$ ), soit exponentielle réelle pondérée par une fonction oscillante ( $\Delta' < 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} \in \mathbb{C}$ ). Nous analysons ces différents cas dans les sections suivantes.

4. Soit  $P(x) = ax^2 + 2bx + c$  un polynôme du second degré. Le discriminant réduit est  $\Delta' = \Delta/4 = b^2 - ac$  en terme duquel nous exprimons les racines du polynôme  $x_{\pm} = (-b \pm \sqrt{\Delta'})/a$ . I.e.  $P(x) = a(x - x_+)(x - x_-)$ .

### 5.4.3 Régime de fort amortissement ( $\omega_0 \tau < 1$ )

Commençons par considérer la situation où le discriminant réduit est positif  $\Delta' > 0$ , autrement dit  $1/\tau > \omega_0$  i.e. « frottement > rappel ». C'est donc un régime de « fort amortissement ». Les deux racines du polynome caractéristiques sont réelles

$$\lambda_{\pm} \in \mathbb{R}.$$

La solution générale (5.43) est une combinaison linéaire de deux exponentielles décroissantes (car  $\lambda_+ > \lambda_- > 0$ ). Le retour à l'équilibre est donc du type exponentiel. À condition que  $\lambda_+ x_0 + v_0 \neq 0$ , la solution est dominée à grand temps par le plus petit des taux, i.e.  $\lambda_-$  :

$$x(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} e^{-\lambda_- t}$$

*Cas limite du « très fort » amortissement.* – Il est instructif d'analyser les deux taux  $\lambda_{\pm}$  dans la limite  $1/\tau \gg \omega_0$  (ou  $\tau \ll T$ ). Nous obtenons les formes simplifiées :

$$\begin{cases} \lambda_+ \simeq 2/\tau \\ \lambda_- \simeq \omega_0^2 \tau / 2 \ll \lambda_+ \end{cases}$$

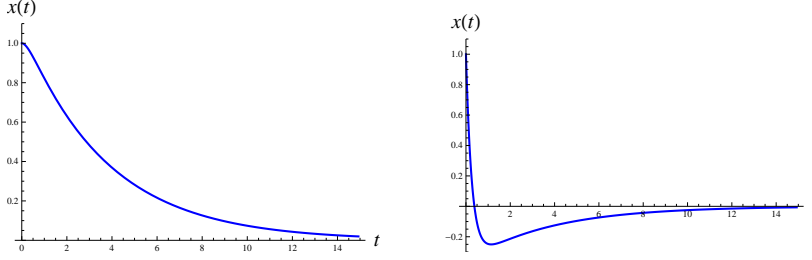


FIGURE 5.8: Régime de fort amortissement pour  $\omega_0\tau = 0.5$ . À gauche :  $x_0 = 1$  &  $v_0 = 0$  (unités arbitraires). À droite :  $x_0 = 1$  &  $v_0 = -5$ .

Le retour à l'équilibre ne s'effectue pas sur l'échelle de temps  $\tau$  caractérisant le frottement seul, mais sur une échelle de temps beaucoup plus longue combinant les deux échelles de temps caractéristiques du problème

$$1/\lambda_- \simeq \frac{T^2}{2\pi^2\tau} \gg T \gg \tau.$$

#### 5.4.4 Régime critique ( $\omega_0\tau = 1$ )

Le cas où les deux paramètres coïncident exactement est plutôt accidentel. Discutons néanmoins la solution de l'équation différentielle, que nous re-écrivons

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{2}{\tau}\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau^2}\right)x(t) = \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau}\right)^2 x(t) = 0 \quad (5.44)$$

Cette forme va se révéler utile pour identifier les deux solutions indépendantes. La discussion de la section précédente montre que les deux racines sont dégénérées,  $\lambda_- = \lambda_+ = 1/\tau$ , i.e. nous avons trouvé une solution  $e^{-t/\tau}$  de l'équation différentielle. Or toute équation différentielle linéaire du *second* ordre possède *deux* solutions indépendantes; quelle est la seconde solution?

Nous cherchons la seconde solution sous la forme  $x(t) = \xi(t)e^{-t/\tau}$  et utilisons la propriété

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau}\right)\left(\xi(t)e^{-t/\tau}\right) = \frac{d\xi(t)}{dt}e^{-t/\tau}.$$

Nous voyons immédiatement que si nous injectons  $x(t) = \xi(t)e^{-t/\tau}$  dans l'équation différentielle, nous obtenons que la nouvelle fonction satisfait  $\xi''(t) = 0$ , i.e.  $\xi(t) = a + bt$ . La seconde solution indépendante est  $te^{-t/\tau}$  et la solution générale de l'équation différentielle (5.44) est

$$x(t) = (a + bt)e^{-t/\tau}.$$

Les deux constantes d'intégration  $a$  et  $b$  sont fixées par les conditions initiales. Finalement

$$x(t) = [x_0 + (v_0 + x_0/\tau)t]e^{-t/\tau}. \quad (5.45)$$

*Démonstration alternative.* – Notons qu’il est possible de déduire la solution précédente à partir de la solution générale (5.43), en utilisant la continuité de la solution générale dans les paramètres du problème. Pour cela nous prenons la limite  $\Delta' \rightarrow 0$  dans (5.43). Pour simplifier l’analyse, posons  $\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\Delta'}$ , i.e.  $\lambda_{\pm} = \frac{1}{\tau} \pm \epsilon$  :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{e^{-t/\tau}}{2\epsilon} \left\{ \left[ \left( \frac{1}{\tau} + \epsilon \right) x_0 + v_0 \right] \overbrace{e^{\epsilon t}}^{1+\epsilon t + \mathcal{O}(\epsilon^2)} - \left[ \left( \frac{1}{\tau} - \epsilon \right) x_0 + v_0 \right] \overbrace{e^{-\epsilon t}}^{1-\epsilon t + \mathcal{O}(\epsilon^2)} \right\} \\ &= \frac{e^{-t/\tau}}{2\epsilon} \left\{ \overbrace{\left[ \frac{x_0}{\tau} + v_0 \right] - \left[ \frac{x_0}{\tau} + v_0 \right]}^{=0} + 2\epsilon x_0 + \left( \frac{x_0}{\tau} + v_0 \right) 2\epsilon t + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right\} \end{aligned}$$

ce qui conduit bien à (5.45) dans la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ .

#### 5.4.5 Régime de faible amortissement ( $\omega_0\tau > 1$ )

La limite de faible amortissement (discriminant réduit négatif  $\Delta' < 0$ , i.e.  $1/\tau < \omega_0$ ) est plus intéressante. Dans ce cas les deux racines du polynôme caractéristique sont complexes. Pour simplifier la discussion nous introduisons la notation

$$\omega_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\omega_0^2 - 1/\tau^2} \quad (\omega_1 = \sqrt{-\Delta'}) \quad \text{d'où } \lambda_{\pm} = \frac{1}{\tau} \pm i\omega_1. \quad (5.46)$$

Les deux solutions ont donc la forme d’une exponentielle décroissante  $e^{-t/\tau}$  que multiplie une exponentielle complexe, i.e. une fonction oscillante. Nous pouvons écrire la solution générale comme :

$$x(t) = \left[ C e^{i\omega_1 t} + D e^{-i\omega_1 t} \right] e^{-t/\tau},$$

où  $C = \bar{D}$  pour que la solution soit réelle.

En posant  $C = \tilde{A}/2$  avec  $\tilde{A} = A e^{i\phi}$  on obtient

$$x(t) = A \cos(\omega_1 t + \phi) e^{-t/\tau} = [a \cos(\omega_1 t) + b \sin(\omega_1 t)] e^{-t/\tau} \quad (5.47)$$

À cause de la présence de l’exponentielle, la fonction n’est pas périodique ; il est cependant utile d’introduire la *pseudo-période*

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{T}{\sqrt{(\omega_0\tau)^2 - 1}} \quad (5.48)$$

pour caractériser les oscillations. Notons que la pseudo-période est supérieure à la période propre, ce qui était attendu puisque le frottement ralentit le mouvement.

Les constantes d’intégration  $a$  et  $b$  peuvent être reliées aux conditions initiales :

$$\boxed{x(t) = \left[ x_0 \cos(\omega_1 t) + \left( \frac{x_0}{\omega_1\tau} + \frac{v_0}{\omega_1} \right) \sin(\omega_1 t) \right] e^{-t/\tau}} \quad (5.49)$$

#### Equation du mouvement de l’oscillateur amorti :

— Fort amortissement :  $\omega_0\tau < 1$  :

$$x(t) = a e^{-\lambda_+ t} + b e^{-\lambda_- t}$$

avec  $\lambda_{\pm} = \frac{1}{\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2}$

— Faible amortissement :  $\omega_0\tau > 1$  :

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega_1 t + \phi) e^{-t/\tau} \\ &= [a \cos \omega_1 t + b \sin \omega_1 t] e^{-t/\tau} \end{aligned}$$

Avec  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - 1/\tau^2}$ .

— Régime critique :  $\omega_0\tau = 1$

$$x(t) = (a + bt) e^{-t/\tau}$$



Donnons également l'expression de la vitesse :

$$\dot{x}(t) = \left[ v_0 \cos(\omega_1 t) - \left( \frac{x_0 \omega_0^2}{\omega_1} + \frac{v_0}{\omega_1 \tau} \right) \sin(\omega_1 t) \right] e^{-t/\tau}, \quad (5.50)$$

qui sera utile par la suite.

*Démonstration alternative.*— Nous pointons encore une fois que la solution (5.49) aurait pu être directement déduite de (5.43) en y injectant  $\lambda_{\pm} = 1/\tau \pm i\omega_1$  :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{e^{-t/\tau}}{2i\omega_1} \left\{ \left[ \left( \frac{1}{\tau} + i\omega_1 \right) x_0 + v_0 \right] e^{2i\omega_1 t} - \left[ \left( \frac{1}{\tau} - i\omega_1 \right) x_0 + v_0 \right] e^{-2i\omega_1 t} \right\} \\ &= e^{-t/\tau} \left\{ \left( \frac{x_0}{\tau} + v_0 \right) \frac{e^{2i\omega_1 t} - e^{-2i\omega_1 t}}{2i\omega_1} + x_0 \frac{e^{2i\omega_1 t} + e^{-2i\omega_1 t}}{2} \right\} \end{aligned}$$

qui coïncide avec (5.49).

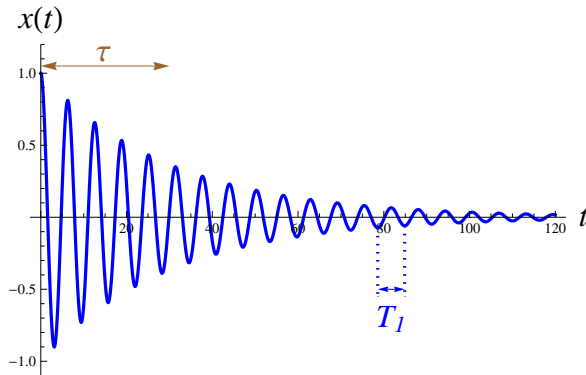


FIGURE 5.9: Régime de faible amortissement pour  $\omega_0 \tau = 30$ . ( $x_0 = 1$  &  $v_0 = 0$ ).

*Régime de « très faible » amortissement.*— Lorsque le frottement est très faible, c'est à dire lorsque  $1/\tau \ll \omega_0$ , on retrouve la pulsation propre de l'oscillateur :

$$\omega_1 \simeq \omega_0.$$

Dans ce cas, il y a donc un *découplage entre les deux échelles de temps*  $\tau \gg T$  caractérisant l'amortissement et la période des oscillations  $T_1 \simeq T$ . De nombreuses oscillations se produisent avant que l'oscillateur ne retrouve sa position d'équilibre en  $x = 0$  sous l'effet du frottement, ce qui se produit sur une échelle de temps égale à quelques  $\tau$  (figure 5.9).

#### 5.4.6 Étude énergétique – Facteur de qualité (cas $\omega_0 > 1/\tau$ )

*Énergie mécanique.*— Nous limitons les considérations énergétiques au régime d'amortissement faible,  $1/\tau < \omega_0$ . Nous pouvons calculer l'énergie mécanique à partir des expressions (5.49) et (5.50). Nous simplifions

le calcul en considérant la situation où  $v_0 = 0$ . Le calcul reste un peu fastidieux, bien que sans difficulté. On pourra vérifier que :

$$E_m(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2x_0^2 \left[ 1 + \frac{\sin(2\omega_1 t)}{\omega_1 \tau} + 2 \left( \frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1 \tau} \right)^2 \right] e^{-2t/\tau}. \quad (5.51)$$

En présence de dissipation, le système n'est *pas conservatif* et **l'énergie mécanique décroît** au cours du temps.

Nous nous concentrons maintenant sur le cas du très faible amortissement,  $1/\tau \ll \omega_0 \simeq \omega_1$ , qui conduit à quelques simplifications. Nous pouvons négliger le terme oscillant de l'énergie. Nous obtenons une simple décroissance exponentielle (lente à l'échelle de la période  $T$ )

$$E_m(t) \simeq \frac{1}{2}m\omega_0^2x_0^2 e^{-2t/\tau}. \quad (5.52)$$

Ce résultat aurait pu être déduit plus simplement en remarquant que la loi horaire (5.49) peut être approximée par

$$x(t) \simeq x_0 \cos(\omega_0 t) e^{-t/\tau}$$

d'où

$$E_c(\dot{x}(t)) \simeq \frac{1}{2}m\omega_0^2x_0^2 \sin^2(\omega_0 t) e^{-2t/\tau} \quad (5.53)$$

$$E_p(x(t)) \simeq \frac{1}{2}m\omega_0^2x_0^2 \cos^2(\omega_0 t) e^{-2t/\tau} \quad (5.54)$$

qu'on comparera à (5.23) et (5.24).

*Facteur de qualité.* – Introduisons le « *facteur de qualité* »

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} 2\pi \frac{\text{énergie stockée au temps } t}{\text{énergie perdue pendant une pseudo-période}} \quad (5.55)$$

pour caractériser l'efficacité de la dissipation. L'expression approchée obtenue plus haut, éq. (5.52), nous donne précisément :

$$Q \simeq 2\pi \frac{\frac{1}{2}m\omega_0^2x_0^2 e^{-2t/\tau}}{\frac{1}{2}m\omega_0^2x_0^2 (e^{-2t/\tau} - e^{-2(t+T_1)/\tau})} = 2\pi \frac{1}{1 - e^{-2T_1/\tau}}.$$

En utilisant que  $T_1 \simeq T \ll \tau$ , nous pouvons développer l'exponentielle  $1 - e^{-2T_1/\tau} \simeq 2T_1/\tau$  d'où nous concluons que<sup>5</sup>

$$\boxed{Q \simeq \frac{1}{2} \omega_0 \tau \gg 1} \quad (5.56)$$

Le facteur de qualité a été défini par des considérations énergétiques ; l'expression finale,  $Q \simeq \pi\tau/T$  montre qu'il mesure également le *nombre typique d'oscillations avant amortissement du mouvement* (figure 5.9).

**Facteur de qualité  $Q$  :**

$2\pi/Q$  est la fraction d'énergie perdue par période.  $Q$  correspond aussi au nombre typique d'oscillations avant amortissement. Dans la limite de faible amortissement, on a

$$Q \simeq \frac{1}{2} \omega_0 \tau.$$

5. On a utilisé le développement limité  $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots$  pour  $x \rightarrow 0$ .

*Ordres de grandeurs :* Comme son nom l'indique, le facteur de qualité  $Q$  mesure la « qualité » d'un oscillateur, i.e. sa faculté à osciller sans s'amortir. Donnons deux exemples de « bons » oscillateurs :

- Corde de piano. Un instrument de musique est un résonateur dont on cherche à maximiser le facteur de qualité afin que le son persiste. Les fréquences s'échelonnent typiquement entre quelques 10 Hz et quelques kHz. Prenons  $f \sim 1$  kHz. D'autre part, lorsque l'on frappe une touche, le son persiste sur un temps de l'ordre de la seconde, i.e.  $\tau \sim 1$  s. Nous déduisons l'ordre de grandeur  $Q \sim 10^3$ .
- Atome d'hydrogène. On peut assimiler l'oscillation d'un électron autour du proton à un problème d'oscillateur. Considérons par exemple un électron dans le premier état excité, appelé « 2p ». La période de l'orbite est  $T_{2p} \simeq 10^{-15}$  s. À cause du couplage au champ électromagnétique, l'atome ne reste pas dans son état excité mais retombe dans son état fondamental, noté 1s (ce phénomène est appelé « l'émission spontanée »). Le vide électromagnétique génère l'analogue d'une force de friction sur l'électron. Le taux de désexcitation (dans le vide) est  $\Gamma_{2p \rightarrow 1s} \simeq 0.66 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$  ( $\leftrightarrow 1/\tau$ ).<sup>6</sup> On déduit un facteur de qualité  $Q \simeq 2\pi / (T_{2p} \Gamma_{2p \rightarrow 1s}) \simeq 10^7$ .

6. Pour en savoir plus : chapitre 15 de C. Texier, *Mécanique quantique*, Dunod, 2011.

## 5.5 Oscillateur amorti forcé – Résonance

### 5.5.1 Introduction

Nous terminons le chapitre en revenant sur la question importante de l'oscillateur forcé, dans le cadre d'un modèle plus réaliste prenant en compte la présence de dissipation, par exemple pour modéliser la situation de la figure 5.7.

Nous décrivons donc une masse soumise à

- la force de rappel,
- la force de frottement fluide,
- une force extérieure sinusoïdale de pulsation  $\omega$  a priori *distincte* de la pulsation propre de l'oscillateur,  $\omega \neq \omega_0$ .

Le P.F.D conduit à l'équation différentielle non homogène du second ordre :

$$\ddot{x}(t) + \frac{2}{\tau} \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_{\text{ext}}}{m} \cos(\omega t), \quad (5.57)$$

où  $\omega$  est a priori différente de la pulsation propre  $\omega_0$ . Nous procédons comme précédemment pour résoudre l'équation non homogène : la solution est décomposée en deux contributions :

$$x(t) = \underbrace{x_{\text{homo}}(t)}_{\text{Éq. (5.47)}} + x_{\text{part}}(t)$$

La solution homogène correspondant au problème étudié dans la section 5.4, nous allons pouvoir nous concentrer sur la recherche et l'analyse de la solution particulière.

### 5.5.2 Analyse du régime de faible amortissement – Résonance

Nous procédons exactement comme dans la section 5.3. Les équations seront un peu plus compliquées du fait de la présence du terme de friction et l'avantage qu'il y a à complexifier la solution devient assez explicite. Considérons l'équation différentielle auxiliaire :

$$\frac{d^2}{dt^2} \tilde{x}(t) + \frac{2}{\tau} \frac{d}{dt} \tilde{x}(t) + \omega_0^2 \tilde{x}(t) = \omega_0^2 A_{\text{ext}} e^{i\omega t} \quad \text{avec } x(t) = \text{Re} [\tilde{x}(t)] \quad (5.58)$$

où comme précédemment, nous avons introduit  $A_{\text{ext}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{F_{\text{ext}}}{m\omega_0^2}$ .

Afin de compenser le terme oscillant du second membre de l'équation, nous devons chercher une solution sous la forme :

$$\tilde{x}_{\text{part}}(t) = \tilde{A}_\omega e^{i\omega t}. \quad (5.59)$$

Injectant cette forme dans l'équation différentielle, nous obtenons l'expression du coefficient complexe :

$$\tilde{A}_\omega = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{2i}{\tau}\omega} A_{\text{ext}}. \quad (5.60)$$

Nous pouvons revenir à la solution réelle

$$x_{\text{part}}(t) = A_\omega \cos(\omega t + \phi_\omega) \quad (5.61)$$

où l'amplitude et la phase de  $\tilde{A}_\omega = A_\omega e^{i\phi_\omega}$  sont <sup>7</sup>

$$A_\omega = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\omega/\tau)^2}} A_{\text{ext}} \quad \text{et} \quad \tan \phi_\omega = \frac{2\omega/\tau}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (5.62)$$

Le signe négatif du déphasage,  $\phi_\omega \in [-\pi, 0]$  (cf. figure 5.11) traduit le fait que la réponse de l'oscillateur est *en retard* sur l'excitation (la force extérieure).

Un examen rapide de  $A_\omega$  montre qu'elle présente un comportement assez similaire à l'amplitude (5.35) obtenue en l'absence de dissipation, à la différence importante que l'amplitude ne présente plus de divergence pour  $\omega = \omega_0$ . Nous pouvons cependant essentiellement répéter les conclusions de la section 5.3.2 :

- Aux petites fréquences,  $\omega \ll \omega_0$ , la force extérieure est très lente ; l'oscillateur a le temps de répondre à la perturbation d'où  $A_\omega \simeq A_{\text{ext}}$  (qui serait le résultat statique). Ceci explique que la réponse soit *en phase* avec la force extérieure,  $\phi_\omega \simeq 0$ .

7. Nous utilisons que le module et la phase de  $\frac{1}{x-iy}$  sont donnés respectivement par  $1/\sqrt{x^2+y^2}$  et  $e^{i\phi} = \frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ , i.e.  $\tan \phi = y/x$ .

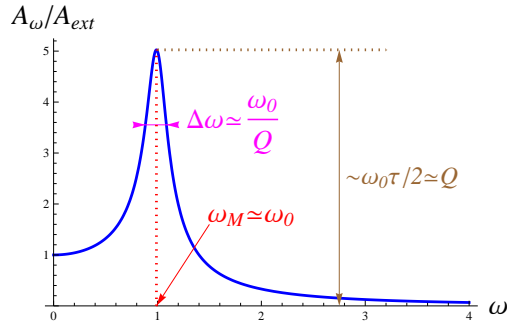


FIGURE 5.10: Amplitude en fonction de la fréquence de la force extérieure; la courbe correspond à  $\omega_0\tau = 10$ .

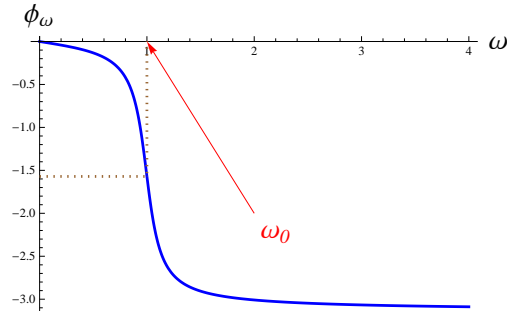


FIGURE 5.11: Déphasage en fonction de la fréquence extérieure. À résonance,  $\omega = \omega_0$ , l'oscillateur est en retard d'un quart de période ( $\phi_\omega = -\pi/2$ ); la courbe correspond à  $\omega_0\tau = 10$ .

- L'amplitude du mouvement augmente fortement lorsque  $\omega$  se rapproche de la pulsation propre de l'oscillateur : c'est le phénomène de **résonance**, mais cette fois limité par la dissipation (le dénominateur de  $A_\omega$  ne s'annule plus, grâce à la présence du terme proportionnel à  $1/\tau^2$ ). Lorsque  $\omega \sim \omega_0$ , le mouvement est *un quart de période en retard* sur la force (on dit « en quadrature »),  $\phi_\omega \simeq -\pi/2$  (nous avons remarqué que l'amplification est plus efficace si l'on exerce une force au moment où la vitesse est maximale).
- Aux hautes fréquences,  $\omega \gg \omega_0$ , l'oscillateur n'a pas le temps de répondre à l'excitation : il est *en opposition de phase*,  $\phi_\omega \simeq -\pi$ , et résiste à la force, d'où  $A_\omega \ll A_{\text{ext}}$ .

Analysons maintenant plus en détail l'amplitude, et en particulier le voisinage de la résonance. Nous cherchons d'abord la position du maximum de  $A_\omega$ , qui correspond au minimum du dénominateur :

$$\frac{d}{d(\omega^2)} \left[ (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\omega/\tau)^2 \right] = 0 \Rightarrow 2(\omega^2 - \omega_0^2) + \frac{4}{\tau^2} = 0$$

Le maximum correspond à la pulsation

$$\omega_M \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\omega_0^2 - 2/\tau^2} \quad (5.63)$$

légèrement en dessous de la fréquence  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - 1/\tau^2}$  introduite plus haut. À cette fréquence, nous déduisons de (5.62) que l'amplitude

est donnée par

$$\boxed{\frac{A_{\omega_M}}{A_{\text{ext}}} = \frac{\omega_0^2 \tau}{2\omega_1} \simeq \frac{\omega_0 \tau}{2} \simeq Q} \quad (5.64)$$

Le calcul de l'amplitude maximale fait donc apparaître le facteur de qualité de l'oscillateur, défini dans la section précédente.

Nous pouvons également déterminer la largeur de la courbe. Nous cherchons les fréquences  $\omega_{\pm}$  où l'amplitude est réduite d'un facteur  $\sqrt{2}$ . Écrivons

$$A_{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{\omega_M}$$

nous obtenons une équation du second degré pour  $\omega^2$  :

$$\omega^4 - 2\omega_M^2 \omega^2 - \frac{8}{\tau^2} \omega_1^2 = 0.$$

Les deux solutions de cette équation sont

$$\omega_{\pm}^2 = \omega_M^2 \pm \frac{2\omega_1}{\tau},$$

i.e.<sup>8</sup>

$$\omega_{\pm} = \omega_M \sqrt{1 \pm \frac{2\omega_1}{\omega_M^2 \tau}} \underset{\omega_0 \tau \gg 1}{\simeq} \omega_0 \left( 1 \pm \frac{1}{\omega_0 \tau} \right).$$

La largeur du pic de résonance est directement liée au coefficient de frottement :

$$\boxed{\Delta\omega \stackrel{\text{def}}{=} \omega_+ - \omega_- \simeq \frac{2}{\tau} \simeq \frac{\omega_0}{Q}} \quad (5.65)$$

Il est donc d'autant plus étroit que le frottement est faible, i.e. le facteur de qualité est grand.

### 5.5.3 Analyse énergétique

En présence de dissipation et lorsque l'oscillateur est isolé (non forcé) l'énergie mécanique décroît rapidement, sur une échelle de temps caractéristique  $\tau$ . La force extérieure injecte de l'énergie dans le système afin d'entretenir le mouvement (cette énergie est dissipée par frottement, i.e. elle est convertie en énergie thermique). Nous souhaitons quantifier l'énergie absorbée par le système : pour cela nous calculons la puissance instantanée de la force extérieure<sup>9</sup>

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}(t) = F_{\text{ext}}(t) \dot{x}_{\text{part}}(t) = -m\omega_0^2 \omega A_{\text{ext}} A_{\omega} \underbrace{\cos(\omega t) \sin(\omega t + \phi_{\omega})}_{\frac{1}{2} [\sin(2\omega t + \phi_{\omega}) + \sin(\phi_{\omega})]}$$

Cette expression est approchée au moyennage temporel :

$$\langle \mathcal{P}_{\text{ext}} \rangle = -\frac{1}{2} m\omega_0^2 \omega A_{\text{ext}} A_{\omega} \sin(\phi_{\omega}).$$

8. Nous utilisons le développement limité  $\sqrt{1+\epsilon} \simeq 1 + \frac{1}{2}\epsilon$ .

9. Encore des formules trigonométriques (dédites des précédentes) :  
 $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$   
 $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$   
 $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$ .

Si nous revenons à la définition de la phase, ou plutôt à (5.60), nous voyons que

$$\sin(\phi_\omega) = \frac{-2\omega/\tau}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\omega/\tau)^2}}$$

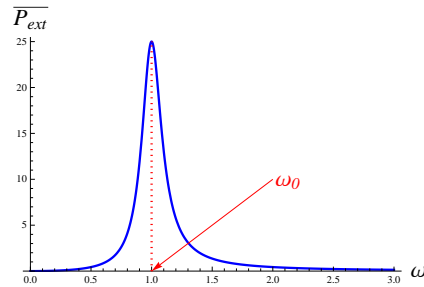
Cette expression nous permet d'obtenir la puissance moyenne apportée au système :

$$\langle \mathcal{P}_{\text{ext}} \rangle = m\omega_0^2 A_{\text{ext}}^2 \frac{\omega_0^2}{\tau} \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\omega/\tau)^2} \quad (5.66)$$

La puissance s'annule aussi bien aux basses fréquences,  $\langle \mathcal{P}_{\text{ext}} \rangle \underset{\omega \rightarrow 0}{\propto} \omega^2$ , qu'aux hautes fréquences,  $\langle \mathcal{P}_{\text{ext}} \rangle \underset{\omega \rightarrow \infty}{\propto} 1/\omega^2$ . Si nous cherchons la position du maximum de  $\langle \mathcal{P}_{\text{ext}} \rangle$ , nous obtenons

$$\langle \mathcal{P}_{\text{ext}} \rangle \quad \text{maximum pour} \quad \omega = \omega_0. \quad (5.67)$$

La puissance absorbée est maximum *précisément à résonance*.



**Puissance absorbée :**  
la puissance de la force extérieure est maximum précisément à résonance, pour  $\omega = \omega_0$ .

FIGURE 5.12: Puissance de la force extérieure en fonction de la pulsation; la courbe correspond à  $\omega_0\tau = 10$ .

#### 5.5.4 Régime transitoire vs régime permanent

Pour clore ce chapitre, nous revenons sur le point évoqué au début de la section : la solution complète  $x(t) = x_{\text{homo}}(t) + x_{\text{part}}(t)$  est la somme de la solution de l'équation homogène, donnée par l'éq. (5.47), et de la solution particulière (5.61).

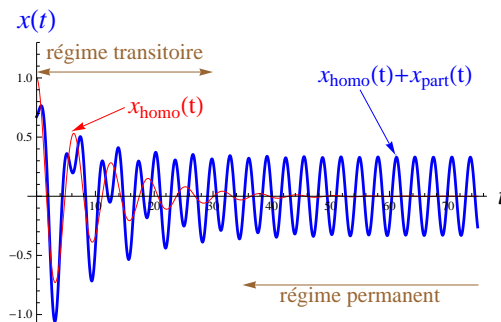


FIGURE 5.13: Déplacement de l'oscillateur. En trait fin : contribution de la solution de l'équation homogène. La courbe correspond à  $\omega_0\tau = 10$  et  $\omega/\omega_0 = 2$ .

En présence d'amortissement, ces deux solutions présentent des caractères *très différents* puisque  $x_{\text{homo}}(t)$  décroît exponentiellement avec

le temps, sur l'échelle de temps  $\tau$ , alors que  $x_{\text{part}}(t)$  a une amplitude fixée par la force extérieure (d'autre part les deux fonctions oscillent à des fréquences distinctes). C'est donc la solution  $x_{\text{homo}}(t)$  qui *porte toute l'information sur les conditions initiales*, i.e.  $x_0$  et  $v_0$ . Lorsque  $t \gtrsim$  quelques  $\tau$ , cette information est donc perdue, et le mouvement de l'oscillateur entièrement déterminé par la force extérieure. On parle de « régime transitoire » pour désigner l'intervalle de temps sur lequel l'oscillateur garde la mémoire des conditions initiales. Lorsque celle-ci est perdue, on dit que le « régime permanent » s'est établi.



*Annexe : Oscillateur anharmonique (HORS PROGRAMME)*

Nous avons remarqué au début de la section qu'une propriété remarquable de l'oscillateur harmonique (ou oscillateur linéaire) est que la période est la même pour toutes les trajectoires :

$$\text{oscillateur harmonique} \Rightarrow \text{période indépendante de } E_m$$

Pour bien apprécier cette observation, nous considérons dans cette petite annexe la situation où cette propriété n'est plus respectée, i.e. nous étudions un oscillateur *non harmonique* (non amorti et libre). Les calculs apparaîtront probablement un peu difficiles, donc cette annexe n'est recommandée qu'à ceux qui ont un goût pour les calculs plus techniques.

Considérons l'exemple du pendule de la figure 5.2 dont le mouvement est décrit par l'équation différentielle non linéaire

$$\ddot{\theta}(t) + \omega_0^2 \sin \theta(t) = 0,$$

où  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ . L'équation peut être résolue en utilisant le théorème de l'énergie mécanique. Cette dernière prend la forme :

$$E_m = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta.$$

En utilisant que  $E_m = \text{constante} \stackrel{\text{def}}{=} -mgl \cos \theta_E$ , nous pouvons écrire

$$\dot{\theta} = \pm \omega_0 \sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_E)} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_E)}} = \pm \omega_0 dt$$

où les deux signes correspondent aux allers-retours. L'angle varie de  $-\theta_E$  à  $+\theta_E$  en une demi-période, d'où

$$T(E) = \frac{2}{\omega_0} \int_{-\theta_E}^{+\theta_E} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_E)}}.$$

Nous avons obtenu la période comme une fonction de l'énergie non triviale, via  $\theta_E = \arccos(-E/mgl)$  (nous notons simplement  $E_m \rightarrow E$ ). Cette fonction est définie par une intégrale, ce qui permet déjà de l'analyser (ou de la calculer numériquement). Nous montrons qu'elle peut être reliée à une fonction spéciale assez populaire et largement étudiée dans la littérature mathématique. En utilisant  $\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$  nous écrivons

$$T(E) = \frac{2}{\omega_0} \int_0^{\theta_E} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_E/2) - \sin^2(\theta/2)}}. \quad (5.68)$$

Le changement de variable  $\sin \alpha = \sin(\theta/2) / \sin(\theta_E/2)$  nous permet d'obtenir

$$T(E) = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_E/2) \sin^2 \alpha}}. \quad (5.69)$$

L'intérêt de cette nouvelle représentation intégrale est d'établir la relation avec une fonction bien connue, appelée « intégrale elliptique de première espèce », notée  $K(k)$  :

$$T(E) = \frac{4}{\omega_0} K(\sin(\theta_E/2)), \quad (5.70)$$

connue notamment des programmes de calcul symbolique comme **Mathematica** ou **Maple**.

Montrons l'intérêt de la représentation intégrale (5.68) pour l'analyse des cas limites. Considérons la limite des petits angles,  $\theta < \theta_E \ll 1$  permettant de développer les sinus :

$$T(E) \underset{\theta_E \ll 1}{\simeq} \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\theta_E} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_E^2 - \theta^2}} = \frac{4}{\omega_0} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \stackrel{u=\sin\alpha}{=} \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

On a retrouvé l'expression de la période de l'oscillateur harmonique vue plus haut, ce qui s'explique comme suit : dans la limite des petits angles, le pendule n'explore que la partie quadratique de l'énergie potentielle  $E_p(\theta) = -mgl \cos \theta \simeq -mgl + \frac{1}{2}ml^2\omega_0^2\theta^2$ .

Lorsque l'énergie est telle que l'oscillateur explore des grands angles, la période excède  $2\pi/\omega_0$  : pour une énergie  $E$  le domaine angulaire exploré par l'oscillateur est plus grand que pour l'oscillateur harmonique (cf. partie gauche de la figure 5.14).

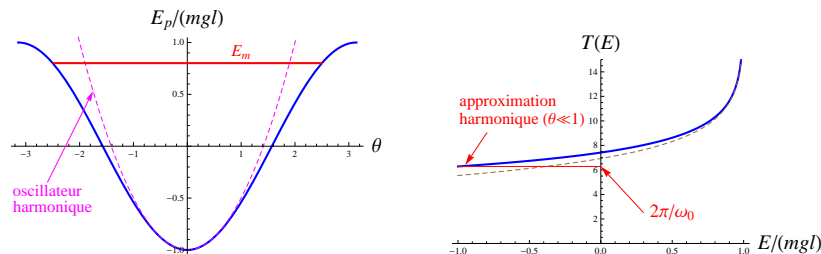


FIGURE 5.14: À gauche : Énergie potentielle pour le potentiel anharmonique. À droite : Période de l'oscillateur anharmonique en fonction de l'énergie. La ligne en tirets correspond à l'approximation logarithmique obtenue dans le texte.

Lorsque  $E$  s'approche de la valeur maximale de la barrière de potentielle,  $E \rightarrow mgl^-$  i.e.  $\theta \rightarrow \pi^-$ , on utilise le comportement limite  $K(k) \simeq \ln(4/k')$  où  $k' = \sqrt{1-k^2}$  pour  $k \rightarrow 1^-$ , i.e.

$$T(E) \underset{\theta_E \rightarrow \pi^-}{\simeq} \frac{4}{\omega_0} \ln\left(\frac{8}{\pi - \theta_E}\right) \simeq \frac{2}{\omega_0} \ln\left(\frac{32}{1 - E/mgl}\right) \text{ pour } E \rightarrow mgl^-.$$

Nous avons utilisé que l'argument de l'intégrale elliptique est  $k = \sin(\theta_E/2)$  d'où  $k' = \cos(\theta_E/2) \simeq (\pi - \theta_E)/2$ , qui peut être relié à l'énergie puisque  $E/(mgl) = -\cos(\theta_E)$ . La période diverge logarithmiquement lorsque  $E$  tend vers  $+mgl$ . Cette divergence n'est pas surprenante puisque si le pendule a une énergie mécanique supérieure à  $+mgl$ , il n'y a plus de mouvement oscillant : le pendule tourne autour de son axe avec une vitesse qui est modulée au cours du temps mais ne change pas de signe.

A

*Trigonometrie*

Nous résumons brièvement les définitions et quelques propriétés relatives aux fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente. Ces notions seront considérées comme acquises.

### A.1 Le triangle rectangle

Dans le triangle  $ABC$  rectangle en  $B$ , on note  $R$  l'hypothénuse  $AC$  et  $\theta$  l'angle en  $A$  et  $\alpha$  l'angle en  $C$ . Le cosinus et le sinus de l'angle  $\theta$  sont définis par les rapports suivants :

$$\cos \theta = \frac{AB}{R}; \quad \sin \theta = \frac{BC}{R}.$$

On se rappellera que pour obtenir le cosinus il faut considérer le coté

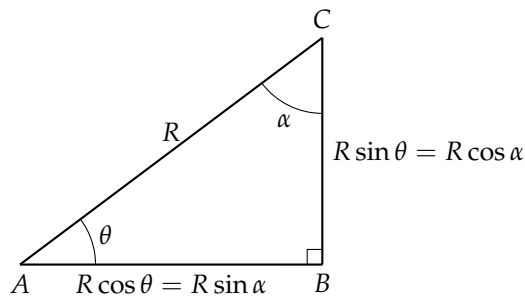


FIGURE A.1: *Le triangle rectangle.*

*adjacent* (du même coté) à l'angle, alors que pour le sinus il faut considérer le coté opposé à l'angle. On aura donc pour l'angle  $\alpha$  les relations suivantes :

$$\sin \alpha = \frac{AB}{R}; \quad \cos \alpha = \frac{BC}{R}.$$

Comme la somme des angles d'un triangle est égale à  $\pi$  ( $180^\circ$ ), les angles  $\theta$  et  $\alpha$  sont complémentaires, c'est à dire que :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

On a donc la propriété :

$$\cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sin \theta; \quad \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cos \theta.$$

Le théorème de Pythagore :  $R^2 = (AB)^2 + (BC)^2$  implique que :

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

On introduit aussi la fonction tangente de l'angle  $\theta$  notée  $\tan \theta$ . Elle est définie comme le rapport du sinus sur le cosinus de l'angle  $\theta$  :

$$\tan \theta \equiv \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

#### Définition de cosinus et sinus

$$\cos = \frac{\text{coté adjacent}}{\text{hypothénuse}}; \quad \sin = \frac{\text{coté opposé}}{\text{hypothénuse}};$$

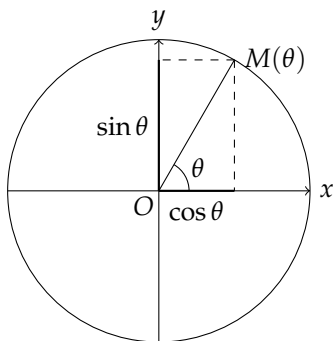


FIGURE A.2: Le cercle trigonométrique.

## A.2 Cercle trigonométrique

Il est commode de visualiser les cosinus et sinus en utilisant le cercle trigonométrique. Le cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1. Les coordonnées  $x$  et  $y$  d'un point  $M$  situé sur le cercle sont les cosinus et le sinus de l'angle  $\theta$  que fait le rayon vecteur  $\overrightarrow{OM}$  avec l'axe  $Ox$  (voir figure A.2).

## A.3 Propriétés des sinus et cosinus et tangente

### A.3.1 Valeurs remarquables

Dans le tableau ci-dessous nous résumons les valeurs remarquables des sinus et cosinus pour des angles dans l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Les valeurs des sinus et cosinus dans l'intervalle  $[0, 2\pi]$  s'obtiennent en utilisant les propriétés de périodicité et de symétrie données dans la section suivante.

$\theta$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

TABLE A.1: Valeurs particulières des fonctions cosinus et sinus.

### A.3.2 Périodicité et symétries

En utilisant le cercle trigonométrique, il n'est pas très difficile de vérifier les propriétés suivantes :

— Périodicité :

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta$$

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta$$

$$\tan(\theta + \pi) = \tan \theta$$

— Parité ou symétrie par rapport à  $Ox$  :

$$\begin{aligned}\sin(-\theta) &= -\sin \theta \\ \cos(-\theta) &= \cos \theta \\ \tan(-\theta) &= -\tan \theta\end{aligned}$$

— Symétrie par rapport à  $Oy$  :

$$\begin{aligned}\sin(\pi - \theta) &= \sin \theta \\ \cos(\pi - \theta) &= -\cos \theta\end{aligned}$$

— Inversion par rapport à  $O$  :

$$\begin{aligned}\sin(\pi + \theta) &= -\sin \theta \\ \cos(\pi + \theta) &= -\cos \theta\end{aligned}$$

— Complémentarité

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cos \theta \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sin \theta \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \frac{1}{\tan \theta}\end{aligned}$$

### A.3.3 *Pythagore*

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

### A.3.4 *Somme des angles*

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

### A.3.5 *Angle double*

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= 2 \cos^2 \theta - 1 \\ \sin(2\theta) &= 2 \sin \theta \cos \theta\end{aligned}$$

qui est un cas particulier des équation précédentes.

## A.3.6 dérivée

$$\frac{d \cos \theta}{d\theta} = -\sin \theta$$

$$\frac{d \sin \theta}{d\theta} = \cos \theta$$

donc les fonctions sinus et cosinus vérifient :

$$\frac{d^2 \cos \theta}{d\theta^2} = -\cos \theta \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{d^2 \sin \theta}{d\theta^2} = -\sin \theta. \quad (\text{A.2})$$

Elles sont donc toutes les deux solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2}{d\theta^2} f(\theta) + f(\theta) = 0.$$

La dérivée de la fonction tangente peut s'écrire de la façon suivante :

$$\frac{d \tan \theta}{d\theta} = \tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad (\text{A.3})$$





*B*

*Vecteurs*

### B.1 Définition

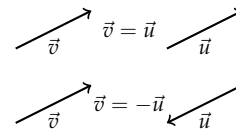
Un vecteur  $\vec{v}$  est déterminé par 3 quantités, sa direction, son sens et sa norme qui est un nombre réel positif et sera notée  $\|\vec{v}\|$ . On représente un vecteur par une flèche dont la longueur représente sa norme et la direction et sens de la flèche représentent le direction et le sens du vecteur. On pourra aussi représenter un vecteur par un couple de points  $A$  et  $B$ , c'est à dire la flèche qui va de  $A$  vers  $B$  que l'on notera  $\overrightarrow{AB}$ . On dit alors que le vecteur est représenté par le bipoint  $AB$ .

**Vecteur**  $\vec{v}$  : direction, sens et norme  $\|\vec{v}\| \geq 0$ .



### B.2 Egalité de deux vecteurs

Deux vecteurs sont égaux, si les flèches qui les représentent sont parallèles, de même sens et de même longueurs. Deux vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{u}$  sont opposés :  $\vec{v} = -\vec{u}$ , s'ils ont même norme, même direction mais sont de sens opposés.

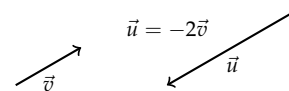


### B.3 Colinéarité de deux vecteurs

Deux vecteurs sont colinéaires s'il ont même direction. Ils peuvent avoir des normes ou des sens différents.

### B.4 Multiplication par un nombre réel :

Soit  $a$  un nombre réel alors  $\vec{u} = a\vec{v}$  est colinéaire à  $\vec{v}$  et  $\|\vec{u}\| = |a|\|\vec{v}\|$ . Multiplier un vecteur par un nombre réel positif revient simplement à multiplier la longueur de la flèche par ce nombre sans rien changer d'autre. Si de plus le nombre est négatif, le sens est inversé.

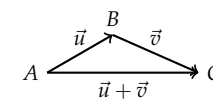


### B.5 Addition de deux vecteurs

Soient deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  représentés par leur bipoints respectifs :  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BC}$  alors

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC},$$

c'est la relation de Chasles.

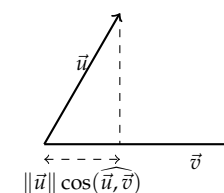


### B.6 Produit scalaire

Le résultat du produit scalaire entre deux vecteurs est un nombre réel :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} = \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}).$$

On remarque que  $\|\vec{u}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$  est la projection de  $\vec{u}$  sur la direction de  $\vec{v}$ . Donc si la norme de  $\vec{v}$  est égale à 1 alors  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  est égale à la projection de  $\vec{u}$  sur la direction de  $\vec{v}$ .



### B.7 Norme

La norme d'un vecteur  $\vec{v}$  est donnée par son carré scalaire :

$$\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{v}^2.$$

### B.8 Orthogonalité :

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs orthogonaux, leur produit scalaire est nul :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

### B.9 Base du plan :

L'ensemble de tous les vecteurs du plan peuvent être obtenus en faisant des combinaisons linéaires de deux vecteurs non colinéaires. Choisissons deux vecteurs du plan  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  et soit  $\vec{v}$  un vecteur quelconque du plan, alors, il existe deux nombres réels  $v_1$  et  $v_2$  tels que :

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2$$

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est appelée, base du plan. Les nombres réels  $v_1$  et  $v_2$  sont appelés composantes du vecteur  $\vec{v}$  dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

### B.10 Base orthonormée du plan :

Si on choisit deux vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  de norme égale à 1 et orthogonaux. C'est à dire que  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  vérifient les relations suivantes :

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ et } \vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \tag{B.1}$$

alors la base est dite orthonormée. Dans ce cas, il est très simple de déterminer les composantes  $v_x$  et  $v_y$  d'un vecteur quelconque du plan  $\vec{v}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  :

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}.$$

En effet, pour obtenir  $v_x$ , il suffit de prendre le produit scalaire de cette équation avec le vecteur  $\vec{i}$ , et on obtient :

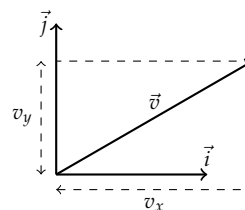
$$\vec{v} \cdot \vec{i} = v_x(\vec{i} \cdot \vec{i}) + v_y(\vec{j} \cdot \vec{i}) \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{i} = v_x \tag{B.2}$$

où on a utilisé les relations d'orthonormalisation données par l'Eq. B.1. De même pour obtenir  $v_y$ , on effectue le produit scalaire du vecteur  $\vec{v}$  avec le vecteur  $\vec{j}$ , et on obtient :

$$v_y = \vec{v} \cdot \vec{j}.$$

Dans une base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j})$  :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \\ v_x &= \vec{v} \cdot \vec{i}; \quad v_y = \vec{v} \cdot \vec{j} \end{aligned}$$



### B.11 Base orthonormée de l'espace

tous les vecteurs de l'espace peuvent être obtenus en faisant des combinaisons linéaires de trois vecteurs de base, à condition que ces trois vecteurs ne soient pas dans le même plan. Si les trois vecteurs de base sont de norme 1 et sont orthogonaux entre eux alors la base est dite orthonormée. Par convention, on notera  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  la base orthonormée de l'espace, où  $\vec{i}, \vec{j}$  engendrent le plan horizontal et  $\vec{k}$  est vertical vers le haut.

### B.12 Produit scalaire dans une base orthonormée :

Soient deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , dont on connaît les composantes dans une base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

$$\begin{aligned}\vec{u} &= u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \\ \vec{v} &= v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k},\end{aligned}$$

alors le produit scalaire entre  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  s'exprime en fonction des composantes de la façon suivante :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z.$$

Dans le cas particulier où  $\vec{u} = \vec{v}$ , on obtient l'expression de la norme du vecteur :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}.$$

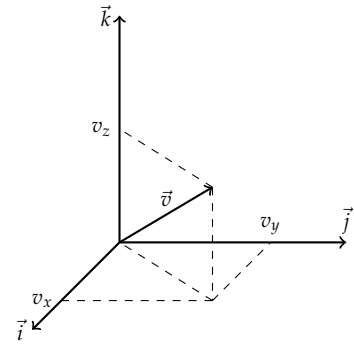
### B.13 Dimension d'un vecteur :

Lorsqu'un vecteur est utilisé pour représenter une quantité physique, le vecteur possédera une dimension. La dimension du vecteur sera la même que celle de ces composantes. Cela implique d'une part que les trois composantes du vecteur doivent avoir la même dimension, et d'autre part que les vecteurs de la base orthonormée sont sans dimension. Par exemple :

- Si un point  $M$  de l'espace est repéré par le vecteur  $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , alors la dimension du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  est la dimension de  $x$ ,  $y$  et  $z$ ; c'est à dire une longueur  $L$ .
- Si une force  $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$ , alors la dimension du vecteur  $\vec{F}$  et des composantes  $F_x, F_y, F_z$  est  $MLT^{-2}$ .

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base orthonormée de l'espace :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \\ v_x &= \vec{v} \cdot \vec{i}; \quad v_y = \vec{v} \cdot \vec{j}; \quad v_z = \vec{v} \cdot \vec{k}\end{aligned}$$



*C*

*Equations différentielles*

## C.1 Définitions

### C.1.1 Définitions générales

Une équation différentielle est une relation entre une fonction  $f(t)$  ses dérivées  $\frac{df}{dt}, \frac{d^2f}{dt^2}, \dots, \frac{d^n f}{dt^n}$  et  $t$  que l'on peut écrire sous la forme :

$$F\left(f(t), \frac{df}{dt}, \frac{d^2f}{dt^2}, \dots, \frac{d^n f}{dt^n}, t\right) = 0. \quad (\text{C.1})$$

L'ordre  $n$ , de la dérivée la plus haute apparaissant dans l'équation différentielle est appelé *l'ordre de l'équation différentielle*.  $t$  est appelée *la variable indépendante* et  $f(t)$  est la fonction inconnue, qui vérifie l'équation différentielle, et que l'on cherche à déterminer. L'ensemble des fonctions  $f(t)$  vérifiant l'équation différentielle est appelée *la solution générale de l'équation différentielle*. Le nombre des solutions peut être fini, infini ou nul.

Comme nous l'avons indiqué,  $t$  est une variable réelle. Nous n'avons pas encore précisé l'ensemble des valeurs de  $f(t)$ . On verra qu'il est très avantageux de ne pas se restreindre aux fonctions  $f(t)$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ . C'est pour cela qu'on considérera que la fonction  $f(t)$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  (ou sur un sous ensemble de  $\mathbb{R}$ ) mais qui prend ses valeurs dans  $\mathbb{C}$  ( $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ). En physique, les grandeurs physiques  $Q(t)$  mesurables seront toujours réelles, mais il sera quelquefois très pratique de les considérer comme la partie réelle d'un nombre complexe :  $Q(t) = \text{Re}[f(t)]$ .

En mécanique,  $f(t)$  sera souvent une des composantes du vecteur position ( $x(t)$  par exemple) qui dépend du temps  $t$ .  $f(t)$  pourra aussi être une des composantes du vecteur vitesse ( $v_x(t)$  par exemple). En général, le PFD donne trois équations différentielles du second ordre, une pour chaque composante du vecteur position (voir section 3.4, page 28).

On notera souvent les dérivées par rapport au temps par des points au-dessus de la fonction. Le nombre de points indiquant l'ordre de la dérivée. Par exemple :  $\frac{dx(t)}{dt} \equiv \dot{x}(t)$  et  $\frac{d^2x(t)}{dt^2} \equiv \ddot{x}(t)$ .

*Exemples* Voici quelques exemples d'équations différentielles.

1.

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0, \quad (\text{C.2})$$

où  $\omega$  est une constante réelle. On reconnaît l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique où  $x(t)$  représente la position d'une masse ponctuelle attachée à l'extrémité d'un ressort. Dans cette équation, la fonction  $F$  de l'équation (C.1) ne dépend pas explicitement de  $t$ .

2.

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = A \cos(\Omega t), \quad (\text{C.3})$$

**Equation différentielle :** Une équation différentielle est une relation de la forme :

$$F\left(f(t), \frac{df}{dt}, \frac{d^2f}{dt^2}, \dots, \frac{d^n f}{dt^n}, t\right) = 0.$$

$t \in \mathbb{R}$  est la variable indépendante et  $f(t) (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C})$  est la fonction cherchée.  $n$  est l'ordre de l'équation différentielle. L'ensemble des fonctions  $f(t)$  vérifiant l'équation différentielle est appelée *la solution générale de l'équation différentielle*.

où  $\omega$  et  $\Omega$  sont des constantes réelles. Cette équation ressemble à la précédente. L'unique différence est la présence du second membre  $A \cos(\Omega t)$  qui dépend explicitement de  $t$ . Cette fois-ci la fonction  $F$  de l'équation (C.1) dépend explicitement de  $t$ . On dit que l'oscillateur harmonique est forcé sinusoïdalement.

3.

$$\frac{d^2 r(t)}{dt^2} + \frac{k}{r^2(t)} = 0.$$

C'est l'équation d'un corps tombant en ligne droite sur un astre de masse  $M$  où  $k = MG$ , et  $G$  est la constante universelle de gravitation.  $r(t)$  représente la distance du corps à la masse  $M$  sur lequel il tombe.

4.

$$\ddot{\theta}(t) + \omega^2 \sin \theta(t) = 0.$$

C'est l'équation différentielle du pendule simple, où  $\theta$  est l'angle qui repère la position du pendule par rapport à la verticale.

### C.1.2 Equations différentielles linéaires

*Définitions* Une équation différentielle est *linéaire* si pour tout couple de solutions  $f_1(t), f_2(t)$ , la combinaison linéaire  $f(t) = af_1(t) + bf_2(t)$  vérifie aussi l'équation différentielle, ceci pour tout  $a$  et  $b \in \mathbb{C}$ .

Par exemple, parmi les exemples de la section précédente, il n'est pas difficile de vérifier que seules les deux équations Eq. (C.2) et Eq (C.3) sont linéaires. Les autres sont non-linéaires.

Une équation différentielle linéaire peut être mise sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} a_n(t) \frac{d^n f(t)}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} + \dots \\ \dots + a_1(t) \frac{df(t)}{dt} + a_0(t) f(t) = g(t) \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

où les  $n + 1$  coefficients  $a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t)$  et  $g(t)$  sont des fonctions données (elles sont connues, ce sont des paramètres du problème).  $g(t)$  est appelé *le second membre* de l'équation différentielle.  $f(t)$  est la fonction cherchée.

Lorsque dans l'Eq. (C.4), le second membre  $g(t) = 0$ , on dit que l'équation différentielle linéaire est *homogène*.

### C.2 Solution générale des équations différentielles linéaires

Le but de cette section est essentiellement de donner la méthode générale qui permet d'obtenir l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire dans le cas où les coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sont des constantes (ne dépendent pas de la variable indépendante  $t$ ). Néanmoins,

#### Equation différentielle linéaire :

Une équation différentielle linéaire peut être mise sous la forme :

$$\begin{aligned} a_n(t) \frac{d^n f(t)}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} + \dots \\ \dots + a_1(t) \frac{df(t)}{dt} + a_0(t) f(t) = g(t) \end{aligned}$$

$a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t)$  sont les coefficients,  $g(t)$  est le second membre et  $f(t)$  est la fonction inconnue que l'on cherche à déterminer. Lorsque  $g(t) = 0$  l'équation différentielle est dite homogène.

dans un premier temps, nous donnerons quelques propriétés générales importantes des équations différentielles linéaires. Aucune démonstration ne sera faite, celles-ci seront présentées dans votre cours de mathématique.

### C.2.1 Espace des solutions

L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire est infini. En effet, si il existe une solution  $f(t)$  alors pour tout  $a \in \mathbb{C}$ ,  $af(t)$  est aussi une solution. En fait, l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre  $n$  est ce qu'on appelle un espace vectoriel de dimension  $n$ .

Un espace vectoriel est une structure inventée par les mathématiciens qui généralise les propriétés que vous connaissez sur les vecteurs usuels. Un espace vectoriel de dimension 1 est analogue à une droite. C'est l'ensemble des vecteurs  $c\vec{u} (\forall c \in \mathbb{R})$  où  $\vec{u}$  est un vecteur donné. Un espace vectoriel de dimension 2 est analogue à un plan, il peut être engendré par l'ensemble des combinaisons linéaires  $\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2; \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  de deux vecteurs  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  non colinéaires donnés. Le couple  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ , des deux vecteurs indépendants (non colinéaires) est appelé base du plan. Un espace vectoriel de dimension 3 est analogue à l'espace ordinaire engendré par une base formée de 3 vecteurs indépendants (non coplanaires)  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ . En effet, il peut être obtenu comme l'ensemble des combinaisons linéaires  $\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_3\vec{u}_3; \forall c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ .

La notion d'*indépendance linéaire* des vecteurs de la base est claire, pour des espaces vectoriels de dimension 2 (vecteurs non colinéaires) ou de dimension 3 (vecteurs non coplanaires). Pour des espaces vectoriels de plus grande dimension, on dira que  $n$  vecteurs  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$  sont linéairement indépendants si :

$$c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_n\vec{u}_n = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0.$$

C'est à dire que les vecteurs,  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$  sont linéairement indépendants si l'équation  $c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_n\vec{u}_n = \vec{0}$  n'a pas d'autre solution que  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ .

L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre  $n$  étant un espace vectoriel de dimension  $n$ , il suffit de déterminer  $n$  solutions indépendantes,  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ , qui formeront une base de l'ensemble des solutions. L'ensemble des solutions de l'équations différentielle pourra alors s'écrire sous la forme, de l'ensemble des combinaisons linéaires :

$$f(t) = c_1f_1(t) + c_2f_2(t) + \dots + c_nf_n(t); \quad \forall c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}.$$

**Espace vectoriel des solutions :** le nombre des solutions d'une équation différentielle linéaire est infini. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre  $n$  forment un espace vectoriel de dimension  $n$ . C'est à dire que si on connaît  $n$  solutions indépendantes  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ , l'ensemble des solutions s'obtient en formant toutes les combinaisons linéaires :

$$f(t) = c_1f_1(t) + c_2f_2(t) + \dots + c_nf_n(t); \\ \forall c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}.$$



### C.2.2 Solutions d'une équation différentielle non homogène

Pour obtenir l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire non-homogène Eq. (C.4) avec le second membre  $g(t) \neq 0$ , il suffit de déterminer une seule solution de cette équation différentielle  $f_p(t)$ , appelée *solution particulière* de l'équation avec second membre et de l'ajouter à l'ensemble des solutions  $f_h(t)$  de l'équation différentielle où on a imposé  $g(t) = 0$ . Autrement dit,  $f_h(t)$  est la solution générale de l'équation différentielle sans second membre :

$$\begin{aligned} a_n(t) \frac{d^n f_h(t)}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} f_h(t)}{dt^{n-1}} + \dots \\ \dots + a_1(t) \frac{df_h(t)}{dt} + a_0(t) f_h(t) = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

C'est à dire que l'ensemble des solutions  $f(t)$  de l'équation Eq. (C.4) avec le second membre  $g(t) \neq 0$  peut s'écrire  $f(t) = f_p(t) + f_h(t)$ , où  $f_p(t)$  est une solution de l'équation (C.4) et  $f_h(t)$  est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée, Eq. (C.5), appelée aussi équation sans second membre.

En conséquence, pour obtenir la solution générale des équations différentielles linéaires, il faut développer d'une part des méthodes qui permettent d'obtenir *l'ensemble des solutions* des équations différentielles linéaires homogènes (sans second membre,  $g(t) = 0$ ) et d'autre part trouver des stratégies (des astuces) qui permettent d'obtenir *une solution* des équations non-homogènes (avec second membre,  $g(t) \neq 0$ ).

### C.2.3 Solutions d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants

Dans cette section, on présente la méthode générale qui permet d'obtenir l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène :

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n f(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} + \dots \\ \dots + a_1 \frac{df(t)}{dt} + a_0 f(t) = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

où les coefficients sont des constantes complexes (indépendant de  $t$ ) et  $a_n \neq 0$ .

L'ensemble des solutions formant un espace vectoriel de dimension  $n$ , il suffit de déterminer  $n$  solutions indépendantes. Ces  $n$  solutions indépendantes peuvent s'obtenir comme suit.

1. On détermine les racines du polynôme caractéristique  $P(x)$  associé à l'équation différentielle :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

**Equation non-homogène** L'ensemble des solutions  $f(t)$  d'une équation différentielle linéaire non-homogène (second membre  $g(t) \neq 0$ ) peut s'écrire :

$$f(t) = f_p(t) + f_h(t),$$

où  $f_p(t)$  est une solution particulière de l'équation différentielle non-homogène et  $f_h(t)$  représente l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée (celle où l'on a imposé  $g(t) = 0$ ).

Les racines de  $P(x)$  sont les valeurs de  $x$  telles que  $P(x) = 0$ . Or le théorème fondamental de l'algèbre nous permet d'affirmer qu'un polynôme de degré  $n$  possède  $n$  racines complexes. C'est à dire qu'il existe  $n$  valeurs de  $x$  que l'on note  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  tel que  $P(\lambda_i) = 0; i = 1, 2, \dots, n$ .

2. Si les  $n$  racines  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$  sont distinctes alors les  $n$  fonctions

$$f_i(t) = e^{\lambda_i t} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

constituent  $n$  solutions indépendantes de l'équation différentielle linéaire homogène. L'ensemble des solutions  $f(t)$  peut donc se mettre sous la forme des combinaisons linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} f(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \\ &= \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t}; \quad \forall c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

3. Si les  $n$  racines ne sont pas distinctes, alors la méthode précédente ne nous donne pas  $n$  fonctions indépendantes. Supposons que  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{r+1}$ , on dit alors que la racine  $\lambda_1$  est dégénérée  $r$  fois.  $r$  est appelé le degré de dégénérescence de la racine  $\lambda_1$ . Si deux racines sont égales, on dit que la racine est une fois dégénérée, ou qu'il s'agit d'une dégénérescence simple. Si trois racines sont égales la dégénérescence est double.

Pour obtenir  $r$  fonctions indépendantes, il suffit de considérer les  $r$  fonctions suivantes :

$$f_1(t) = e^{\lambda_1 t}, f_2(t) = t e^{\lambda_1 t}, \dots, f_r(t) = t^{r-1} e^{\lambda_1 t};$$

que l'on peut aussi écrire :

$$f_j(t) = t^j e^{\lambda_1 t} \quad (j = 0, 1, \dots, r-1). \quad (\text{C.8})$$

Ceci peut être répété pour chacune des racines du polynôme caractéristique  $P(x)$ . L'ensemble des solutions  $f(t)$  de l'équation différentielle linéaire homogène pourra alors s'écrire :

$$f(t) = \sum_{\lambda_i} e^{\lambda_i t} \sum_{j=0}^{r_i-1} c_{ij} t^j \quad \forall c_{ij} \in \mathbb{C}.$$

où la somme sur  $\lambda_i$  s'effectue uniquement sur les valeurs distinctes des racines du polynôme  $P(x)$  et  $r_i$  est le degré de dégénérescence de la racine  $\lambda_i$ . C'est à dire que dans la combinaison linéaire, le terme  $e^{\lambda_i t}$  sera multiplié par un polynôme d'ordre  $r_i - 1$  si la racine  $\lambda_i$  est dégénérée  $r_i$  fois. On a  $\sum_i r_i = n$ , puisque  $\sum_i r_i$  représente le nombre total de racines (distinctes ou non) du polynôme  $P(x)$ . L'ensemble des solutions est donc bien caractérisé par la combinaison linéaire de  $n$  fonctions indépendantes. Chaque solution est caractérisée par  $n$  constantes  $c_{ij}$ .

**Solution générale d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constant :** L'ensemble des solutions s'obtient en effectuant la combinaison linéaire de  $n$  solutions indépendantes  $f_{ij}(t)$  où  $n$  est l'ordre de l'équation différentielle :

$$f_{ij}(t) = t^j e^{\lambda_i t}$$

où les  $\lambda_j$  sont les racines distinctes du polynôme caractéristique associé et  $j = 0, 1, \dots, r_i - 1$  où  $r_i$  est le degré de dégénérescence de la racine  $\lambda_i$ .

### C.3 Exemples d'équations différentielles linéaires à coefficients constants et homogènes

Dans cette section, nous expliciterons les solutions générales des équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants, du premier et de deuxième ordre.

#### C.3.1 Equations linéaires homogène à coefficients constants du premier ordre

Soit l'équation différentielle :

$$a_1 \frac{df(t)}{dt} + a_0 f(t) = 0,$$

où  $a_1 \neq 0$  et  $a_0$  sont deux coefficients constants (indépendant de  $t$ ) complexes.

L'équation caractéristique  $P(x) = 0$  associée est :

$$a_1 x + a_0 = 0 \Rightarrow x = -\frac{a_0}{a_1}$$

puisque  $a_1 \neq 0$  (si  $a_1 = 0$  l'équation différentielle n'est plus du premier ordre). L'ensemble des solutions peut donc s'écrire de la façon suivante :

$$f(t) = c \exp\left(-\frac{a_0}{a_1} t\right); \quad \forall c \in \mathbb{C}. \quad (\text{C.9})$$

Une autre façon de retrouver ce résultat directement est d'écrire l'équation différentielle sous la forme suivante :

$$\frac{\frac{df(t)}{dt}}{f(t)} = -\frac{a_0}{a_1} \quad (\text{C.10})$$

On reconnaît à gauche la dérivée de  $\ln(f(t))$ , donc en prenant une primitive (à une constante  $K$  près) de chaque côté de l'égalité, on obtient :

$$\ln(f(t)) = -\frac{a_0}{a_1} t + K \quad (\text{C.11})$$

où  $K$  est un nombre complexe quelconque. En effet, la dérivée de l'Eq. (C.11) donne bien l'Eq. (C.10) pour tout  $K \in \mathbb{C}$ . En prenant l'exponentielle de l'Eq. (C.11) et en posant  $c = e^K$ , on obtient bien la solution générale donnée par l'Eq. (C.9).

#### C.3.2 Equations linéaires homogène à coefficients constants du second ordre

On considère l'équation différentielle suivante :

$$a_2 \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + a_1 \frac{df(t)}{dt} + a_0 f(t) = 0.$$

**Ordre 1 :** La solution générale  $f(t)$  de l'équation différentielle suivante :

$$a_1 \frac{df(t)}{dt} + a_0 f(t) = 0; \quad (a_1 \neq 0, a_0 \in \mathbb{C})$$

est :

$$f(t) = c \exp\left(-\frac{a_0}{a_1} t\right); \quad \forall c \in \mathbb{C}.$$

Le polynôme caractéristique associé  $P(x)$  est du second ordre :

$$P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

ses deux racines sont les solutions de l'équation du second degré :

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Soit  $\Delta = a_1^2 - 4a_0a_2$  le discriminant associé, les deux racines sont :

$$\lambda_1 = \frac{1}{2a_2} \left( -a_1 + \sqrt{\Delta} \right), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2a_2} \left( -a_1 - \sqrt{\Delta} \right), \quad (\text{C.12})$$

où  $\sqrt{\Delta}$  est pris au sens complexe. En effet, en général,  $\Delta$  est un nombre complexe  $\Delta = \rho e^{i\phi}$  où  $\rho = |\Delta| \geq 0$  est le module de  $\Delta$  et  $\phi = \arg(\Delta)$  est l'argument de  $\Delta$ . Les deux racines de  $\Delta$  sont donnée par

$$\pm\sqrt{\Delta} = \pm\sqrt{\rho e^{i\phi}} = \pm\sqrt{\rho} e^{i\frac{\phi}{2}}.$$

Deux cas sont à considérer :  $\Delta \neq 0$  où les racines sont distinctes  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  et le cas  $\Delta = 0$  où les deux racines sont égales  $\lambda_1 = \lambda_2$  (dégénérescence simple).

1.  $\Delta \neq 0$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  : L'ensemble des solutions  $f(t)$  de l'équation différentielle est donnée par la combinaison linéaire des deux solutions indépendantes (voir Eq. (C.7))  $f_1(t) = e^{\lambda_1 t}$  et  $f_2(t) = e^{\lambda_2 t}$  :

$$\begin{aligned} f(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}; \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{C} \\ &= \exp\left(-\frac{a_1}{2a_2} t\right) \times \left[ c_1 \exp\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a_2} t\right) + c_2 \exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a_2} t\right) \right]. \end{aligned}$$

2.  $\Delta = 0$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a_1}{a_2}$  : Les deux racines sont égales (on dit aussi dégénérées), l'ensemble des solutions  $f(t)$  de l'équation différentielle est donné par (voir Eq. (C.8)) :

$$f(t) = [c_1 t + c_2] \exp\left(-\frac{a_1}{a_2} t\right); \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Dans les deux cas, il y a toujours une infinité de solutions, une solution pour chaque valeur des deux constantes  $c_1$  et  $c_2$ . Pour un problème physique donné, il faudra choisir parmi toutes ces solutions, celle qui correspond à la situation physique envisagée. Le plus souvent, cela consiste, à déterminer les constantes  $c_1$  et  $c_2$  de telle sorte que la solution choisie soit en accord avec les conditions initiales (position et vitesse à un instant donné) du problème physique.

*Cas où les coefficients  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  sont réels.* Lorsque l'équation différentielle représente l'évolution d'un système physique, les coefficients

**Ordre 2** : Soit l'équation différentielle suivante :

$$a_2 \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + a_1 \frac{df(t)}{dt} + a_0 f(t) = 0,$$

où  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  sont des coefficients constants (indépendants de  $t$ ) complexes. Le discriminant de l'équation caractéristique associée  $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$  est  $\Delta = a_1^2 - 4a_2a_0$ .

1. Si  $\Delta \neq 0$ , les deux racines sont distinctes :  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2a_2} \left( -a_1 \pm \sqrt{\Delta} \right)$ , la solution générale  $f(t)$  de l'équation différentielle est donc :

$$\begin{aligned} f(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}; \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{C} \\ &= \exp\left(-\frac{a_1}{2a_2} t\right) \times \\ &\quad \left[ c_1 \exp\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a_2} t\right) + c_2 \exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a_2} t\right) \right]. \end{aligned}$$

2. Si  $\Delta = 0$ , les deux racines sont dégénérées,  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a_1}{a_2}$ , la solution générale de l'équation différentielle est donc :

$$f(t) = [c_1 t + c_2] \exp\left(-\frac{a_1}{a_2} t\right); \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

$a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  de l'équation différentielle représentent souvent des paramètres physiques du système étudié et sont donc réels. Dans ce cas, on peut écrire les solutions de façon plus explicite et obtenir leur comportement qualitatif.  $\Delta$  est réel, mais sa racine  $\sqrt{\Delta}$  sera réelle si  $\Delta > 0$  et imaginaire si  $\Delta < 0$ . En effet, si  $\Delta < 0$  alors  $\pm\sqrt{\Delta} = \pm i\sqrt{|\Delta|}$ . Le cas  $\Delta \neq 0$  est alors avantageusement séparé en deux sous cas :  $\Delta > 0$  où les deux racines  $\lambda_{1,2}$  sont réelles et le cas  $\Delta < 0$  où les deux racines sont complexes conjuguées l'une de l'autre,  $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ .

1.  $\Delta > 0 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} \in \mathbb{R}^+$  :

$$f(t) = \exp\left(-\frac{a_1}{2a_2}t\right) \times \left[ c_1 \exp\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a_2}t\right) + c_2 \exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a_2}t\right) \right]; \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

$f(t)$  est donc la combinaison linéaire de deux exponentielles, l'une croissante et l'autre décroissante lorsque  $t$  augmente.

2.  $\Delta < 0 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = \pm i\sqrt{|\Delta|}$  :

$$\begin{aligned} f(t) &= \exp\left(-\frac{a_1}{2a_2}t\right) \times \left[ c_1 \exp\left(\frac{i\sqrt{|\Delta|}}{2a_2}t\right) + c_2 \exp\left(-\frac{i\sqrt{|\Delta|}}{2a_2}t\right) \right]; \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{C} \\ &= \exp\left(-\frac{a_1}{2a_2}t\right) \times \left[ \{c_1 + c_2\} \cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a_2}t\right) + i\{c_1 - c_2\} \sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a_2}t\right) \right]. \end{aligned}$$

$f(t)$  est à valeur complexe, les parties réelle et imaginaire sont constituées chacune d'une exponentielle (croissante ou décroissante suivant le signe de  $\frac{a_1}{a_2}$  multipliée par une fonction sinusoïdale. Si  $t$  représente un temps, alors  $\omega \equiv \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a_2}$  est une pulsation (rad/s), et  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$  est une fréquence (s<sup>-1</sup>).  $T \equiv \frac{1}{\nu}$  est la période de la partie sinusoïdale, et est appelée le pseudo-période de  $f(t)$ .

3.  $\Delta = 0$  :

$$f(t) = [c_1 t + c_2] \exp\left(-\frac{a_1}{a_2}t\right); \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Le comportement des parties réelle et imaginaire de  $f(t)$  est celui d'une exponentielle, croissante ou décroissante suivant le signe de  $\frac{a_1}{a_2}$ , multipliée par une fonction affine.

#### C.4 Exemples d'équations différentielles linéaires à coefficients constants et non-homogènes

Nous expliciterons ici l'ensemble des solutions des équations différentielle linéaires non-homogène à coefficients constants, du premier ordre et du second ordre dans le cas où le second membre est soit une constante soit une fonction sinusoïdale.

Pour obtenir l'ensemble des solutions d'une équation linéaire non-homogène, il suffit de déterminer une solution particulière  $f_p(t)$  que l'on ajoutera aux solutions  $f_h(t)$  de l'équation homogène associée.

### C.4.1 Cas où le second membre est une constante

Dans le cas où le second membre est une constante, il est très simple de déterminer une solution particulière. En effet, il suffit de chercher une solution elle-même constante (indépendant de  $t$ ). Prenons comme exemple l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$a_1 \frac{df(t)}{dt} + a_0 f(t) = K,$$

où  $K$  est une constante. Cherchons une solution particulière  $f_p(t)$  constante :

$$f_p(t) = C.$$

Cela entraîne que  $\frac{df_p(t)}{dt} = 0$ . Donc  $f_p(t) = C$  est une solution si

$$a_0 C = K \Leftrightarrow C = \frac{K}{a_0}$$

Si  $a_0 \neq 0$ , une solution particulière est donc la fonction constante :

$$f_p = \frac{K}{a_0}; \quad a_0 \neq 0.$$

L'ensemble des solutions est donc la somme de  $f_p = \frac{K}{a_0}$  avec toutes les solutions  $f_h(t)$  de l'équation homogène associée, c'est à dire l'équation différentielle où le second membre est nul :

$$a_1 \frac{df_h(t)}{dt} + a_0 f_h(t) = 0.$$

Solutions que nous avons déterminées dans la section précédentes (voir Eq. (C.9), page 107). Donc l'ensemble des solutions de l'équation inhomogène est :

$$f(t) = f_p + f_h(t) = \frac{K}{a_0} + c \exp\left(-\frac{a_0}{a_1} t\right); \quad \forall c \in \mathbb{C}. \quad (\text{C.13})$$

Exactement le même raisonnement peut être appliqué au cas de l'équation différentielle du second ordre (ou même d'un ordre  $n$  quelconque).

Dans le cas où le second membre est une constante, nous aurions pu obtenir le même résultat, plus directement, en effectuant le changement de fonction  $g(t) \equiv f(t) - \frac{K}{a_0}$ . En effet, on voit immédiatement que  $g(t)$  est solution de l'équation homogène :

$$a_1 \frac{dg(t)}{dt} + a_0 g(t) = 0.$$

donc

$$g(t) = c \exp\left(-\frac{a_0}{a_1} t\right); \quad \forall c \in \mathbb{C}.$$

et comme  $f(t) = \frac{K}{a_0} + g(t)$ , on obtient bien le résultat précédent donné par l'Eq. (C.13).

**Solution particulière – second membre constant :** les deux équations différentielles suivante :

$$a_1 \frac{df(t)}{dt} + a_0 f(t) = K$$

$$a_2 \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + a_1 \frac{df(t)}{dt} + a_0 f(t) = K$$

où  $a_0 \neq 0$  possède la solution  $f_p$  constante suivante :

$$f_p = \frac{K}{a_0}; \quad a_0 \neq 0.$$

### C.4.2 Cas où le second membre est une fonction sinusoidale

*Equation du premier ordre* Soit l'équation différentielle suivante :

$$a_1 \frac{df(t)}{dt} + a_0 f(t) = Ke^{i\Omega t},$$

où  $\Omega \in \mathbb{R}$ . Il existe une solution  $f_p(t)$  de cette équation de la forme  $f_p(t) = Ae^{i\Omega t}$ . En effet, en insérant cette fonction et sa dérivée  $\frac{df_p(t)}{dt} = i\Omega Ae^{i\Omega t}$  dans l'équation différentielle, on obtient :

$$(i\Omega a_1 + a_0) Ae^{i\Omega t} = Ke^{i\Omega t} \Leftrightarrow (i\Omega a_1 + a_0) A = K.$$

Si  $\Omega \neq i\frac{a_0}{a_1}$ , ce qui est en général le cas en physique, où  $a_0$ ,  $a_1$  et  $\Omega$  sont des nombres réels, alors  $A = \frac{K}{a_0 + i\Omega a_1}$ . La solution particulière  $f_p(t)$  est donc :

$$f_p(t) = \frac{K}{a_0 + i\Omega a_1} e^{i\Omega t}.$$

La solution générale  $f(t)$  de l'équation différentielle s'obtient en ajoutant à  $f_p(t)$  l'ensemble des solutions  $f_h(t) = c \exp\left(-\frac{a_0}{a_1}t\right)$  de l'équation homogène associée :

$$a_1 \frac{df_h(t)}{dt} + a_0 f_h(t) = 0,$$

dont les solutions ont été déterminées plus haut (voir Eq. (C.9), page 107). On obtient donc :

$$f(t) = f_p(t) + f_h(t) = \frac{K}{a_0 + i\Omega a_1} e^{i\Omega t} + c \exp\left(-\frac{a_0}{a_1}t\right); \forall c \in \mathbb{C}.$$

Nous étudierons plus en détail le comportement de ce type de solution, dans le chapitre dédié aux oscillations, où la variable indépendante  $t$  représente le temps. Brièvement, considérons le cas où les coefficients  $a_0$  et  $a_1$  sont réels et  $\frac{a_0}{a_1} > 0$ , alors, on remarque que lorsque  $t \gg \frac{a_1}{a_0}$ ,  $f_h(t)$  devient négligeable par rapport  $f_p(t)$ . C'est pour cette raison que  $f_h(t)$  est appelée *régime transitoire*, elle n'est significative que pendant un temps  $t$  court par rapport à  $\frac{a_1}{a_0}$ .  $f_p(t)$  est appelée le *régime permanent*, c'est la solution qui subsiste pour des temps  $t$  long devant  $\frac{a_1}{a_0}$ .

*Equation du deuxième ordre* On considère l'équation différentielle suivante :

$$a_2 \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + a_1 \frac{df(t)}{dt} + a_0 f(t) = Ke^{i\Omega t}, \quad (\text{C.14})$$

Où  $\Omega \in \mathbb{R}$ . On procède comme précédemment, en cherchant une solution de la forme :  $f_p(t) = Ae^{i\Omega t}$ . Pour déterminer  $A$ , on insère  $f_p(t)$  ainsi que ses dérivées,  $\frac{df_p(t)}{dt} = i\Omega Ae^{i\Omega t}$  et  $\frac{d^2 f_p(t)}{dt^2} = -\Omega^2 Ae^{i\Omega t}$ , dans l'équation différentielle. on obtient l'équation suivante :

$$\left(-\Omega^2 a_2 + i\Omega a_1 + a_0\right) Ae^{i\Omega t} = Ke^{i\Omega t} \Leftrightarrow \left(-\Omega^2 a_2 + i\Omega a_1 + a_0\right) A = K.$$

**Solution particulière – second membre sinusoidal** l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$a_1 \frac{df(t)}{dt} + a_0 f(t) = Ke^{i\Omega t};$$

admet la solution particulière  $f_p(t)$  suivante :

$$f_p(t) = \frac{K}{a_0 + i\Omega a_1} e^{i\Omega t}.$$

L'équation différentielle du second ordre suivante :

$$a_2 \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + a_1 \frac{df(t)}{dt} + a_0 f(t) = Ke^{i\Omega t},$$

admet la solution particulière  $f_p(t)$  suivante :

$$f_p(t) = \frac{Ke^{i\Omega t}}{a_0 - \Omega^2 a_2 + i\Omega a_1}.$$

Dans le cas où les coefficients  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  sont réels, on obtient  $A$  :

$$A = \frac{K}{a_0 - \Omega^2 a_2 + i\Omega a_1}.$$

On a donc obtenu une solution particulière de l'équation différentielle :

$$f_p(t) = \frac{Ke^{i\Omega t}}{a_0 - \Omega^2 a_2 + i\Omega a_1}.$$

On obtient l'ensemble des solutions de l'équation différentielle Eq. (C.14), en ajoutant à  $f_p(t)$ , l'ensemble des solutions  $f_h(t)$  de l'équation sans second membre obtenu précédemment (voir section C.3.2, page 107).

Le comportement qualitatif des solutions pour différentes valeurs des coefficients  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  et de la pulsation  $\Omega$  est discuté dans le chapitre oscillations, en prenant comme exemple des systèmes mécaniques.

*Remarque* Lorsqu'on cherche une solution particulière de l'équation avec second membre du type :

$$a_1 \frac{df(t)}{dt} + a_0 f(t) = K \cos(\Omega t + \phi), \quad (\text{C.15})$$

Il suffit de considérer les solutions particulières respectives  $f_p^+(t)$  et  $f_p^-(t)$ , des deux équations différentielles suivantes :

$$a_1 \frac{df_p^+(t)}{dt} + a_0 f_p^+(t) = Ke^{i(\Omega t + \phi)} \quad (\text{C.16})$$

$$a_1 \frac{df_p^-(t)}{dt} + a_0 f_p^-(t) = Ke^{-i(\Omega t + \phi)}. \quad (\text{C.17})$$

En effectuant la demi-somme des deux équations  $\frac{1}{2}$  (Eq. (C.16) + Eq. (C.17)), on obtient :

$$\begin{aligned} a_1 \frac{d}{dt} \left[ \frac{f_p^+(t) + f_p^-(t)}{2} \right] + a_0 \left[ \frac{f_p^+(t) + f_p^-(t)}{2} \right] &= K \frac{e^{i(\Omega t + \phi)} + e^{-i(\Omega t + \phi)}}{2} \\ &= K \cos(\Omega t + \phi). \end{aligned}$$

On en déduit que la demi-somme des solutions  $f_p(t) = \frac{f_p^+(t) + f_p^-(t)}{2}$  est une solution particulière de l'Eq. (C.15). On obtient donc :

$$\begin{aligned} f_p(t) &= \frac{1}{2} (f_p^+(t) + f_p^-(t)) \\ &= \frac{1}{2} \frac{Ke^{i(\Omega t + \phi)}}{a_0 - \Omega^2 a_2 + i\Omega a_1} + \frac{1}{2} \frac{Ke^{-i(\Omega t + \phi)}}{a_0 - \Omega^2 a_2 - i\Omega a_1}. \end{aligned}$$

Si le second membre est une fonction  $K \sin(\Omega t + \phi)$  au lieu de  $K \cos(\Omega t + \phi)$ , on obtiendra une solution particulière en prenant  $f_p(t) = \frac{f_p^+(t) - f_p^-(t)}{2i}$ . Avec le même raisonnement, on obtient une solution particulière de l'équation avec un second membre qui est une combinaison linéaire quelconque de fonction  $\sin(\Omega t)$  et  $\cos(\Omega t)$ .

Le même raisonnement peut être appliqué à l'équation différentielle du second ordre.



*D*

*Signaux sinusoidaux – Signaux analytiques*

## D.1 Rappels – Nombres complexes

### D.1.1 Définitions

*Forme algébrique* : On note  $i$  l'une de deux racines de  $-1$  :

$$i^2 = -1.$$

Un nombre complexe  $z$  peut s'écrire sous sa *forme algébrique* :

$$z = x + iy,$$

où  $x$  et  $y$  sont réels.  $x$  est la partie réel de  $z$  et  $y$  sa partie imaginaire. On note  $x = \operatorname{Re}[z]$  et  $y = \operatorname{Im}[z]$ .

*Forme polaire* : On peu aussi écrire un nombre complexe  $z$  de la façon suivante :

$$z = \rho e^{i\theta},$$

où  $\rho \in \mathbb{R}^+$  est appelé le module de  $z$ , et  $\theta \in \mathbb{R}$  est appelé l'argument de  $z$ . On note  $\rho = |z|$  et  $\theta = \arg[z]$ .

Les relations entre la forme algébrique et la forme polaires sont les suivantes :

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \rho; \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

et

$$x = \rho \cos \theta; \quad y = \rho \sin \theta$$

*Représentation géométrique* On peut associer à  $z = x + iy$  le plan  $\mathbb{R}^2$  des couples  $(x, y)$ . On peut aussi associer au couple  $(x, y)$  le point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  dans un repère cartésien d'origine  $O$ . Autrement dit, au nombre  $z$  est associé le vecteur  $\overrightarrow{OM}$ , de composantes  $x = \operatorname{Re}[z]$ ,  $y = \operatorname{Im}[z]$ , dans une base orthonormée. Le point  $M$  est appelé *affiche* de  $z$ .  $|z|$  est alors égal à la norme du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  et  $\theta$  est l'angle que fait le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  avec l'axe  $Ox$ .

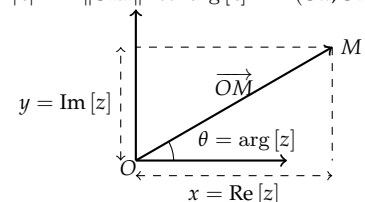
### D.1.2 Propriétés

*Addition* soit  $z_1 = x_1 + iy_1$  et  $z_2 = x_2 + iy_2$  alors  $z = z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$ . C'est à dire que

$$\operatorname{Re}[z_1 + z_2] = \operatorname{Re}[z_1] + \operatorname{Re}[z_2]; \quad \operatorname{Im}[z_1 + z_2] = \operatorname{Im}[z_1] + \operatorname{Im}[z_2]$$

Soit  $M_1$  l'affixe de  $z_1$  et  $M_2$  l'affixe de  $z_2$  alors l'affixe  $M$  de  $z = z_1 + z_2$  s'obtient en effectuant la somme vectoriel :  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2$ .

Au nombre  $z = x + iy$ , on associe le point  $M$ , de composante  $(x, y)$ .  
 $|z| = \|\overrightarrow{OM}\|$  et  $\arg[z] = (\widehat{Ox, \overrightarrow{OM}})$ .



*Multiplication* Soit  $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$  et  $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ , alors  $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ .  
C'est à dire que :

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|; \quad \arg [z_1 z_2] = \arg [z_1] + \arg [z_2] + 2\ell\pi; \ell \in \mathbf{Z}.$$

On en déduit qu'à la multiplication de  $z$  par un nombre complexe  $e^{i\theta}$  de module 1, est associé la rotation de l'affixe  $\overrightarrow{OM}$  d'un angle  $\theta$ .

*Conjugaison* On note  $\bar{z} = x - iy$  le conjugué de  $z = x + iy$ . L'affixe de  $\bar{z}$  est la symétrique par rapport à l'axe  $Ox$  de l'affixe de  $z$ . En forme polaire, la conjugaison s'écrit :

$$\overline{\rho e^{i\theta}} = \rho e^{-i\theta}.$$

On a les propriétés suivantes :

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2; \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2; \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}.$$

Aussi :

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} [z]; \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} [z]; \quad z \bar{z} = |z|^2 \quad \forall z \in \mathbf{C}.$$

*Inversion* La dernière égalité permet d'écrire :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \Leftrightarrow \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

## D.2 Signal sinusoïdal et signal analytique associé

### D.2.1 Définition

En physique on s'intéresse souvent à la réponse d'un système, mécanique ou électrique, à une excitation réelle sinusoïdale de la forme  $S(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ .  $A$ ,  $\omega$  et  $\phi$  (et donc aussi  $S(t)$ ) sont des nombres réels.  $A$  est appelée l'amplitude du signal,  $\omega$  sa pulsation et  $\phi$  sa phase. Il est souvent avantageux de considérer que  $S(t)$  est la partie réelle d'un signal complexe  $\mathcal{A} e^{i\omega t}$ , aussi appelé *signal analytique* :  $S(t) = \operatorname{Re} [\mathcal{A} e^{i\omega t}]$ , où  $\mathcal{A} \in \mathbf{C}$  est appelée amplitude complexe du signal. L'amplitude complexe  $\mathcal{A}$  encapsule à la fois l'amplitude réelle  $A$  et la phase  $\phi$  de  $S(t)$ . En effet, si on écrit l'amplitude complexe sous sa forme polaire  $\mathcal{A} = |\mathcal{A}| e^{i \arg[\mathcal{A}]}$  :

$$S(t) = \operatorname{Re} [\mathcal{A} e^{i\omega t}] = \operatorname{Re} [|\mathcal{A}| e^{i \arg[\mathcal{A}]} e^{i\omega t}] = |\mathcal{A}| \cos(\omega t + \arg[\mathcal{A}]).$$

On en déduit que le module de l'amplitude complexe donne l'amplitude  $A$  du signal physique  $S(t)$  et l'argument de l'amplitude réelle donne la phase  $\phi$  (à  $2\pi$  près) du signal physique.

**Signal analytique**  $\mathcal{A} e^{i\omega t}$  associé à un signal réel sinusoïdal  $S(t) = A \cos(\omega t + \phi)$  :

$$S(t) = A \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re} [\mathcal{A} e^{i\omega t}]$$

$A$  : amplitude réelle,  $\phi$  : phase.  $\mathcal{A}$  : amplitude complexe.  $|\mathcal{A}| = A$  et  $\arg[\mathcal{A}] = \phi$ .

### D.2.2 Propriétés

*Linéarité* Effectuons une combinaison linéaire  $S(t) = aS_1(t) + bS_2(t)$  de deux signaux sinusoïdaux  $S_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$  et  $S_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$  de même pulsation  $\omega$  et avec  $a$  et  $b$  réels. L'amplitude complexe  $\mathcal{A}$  associée au signal  $S(t)$  est la combinaison linéaire des amplitudes complexes  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  associées aux signaux  $S_1(t)$  et  $S_2(t)$ , respectivement :  $\mathcal{A} = a\mathcal{A}_1 + b\mathcal{A}_2$ . En effet,

$$S(t) = a \operatorname{Re} [\mathcal{A}_1 e^{i\omega t}] + b \operatorname{Re} [\mathcal{A}_2 e^{i\omega t}] = \operatorname{Re} [(a\mathcal{A}_1 + b\mathcal{A}_2) e^{i\omega t}].$$

Ceci fonctionne car les coefficients  $a$  et  $b$  sont réels et les deux signaux  $S_1(t)$  et  $S_2(t)$  possède la même pulsation  $\omega$ .

On en déduit que tant que l'on fait des combinaisons linéaires de signaux de même pulsations avec des coefficients réels, il suffit de prendre les combinaisons linéaires des amplitudes complexes. Puis de prendre la partie réelle pour obtenir à la fin le signal physique.

*Dérivation* Un des avantages du signal complexe  $\mathcal{A}e^{i\omega t}$  est que ses dérivées successives se calculent très simplement :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{A}e^{i\omega t} = i\omega \mathcal{A}e^{i\omega t}; \quad \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{A}e^{i\omega t} = -\omega^2 \mathcal{A}e^{i\omega t}; \quad \frac{d^n}{dt^n} \mathcal{A}e^{i\omega t} = (i\omega)^n \mathcal{A}e^{i\omega t}.$$

La dérivée est équivalente à une simple multiplication par  $i\omega$ . Comme la dérivée est une opération linéaire on aura :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \operatorname{Re} [\mathcal{A}e^{i\omega t}] = \operatorname{Re} \left[ \frac{d}{dt} \mathcal{A}e^{i\omega t} \right] = \operatorname{Re} [i\omega \mathcal{A}e^{i\omega t}].$$

On vérifiera que cela redonne bien :  $\frac{dS}{dt} = -\omega \sin(\omega t + \phi)$ .

### D.2.3 Application aux équations différentielles linéaires

Cette dernière propriété est mis à profit lorsqu'on cherche une solution particulière d'une équation différentielle (voir Annexe C, page 101) linéaire à coefficients réels avec second membre réel. Si on cherche une solution de la forme  $f(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ , il est souvent plus simple de déterminer une solution complexe de la forme  $\mathcal{F}(t) = \mathcal{A}e^{i\omega t}$ . On obtiendra ensuite la solution réelle  $f(t)$  en prenant la partie réelle de la solution complexe :  $f(t) = \operatorname{Re} [\mathcal{F}(t)]$ . En effet, comme les coefficients et le second membre sont réels, si  $\mathcal{F}(t)$  est une solution de l'équation différentielle alors le conjugué  $\overline{\mathcal{F}(t)}$  est aussi une solution. De plus, comme l'équation différentielle est linéaire,  $\frac{1}{2} [\mathcal{F}(t) + \overline{\mathcal{F}(t)}]$  est aussi une solution. Or :

$$\frac{1}{2} [\mathcal{F}(t) + \overline{\mathcal{F}(t)}] = \operatorname{Re} [\mathcal{F}(t)] = |\mathcal{A}| \cos(\omega t + \arg[\mathcal{A}]).$$

On en déduit que si on a déterminé la valeur de l'amplitude complexe  $\mathcal{A}$  tel que  $\mathcal{A}e^{i\omega t}$  soit une solution de l'équation différentielle alors  $f(t) = A \cos(\omega t + \phi)$  sera aussi une solution avec  $A = |\mathcal{A}|$  et  $\phi = \arg[\mathcal{A}]$ .

On utilise aussi cette propriété pour déterminer une solution particulière d'une équation différentielle non-homogène, avec un second membre sinusoidal (voir section C.4.2, page 111 et en particulier la remarque page 112). Prenons par exemple le cas d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants (le raisonnement qui suit peut s'appliquer pour un ordre quelconque) :

$$a_2 \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + a_1 \frac{df(t)}{dt} + a_0 f(t) = K \cos(\omega t + \phi). \quad (\text{D.1})$$

où  $K \in \mathbb{R}$ . Il suffit de chercher une solution  $\mathcal{F}^+(t)$  de l'équation différentielle :

$$a_2 \frac{d^2 \mathcal{F}^+(t)}{dt^2} + a_1 \frac{d\mathcal{F}^+(t)}{dt} + a_0 \mathcal{F}^+(t) = \mathcal{K} e^{i\omega t}, \quad (\text{D.2})$$

et une solution  $\mathcal{F}^-(t)$  de l'équation différentielle :

$$a_2 \frac{d^2 \mathcal{F}^-(t)}{dt^2} + a_1 \frac{d\mathcal{F}^-(t)}{dt} + a_0 \mathcal{F}^-(t) = \bar{\mathcal{K}} e^{-i\omega t}, \quad (\text{D.3})$$

avec  $\mathcal{K} = K e^{i\phi}$ . En effectuant la demi-somme des deux équations Eq. D.2 et Eq. D.3, on obtient :

$$\begin{aligned} a_2 \frac{d^2}{dt^2} \frac{\mathcal{F}^+(t) + \mathcal{F}^-(t)}{2} + a_1 \frac{d}{dt} \frac{\mathcal{F}^+(t) + \mathcal{F}^-(t)}{2} + a_0 \frac{\mathcal{F}^+(t) + \mathcal{F}^-(t)}{2} \\ = \frac{\mathcal{K} e^{i\omega t} + \bar{\mathcal{K}} e^{-i\omega t}}{2} \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Or,

$$\frac{\mathcal{K} e^{i\omega t} + \bar{\mathcal{K}} e^{-i\omega t}}{2} = \text{Re} \left[ \mathcal{K} e^{i\omega t} \right] = K \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{D.5})$$

puisque  $K = |\mathcal{K}|$  et  $\phi = \arg[\mathcal{K}]$ . On en déduit donc, que si  $\mathcal{F}^+(t)$  et  $\mathcal{F}^-(t)$  sont des solutions des équations Eq. (D.2) et Eq. (D.3) respectivement, alors  $f(t) = \frac{\mathcal{F}^+(t) + \mathcal{F}^-(t)}{2}$  est une solution de l'équation Eq. D.1.

De plus, si les coefficients  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  sont réels (ce qui sera pratiquement toujours le cas ici), alors l'équation Eq. (D.3) s'obtient en prenant le complexe conjugué de l'équation Eq. (D.2). On en déduit que  $\mathcal{F}^-(t) = \overline{\mathcal{F}^+(t)}$ . En conséquence,

$$f(t) = \frac{\mathcal{F}^+(t) + \mathcal{F}^-(t)}{2} = \frac{\mathcal{F}^+(t) + \overline{\mathcal{F}^+(t)}}{2} = \text{Re} [\mathcal{F}^+(t)].$$

On en déduit qu'il suffit de trouver une solution de l'équation Eq. (D.2), puis d'en prendre la partie réelle pour obtenir une solution de l'équation Eq. D.1.

Pour obtenir une solution de l' Eq. (D.2), il suffit de chercher une solution de la forme :

$$\mathcal{F}^+(t) = \mathcal{A} e^{i\omega t}.$$

En insérant cette expression dans Eq. (D.2) et en utilisant la propriété de dérivation (voir sec D.2.2), on obtient :

$$\left[ a_0 + a_1 i \omega + a_2 (i \omega)^2 \right] \mathcal{A} e^{i \omega t} = \mathcal{K} e^{i \omega t},$$

ce qui permet de déterminer l'amplitude complexe  $\mathcal{A}$  :

$$\mathcal{A} = \frac{\mathcal{K}}{a_0 + a_1 i \omega + a_2 (i \omega)^2} = \frac{\mathcal{K}}{a_0 - \omega^2 a_2 + i a_1 \omega}.$$

On a donc trouvé une solution  $\mathcal{F}^+(t)$  de l'équation Eq. (D.2) :

$$\mathcal{F}^+(t) = \frac{\mathcal{K} e^{i \omega t}}{a_0 - \omega^2 a_2 + i a_1 \omega} = \frac{\mathcal{K} e^{i(\omega t + \phi)}}{a_0 - \omega^2 a_2 + i a_1 \omega}.$$

On obtiendra donc une solution  $f(t)$  de l'équation originale Eq. D.1 en prenant la partie réelle de  $\mathcal{F}^+(t)$  :

$$f(t) = \operatorname{Re} \left[ \frac{\mathcal{K} e^{i(\omega t + \phi)}}{a_0 - \omega^2 a_2 + i a_1 \omega} \right]$$

Pour obtenir la partie réelle de  $\mathcal{F}^+(t) = \frac{\mathcal{K} e^{i(\omega t + \phi)}}{a_0 - \omega^2 a_2 + i a_1 \omega}$  on procède de la façon suivante : On utilise la relation  $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$  avec  $z = a_0 - \omega^2 a_2 + i a_1 \omega$ , on obtient :

$$\frac{\mathcal{K} e^{i(\omega t + \phi)}}{a_0 - \omega^2 a_2 + i a_1 \omega} = \frac{\mathcal{K}}{(a_0 - \omega^2 a_2)^2 + (a_1 \omega)^2} \left[ a_0 - \omega^2 a_2 - i a_1 \omega \right] e^{i(\omega t + \phi)},$$

puis en décomposant  $e^{i(\omega t + \phi)} = \cos(\omega t + \phi) + i \sin(\omega t + \phi)$ , on obtient :

$$f(t) = \operatorname{Re} \left[ \frac{\mathcal{K} e^{i(\omega t + \phi)}}{a_0 - \omega^2 a_2 + i a_1 \omega} \right] = \frac{\mathcal{K}}{(a_0 - \omega^2 a_2)^2 + (a_1 \omega)^2} \left[ (a_0 - \omega^2 a_2) \cos(\omega t + \phi) + a_1 \omega \sin(\omega t + \phi) \right].$$

*E*

*Dérivée d'une fonction*

### E.1 Définitions

Une fonction  $f$  est dite dérivable en un point  $x_0$  si la limite suivante existe :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Cette limite est appelée la dérivée de la fonction  $f$  au point  $x_0$  et est notée  $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0}$ .

La fonction  $f$  est dite dérivable sur un intervalle (ouvert)  $I$  de  $\mathbb{R}$  si elle est dérivable en chaque point de l'intervalle. On peut alors définir la fonction  $f'(x)$ , dont la valeur en chaque point  $x \in I$  est égale à la dérivée de  $f$ .  $f'(x) = \left. \frac{df}{dx} \right|_x ; \forall x \in I$ .

### E.2 Signification géométrique de la dérivée

La dérivée de  $f$  au point  $x_0$  est la pente de la droite tangente à la courbe  $y = f(x)$ , au point  $(x_0, f(x_0))$ .

L'équation de la droite  $D$  tangente à la courbe  $y = f(x)$ , au point  $(x_0, f(x_0))$  est donc :

$$y = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + f(x_0).$$

C'est à dire que les points de coordonnées  $(x, y)$  vérifiant l'équation précédente appartiennent à la droite  $D$ .

On en déduit donc que si  $f'(x)$  est positive sur un intervalle, alors la fonction  $f(x)$  est croissante sur cet intervalle. Si la  $f'(x)$  est négative sur un intervalle alors la fonction  $f(x)$  est décroissante sur le même intervalle.

Si au point  $x_0$ ,  $f'(x_0) = 0$  alors la tangente à la courbe  $y = f(x)$  est horizontale. Dans ce cas la fonction peut

### E.3 Propriétés

#### E.3.1 Linéarité

L'opération de dérivation est une opération linéaire :

$$\frac{d}{dx} (af(x) + bg(x)) = a \frac{df}{dx} + b \frac{dg}{dx}$$

où  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivable au point  $x$ .

#### E.3.2 Dérivée d'un produit – Formule de Leibniz

$$\frac{d}{dx} (f(x)g(x)) = \frac{df}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg}{dx}.$$



### E.3.3 Dérivée d'une fonction composée

On considère une fonction  $g$  qui dépend de  $x$  par l'intermédiaire d'une autre fonction  $u(x)$ , c'est à dire que  $g(x) = f(u(x))$ . Alors :

$$\left. \frac{dg}{dx} \right|_x = \left. \frac{d}{dx} f(u(x)) \right|_x = \left. \frac{du}{dx} \right|_x \left. \frac{df}{du} \right|_{u=u(x)}.$$

*Exemple :* Considérons la fonction  $g(x) = \sin(x^2)$ . On peut considérer que cette fonction est la composée de la fonction  $u(x) = x^2$  par la fonction  $f(u) = \sin(u)$ . On aura bien :  $g(x) = f(u(x)) = \sin(u(x)) = \sin(x^2)$ . La dérivée de  $\sin(x^2)$  en chaque point  $x$  se calculera de la façon suivante :

— On calcule  $\left. \frac{du}{dx} \right|_x$  :

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_x = \left. \frac{dx^2}{dx} \right|_x = 2x.$$

— On calcule  $\left. \frac{df}{du} \right|_{u=u(x)}$  :

$$\left. \frac{df}{du} \right|_{u=u(x)} = \cos(u) \Rightarrow \left. \frac{df}{du} \right|_{u=u(x)} = \cos(x^2).$$

— On en déduit la dérivée de  $\sin(x^2)$ , en effectuant le produit de  $\left. \frac{du}{dx} \right|_x$  par  $\left. \frac{df}{du} \right|_{u=u(x)}$  :

$$\left. \frac{d}{dx} \sin(x^2) \right|_x = 2x \cos(x^2).$$

### E.3.4 Dérivée de la fonction réciproque

La fonction réciproque de  $f(x)$  est la fonction  $f^{(-1)}(x)$  telle que

$$f^{(-1)}(f(x)) = x \tag{E.1}$$

Elle est définie sur l'image de  $f(x)$ , et donne l'antécédant  $x$  de lorsqu'elle est appliquée à  $f(x)$ . C'est à dire que si  $y = f(x)$  alors  $f^{(-1)}(y) = x$ . En utilisant la dérivée des fonctions composées, on obtient la dérivée de la fonction réciproque en dérivant l'Eq. (E.1). En dérivant le membre de gauche de l'Eq. (E.1), on obtient :

$$\left. \frac{d}{dx} [f^{(-1)}(f(x))] \right|_x = \left. \frac{df}{dx} \right|_x \left. \frac{df^{(-1)}}{dy} \right|_{y=f(x)}.$$

Par ailleurs, en dérivant le membre de droite de l'Eq. (E.1), on obtient  $\left. \frac{d}{dx} [f^{(-1)}(f(x))] \right|_x = \left. \frac{dx}{dx} \right|_x = 1$ , donc :

$$\left. \frac{d}{dx} [f^{(-1)}(f(x))] \right|_x = \left. \frac{df}{dx} \right|_x \left. \frac{df^{(-1)}}{dy} \right|_{y=f(x)} = 1 \Rightarrow \left. \frac{df^{(-1)}}{dy} \right|_{y=f(x)} = \frac{1}{\left. \frac{df}{dx} \right|_x},$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\left. \frac{df^{(-1)}}{dy} \right|_y = \frac{1}{\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=f^{(-1)}(y)}}.$$

*Exemple :* Calculons la dérivée de la fonction logarithme népérien  $f(x) = \ln(x)$ , sachant que  $\ln(x)$  est la fonction réciproque de la fonction exponentielle  $\exp(x)$ . La dérivée de la fonction exponentielle étant la fonction exponentielle elle-même.

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{\left. \frac{d \exp(u)}{du} \right|_{u=\ln(x)}} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}.$$

### E.3.5 Dérivées de fonctions usuelles

Fonctions	Dérivées
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$x^\alpha$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2(x)}$

*Remarques :* Les deux premières lignes de ce tableau sont en fait des cas particuliers de la troisième ligne avec  $\alpha = \frac{1}{2}$  et  $\alpha = -1$ , respectivement.

La dérivée des fonctions trigonométriques,  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$  peuvent s'obtenir à partir de la dérivée de la fonction  $\exp(x)$  en utilisant les nombres complexes. En effet :

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \operatorname{Re} \left[ e^{ix} \right] = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin(x) &= \operatorname{Im} \left[ e^{ix} \right] = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \end{aligned}$$

En appliquant la dérivée des fonctions composées à la fonction  $\exp(ix) = e^{ix}$ , on obtient :

$$\frac{d}{dx} e^{ix} = ie^{ix} \text{ et } \frac{d}{dx} e^{-ix} = -ie^{ix}$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \cos(x) &= \frac{d}{dx} \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{ie^{ix} - ie^{-ix}}{2} = -\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -\sin(x) \\ \frac{d}{dx} \sin(x) &= \frac{d}{dx} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = \frac{ie^{ix} + ie^{-ix}}{2} = \cos(x). \end{aligned}$$

En utilisant la dérivée des fonctions composées, on obtient les règles utiles suivantes :

$$\frac{d}{dx}f(ax) = a \left. \frac{df}{du} \right|_{u=ax}; \quad \frac{d}{dx} \frac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-2} \frac{df}{dx}; \quad \frac{d}{dx} [f(x)]^\alpha = \alpha [f(x)]^{\alpha-1} \frac{df}{dx}.$$



*F*

*Intégration des fonctions*

## F.1 Intégrale de Riemann – Définitions et propriétés

### F.1.1 Définition de l'intégrale de Riemann

Soit  $f$  une fonction bornée définie sur l'intervalle  $[a, b]$ . Riemann a proposé la définition suivante de « l'intégrale de la fonction  $f$  sur  $[a, b]$  » :

$$\int_a^b dx f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon f(a + k\varepsilon) \quad \text{où } \varepsilon = \frac{b-a}{N}. \quad (\text{F.1})$$

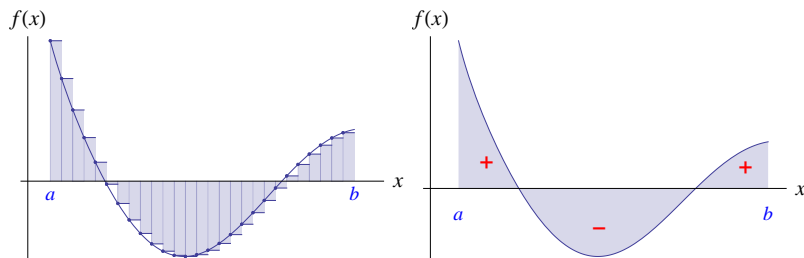


FIGURE F.1: À gauche : représentation graphique de la somme  $\varepsilon \sum_{k=0}^{N-1} f(a + k\varepsilon)$ . À droite : à la limite  $N \rightarrow \infty$ , la somme devient l'intégrale qui représente donc l'aire algébrique entre la courbe et l'axe.

*Interprétation géométrique :* Le membre de droite de l'équation (F.1) (avant limite) représente l'aire algébrique des rectangles (Fig. F.1.g). En considérant la limite  $N \rightarrow \infty$ , on obtient donc l'aire algébrique entre la courbe et l'axe (Fig. F.1.d).

*Vocabulaire :* Le symbole  $\int$  rappelle celui de la somme  $\sum$ , cependant, au lieu d'effectuer la somme d'un nombre fini de termes indicés par l'indice discret  $k \in \{0, \dots, N-1\}$ , la somme est effectuée à l'aide de l'indice variant continûment  $x \in [a, b]$ .

- La fonction sous l'intégrale, ici  $f(x)$ , est appelée « l'intégrande ».
- $a$  et  $b$  sont les « bornes d'intégration ».
- $x$  est la *variable d'intégration*. C'est une « variable muette » (tout comme l'indice  $k$  de la somme), par opposition aux paramètres dont dépend la somme (comme  $a$  et  $b$ ). Son nom n'a pas d'importance :  $\int_a^b dx f(x) = \int_a^b dt f(t)$ .
- Le symbole  $dx$  est un *accroissement infinitésimal*. Il joue le rôle analogue au  $\varepsilon$  (placé dans la somme pour souligner l'analogie) :  $dx f(x)$  représente l'aire d'un « rectangle » de largeur infinitésimale  $dx$  et de hauteur  $f(x)$ .

*Généralisation de la définition :* La définition (F.1) peut être étendue au cas où les intervalles n'ont pas la même largeur. Considérons une partition de l'intervalle  $[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{N-1}, x_N]$ , où  $x_0 = a$  et  $x_N = b$ , telle que  $\delta x_n \stackrel{\text{def}}{=} x_{n+1} - x_n \rightarrow 0 \forall n$  lorsque  $N \rightarrow \infty$ .

On peut définir l'intégrale de Riemann comme

$$\int_a^b dx f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k f(x_k), \quad (\text{F.2})$$

écriture qui souligne davantage l'analogie entre somme et intégrale.

*Extensions de la définition :* On peut étendre la définition de l'intégrale de Riemann au cas où :

- La fonction n'est pas bornée sur  $[a, b]$ . Par exemple elle diverge sur le bord  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$ . Si la divergence n'est pas trop forte, l'intégrale est finie. Pour établir le lien avec la définition (F.1) on écrit

$$\text{si } f(b) = \infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^b dx f(x) = \lim_{x_0 \rightarrow b^-} \underbrace{\int_a^{x_0} dx f(x)}_{\text{déf. (F.1)}} \quad (\text{F.3})$$

- De même on peut considérer un intervalle dont une borne est envoyée à l'infini :

$$\int_a^\infty dx f(x) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b dx f(x) \quad (\text{F.4})$$

- Lorsque le résultat d'une telle limite est fini, Éq. (F.3) ou Éq. (F.4), on dira que « l'intégrale est convergente », on écrira par exemple  $\int_a^\infty dx f(x) < \infty$ . À l'inverse, si la limite est infinie on dira que « l'intégrale est divergente » et on écrira  $\int_a^\infty dx f(x) = \infty$ .

### F.1.2 Propriétés :

Énonçons quelques propriétés élémentaires qui découlent de la définition (F.1).

- Inversion des bornes :

$$\int_a^b dx f(x) = - \int_b^a dx f(x) \quad (\text{F.5})$$

- Relation de Chasles

$$\int_a^c dx f(x) = \int_a^b dx f(x) + \int_b^c dx f(x) \quad (\text{F.6})$$

- Linéarité : soient deux fonctions  $f$  et  $g$  bornées et deux nombres réels (ou complexes)  $\lambda$  et  $\mu$  :

$$\int_a^b dx [\lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda \int_a^b dx f(x) + \mu \int_a^b dx g(x) \quad (\text{F.7})$$

- Analyse dimensionnelle (pour les physiciens)

$$\left[ \int dx f(x) \right] = [x] [f(x)] \quad (\text{F.8})$$

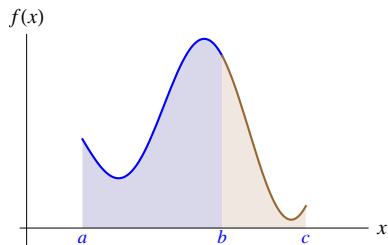


FIGURE F.2: Illustration de la relation de Chasles F.6.

### F.1.3 Relation avec la dérivation

La relation avec la dérivation découle de la définition. Définissons la fonction

$$F(x) = \int_a^x dt f(t) \quad (\text{F.9})$$

appelée « *une primitive de  $f$*  » (notons qu'il faut faire bien attention à donner un nom différent à la variable « muette » d'intégration,  $t$ , et aux autres variables « parlantes », ici  $x$ , afin d'éviter les confusions). On utilise la relation de Chasles

$$F(x + \varepsilon) - F(x) = \int_x^{x+\varepsilon} dt f(t) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\simeq} \varepsilon f(x); \quad (\text{F.10})$$

l'approximation découle de ce que  $f(x)$  est quasiment constante sur l'intervalle  $[x, x + \varepsilon]$  de largeur « petite ». On divise par  $\varepsilon$  :  $[F(x + \varepsilon) - F(x)]/\varepsilon$ . À la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  on retrouve la dérivée :

$$F'(x) = f(x). \quad (\text{F.11})$$

Autrement dit, les opérations de dérivation et d'intégration sont inverses :

$$\boxed{f(x) \begin{array}{c} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \\ \xleftarrow{\int dx} \end{array} f'(x)} \quad (\text{F.12})$$

*Remarque* : une primitive n'est pas unique. Soient  $F_1$  et  $F_2$  deux primitives de  $f$ . Alors  $F_1'(x) - F_2'(x) = 0$ , i.e.  $F_1$  et  $F_2$  diffèrent par une constante.

## F.2 Calcul des intégrales

Dans cette partie, nous passons en revue les méthodes de base qui permettent de calculer des intégrales.

### F.2.1 Identification d'une primitive

Le paragraphe précédent nous fournit un moyen *pratique* de calculer les intégrales. Si on connaît une primitive  $F$  de  $f$  (i.e. « deviner » une



fonction  $F$  telle que  $F' = f$ ), alors

$$\int_a^b dt f(t) = \left[ F(t) \right]_{t=a}^{t=b} = F(b) - F(a). \quad (\text{F.13})$$

*Exemple :* Considérons  $I = \int_0^\pi dt \sin(t)$ . On se rappelle que  $\cos' = -\sin$  et donc  $I = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2$ .

*Quelques primitives de fonctions élémentaires :* Il faut donc garder en tête quelques primitives des fonctions élémentaires.

$f(x)$	$F(x) = \int dx f(x)$
$x^a$ pour $a \neq -1$	$\frac{1}{a+1} x^{a+1}$
$1/x$	$\ln  x $
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln  u(x) $
$e^{\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda} e^{\lambda x}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$-\ln  \cos(x) $
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$	$\ln \cosh(x)$

On a toutefois souvent à considérer des intégrales de fonctions plus compliquées. Dans ce cas, on doit essayer différentes techniques (i.e. des « trucs »). Nous en décrivons quelques uns.

### F.2.2 Changement de variable

Soit  $u(x)$  une fonction *bijective* sur  $[a, b]$ . On a

$$\int_a^b dx u'(x) f(u(x)) = \int_{u(a)}^{u(b)} du f(u) \quad (\text{F.14})$$

La propriété devient évidente si on utilise la notation  $u'(x) = \frac{du}{dx}$ . Pour effectuer le changement de variable, il est commode d'écrire  $dx u'(x) = dx \frac{du(x)}{dx} = du(x)$  (c'est une « différentielle »).

*Exemple 1 :*

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} d\theta \tan \theta &= \int_0^{\pi/4} d\theta \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \int_0^{\pi/4} \frac{-d(\cos \theta)}{\cos \theta} \\ &= - \int_1^{1/\sqrt{2}} \frac{du}{u} = \left[ \ln |u| \right]_{1/\sqrt{2}}^1 = \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

*Exemple 2 :* Avec de l'usage on peut deviner quel changement de variable est naturel. Par exemple

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_0^{\pi/2} d\theta \cos \theta \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} = \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^2 \theta \\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{1-\cos 2\theta}{2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

### F.2.3 Intégration par parties

On a très souvent à considérer des intégrales de produits de fonctions,  $\int dx f(x) g(x)$ . Dans certains cas il est utile d'utiliser « l'intégration par parties », consistant à intégrer  $f$  et dériver  $g$ .

Partons de la formule bien connue  $(Fg)' = F'g + Fg'$  et passons un des termes dans l'autre membre :  $F'g = (Fg)' - Fg'$ . L'intégration de cette dernière équation sur  $[a, b]$  nous donne la formule très utile :

$$\boxed{\int_a^b dx f(x) g(x) = \left[ F(x) g(x) \right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b dx F(x) g'(x)} \quad (\text{F.15})$$

*Exemple :*

$$\int_0^\infty dx e^{-x} x = \left[ -e^{-x} x \right]_0^\infty - \int_0^\infty dx (-e^{-x}) = 1$$

### F.2.4 Dérivation par rapport à un paramètre sous le signe $\int$

Il est parfois utile d'utiliser

$$\int_a^b dx \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_a^b dx f(x, \lambda) \quad (\text{F.16})$$

(l'inversion de la dérivation et de l'intégration est licite dans la plupart des cas, sauf cas pathologique). Ce type de formule permet parfois de simplifier l'intégrande.

*Exemple :*

$$J(a) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty dt t^n e^{-at} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial a^n} \int_0^\infty dt e^{-at} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial a^n} \frac{1}{a} = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

où  $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ .

*G*

*La mesure – Incertitudes et calcul des variations*

### G.1 Erreurs de mesure et incertitudes

Au cours d'une expérience, les erreurs de mesure peuvent provenir de plusieurs sources :

- de la façon de faire la mesure. Par exemple si vous mesurez une durée entre deux évènements à l'aide d'un chronomètre, il y aura une incertitude sur l'instant de déclenchement du chronomètre. Ce type d'incertitude peut être évaluée en effectuant plusieurs mesures par exemples et en effectuant un traitement statistique des mesures obtenues. Le traitement statistique des erreurs de mesure sort du cadre de ce cours.
- de l'appareil de mesure lui même, par exemple, la précision du chronomètre. Cette incertitude est en général donnée par le constructeur.

#### G.1.1 Définitions

Au cours d'une expérience, on mesure une grandeur physique  $G$  et on obtient la valeur  $G_{\text{exp}}$ . On estime que la valeur exacte  $G_{\text{ex}}$  de  $G$  doit se trouver dans l'intervalle  $[G_{\text{exp}} - \delta G, G_{\text{exp}} + \delta G]$  où  $\delta G > 0$  est l'*incertitude absolue* sur  $G$ . L'*incertitude relative* sur  $G$ , parfois aussi appelée la *précision*, sera définie par le rapport  $\frac{\delta G}{|G_{\text{exp}}|}$ . L'incertitude relative s'exprime souvent en pourcentage. La dimension de l'incertitude absolue  $\delta G$  est la même que celle de  $G$ . L'incertitude relative n'a pas de dimension.

**Incertitudes :** On mesure une quantité physique  $G$ , on obtient  $G_{\text{ex}}$  avec une incertitude absolue  $\delta G > 0$ . L'*incertitude relative* parfois aussi appelée la *précision* est  $\frac{\delta G}{|G_{\text{exp}}|}$ .

#### G.1.2 Calculs d'incertitudes

Souvent, la grandeur physique que l'on cherche à évaluer n'est pas mesurée directement. Par exemple on ne mesure pas la vitesse  $v$  d'un mobile mais son déplacement  $\ell$  pendant une durée  $t$ .  $v$  est une fonction des quantités mesurées :  $v = \frac{\ell}{t}$ . De façon générale, on mesure des grandeurs  $x, y, z, \dots$  avec les incertitudes respectives  $\delta x, \delta y, \delta z, \dots$  et la grandeur  $G$  cherchée est une fonction de  $x, y, z, \dots$  :  $G = f(x, y, z, \dots)$ . La question est la suivante : connaissant les valeurs mesurées  $x_{\text{exp}}, y_{\text{exp}}, z_{\text{exp}}, \dots$  et les incertitudes associées  $\delta x, \delta y, \delta z, \dots$  comment évaluer l'incertitude sur  $G$  ?

On supposera ici que  $G$  ne dépend que d'une quantité mesurée  $x$  :  $G = f(x)$ . Si  $x_{\text{exp}}$  est la mesure obtenue pour  $x$ , on obtient pour  $G$  la valeur expérimentale  $G_{\text{exp}} = f(x_{\text{exp}})$ . La valeur exacte de  $x$  peut s'écrire  $x_{\text{ex}} = x_{\text{exp}} + \Delta x$  où  $\Delta x$  est dans l'intervalle  $[-\delta x, +\delta x]$ . La valeur exacte de  $G$  sera donc donnée par :

$$G_{\text{ex}} = f(x_{\text{ex}}) = f(x_{\text{exp}} + \Delta x).$$

En général (si l'expérience est bien faite) l'incertitude  $\delta x$  (et donc aussi  $|\Delta x|$ ) est très petite devant  $|x_{\text{exp}}|$ . On peut donc approcher la valeur

exacte de  $G$  par son développement limité au premier ordre :

$$G_{\text{ex}} \simeq f(x_{\text{exp}}) + \frac{df}{dx}(x_{\text{exp}})\Delta x,$$

où  $\frac{df}{dx}(x_{\text{exp}})$  désigne la dérivée de la fonction  $f$  calculée en  $x = x_{\text{exp}}$ . En utilisant la définition  $G_{\text{exp}} = f(x_{\text{exp}})$ , on peut écrire cette dernière équation de la façon suivante :

$$G_{\text{ex}} - G_{\text{exp}} \simeq \frac{df}{dx}(x_{\text{exp}})\Delta x.$$

L'incertitude sur  $G$  sera définie par le maximum de la valeur absolue du membre de droite :

$$\delta G \equiv \left| \frac{df}{dx}(x_{\text{exp}}) \right| \delta x.$$

Dans le cas où  $f(x)$  dépend de  $x$  sous la forme d'une loi de puissance,  $f(x) = Cx^a$  ou  $C$  et  $a$  sont des constantes réelles, il est très simple d'obtenir l'incertitude relative. En effet  $\frac{df}{dx} = Cax^{a-1}$  et donc  $\frac{\delta G}{G} = \left| \frac{Cax^{a-1}\delta x}{Cx^a} \right| = a \frac{\delta x}{|x|}$ . On en déduit que l'incertitude relative sur  $G$  est l'incertitude relative sur  $x$  multiplié par la puissance  $a$ .

### G.1.3 Présentation numérique des résultats

Un résultat de mesure sera toujours accompagné de son incertitude absolue ou relative. On écrira en général

$$\begin{aligned} G &= (G_{\text{exp}} \pm \delta G) \text{ unité}; \\ &\text{où} \\ G &= G_{\text{exp}} \text{ unité à } \frac{\delta G}{G_{\text{exp}}} \text{ près.} \end{aligned}$$

Lorsqu'on n'écrira pas explicitement l'incertitude, c'est que celle-ci correspond au dernier chiffre significatif écrit.

Exemple : On mesure une longueur  $\ell = 10.5$  cm. Si on écrit  $\ell = 10.50$  cm sans préciser l'incertitude associée c'est que celle-ci est  $\delta x = 0.01$  cm. On écrira explicitement :  $\ell = (10.50 \pm 0.01)$  cm ou  $\ell = 10.50$  cm à 0.1% près.

## G.2 Calcul approché d'une variation

### G.2.1 Exemple

Commençons par un exemple simple : soit un carré de côté  $x_0 = 2$  cm. Sa surface est égale à  $S_0 = 4$  cm<sup>2</sup>. De combien varie la surface du carré, si on augmente la longueur du côté d'une quantité  $\Delta x = 0.1$  cm, faible comparée à  $x_0$  ? On peut répondre à cette question de plusieurs manières.

**Calcul de l'incertitude :** Si  $G = f(x)$  alors,

$$\delta G \equiv \left| \frac{df}{dx}(x_{\text{exp}}) \right| \delta x.$$

Dans le cas particulier où  $f(x) = Cx^a$  on obtient,

$$\frac{\delta G}{G} = a \frac{\delta x}{|x|}.$$

**Présentation numérique d'un résultat :**

$$\begin{aligned} G &= (G_{\text{exp}} \pm \delta G) \text{ unité}; \\ &\text{où} \\ G &= G_{\text{exp}} \text{ unité à } \frac{\delta G}{G_{\text{exp}}} \text{ près.} \end{aligned}$$

La première consiste à calculer la nouvelle surface :  $S(x) = S(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 = 2.1^2 = 4.41 \text{ cm}^2$ . Puis de calculer la différence  $\Delta S \equiv S(x_0 + \Delta x) - S(x_0) = 0.41 \text{ cm}^2$ .

La seconde, consiste à développer le carré :

$$\begin{aligned} \Delta S = S(x) - S(x_0) &= (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 \\ &= 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2. \end{aligned}$$

Puis de remarquer que, comme  $\Delta x \ll x_0$  alors  $(\Delta x)^2 \ll 2x_0\Delta x$ . en effet, le calcul numérique donne :  $(\Delta x)^2 = (0.1)^2 = 0.01 \text{ cm}^2$  alors que  $2x_0\Delta x = 2 \times 2 \times 0.1 = 0.4 \text{ cm}^2$ . On peut donc avoir une première idée de la variation de l'aire du carré (à mieux que 3% près) en négligeant le terme  $(\Delta x)^2$  dans l'expression qui donne  $\Delta S$ , et écrire :

$$\Delta S \simeq 2x_0\Delta x.$$

On a ainsi négligé les termes du second ordre (puissance 2 ou supérieures) en  $\Delta x$ . Une version graphique de cette approximation est présentée sur le figure G.1.

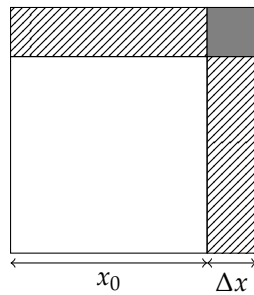


FIGURE G.1: La variation de l'aire du carré quand la longueur du côté augmente de  $\Delta x$  est essentiellement donnée par l'aire hachurée. L'aire  $(\Delta x)^2$  du petit carré de côté  $\Delta x$  est négligeable tant que  $\Delta x \ll x_0$ .

On remarque que cela revient à écrire que :

$$\Delta S \simeq S'(x_0)\Delta x, \quad (\text{G.1})$$

où  $S'(x_0)$  est la dérivée de la fonction  $S(x) = x^2$  calculée en  $x = x_0$ . En effet, en dérivant on obtient  $S'(x_0) = 2x_0$  donc  $S'(x_0)\Delta x = 2x_0\Delta x$ . C'est ce résultat de l'Eq. (G.1) que nous allons généraliser dans la suite.

### G.2.2 Cas général

Supposons qu'une quantité physique  $Q$  dépend d'une autre quantité  $x$  par l'intermédiaire d'une fonction  $f(x) : Q = f(x)$ . On suppose qu'on connaît la valeur  $Q_0$  de cette quantité quand  $x$  vaut  $x_0 : Q_0 = f(x_0)$ . On souhaite estimer de façon approximative quelle est la valeur de  $Q$  pour une valeur de  $x$  proche de  $x_0$ . C'est à dire que l'on cherche la valeur de  $Q = f(x)$  pour  $|x - x_0| \ll x_0$ . Pour cela on peut utiliser l'approximation suivante :

$$f(x) \simeq f_{\text{app}} = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0), \quad (\text{G.2})$$

où  $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$  indique que la dérivée de la fonction  $f$  est calculée en  $x = x_0$ . Cette approximation, revient à approcher la fonction  $f(x)$ , par une fonction linéaire, dont le graphe est la droite tangente à la courbe  $y = f(x)$  en  $x = x_0$ , voir figure G.2. En notant  $\Delta x$  la variation de  $x$ , c'est à

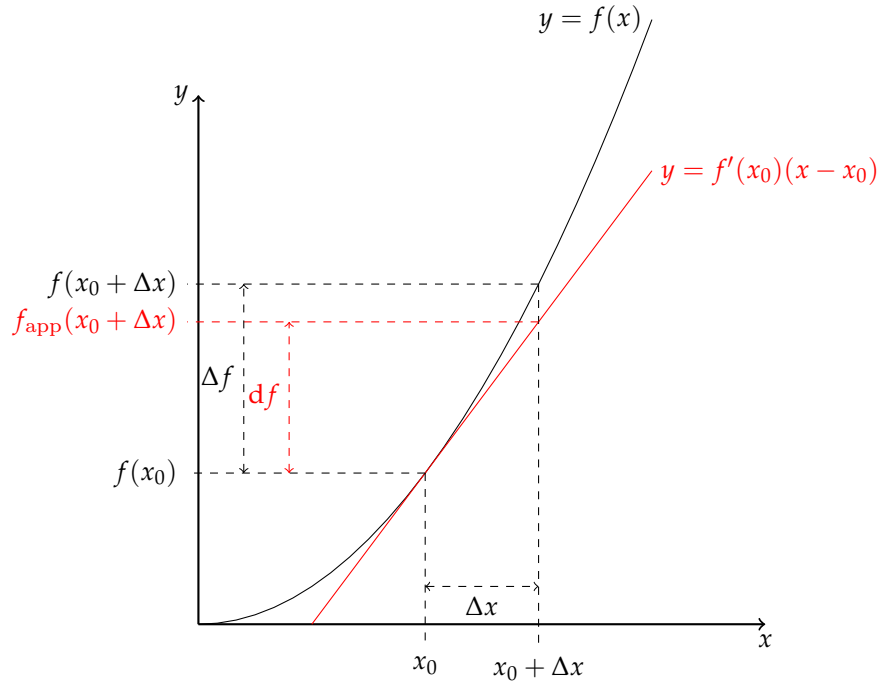


FIGURE G.2: Approximation de  $f(x)$  par la droite tangente en  $x = x_0$ ,  $y = f'(x_0)(x - x_0)$ . Ce qui revient à approcher la variation  $\Delta f$  par la différentielle  $df$ .

dire  $\Delta x = x - x_0$ , on peut aussi écrire l'Eq. (G.2) de la façon suivante :

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \equiv \Delta f \simeq \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \Delta x, \quad (\text{G.3})$$

où on a introduit la variation de la fonction  $\Delta f \equiv f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  correspondant à une variation de  $\Delta x$  à partir de  $x_0$ .

Exemple d'application : La période d'un pendule simple de longueur  $\ell = 30$  cm est  $T = 1.1$  s. Sachant que

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

de combien varie la période du pendule si la longueur du pendule est diminuée de 1 cm ?

Calculons la dérivée de  $T$  par rapport à  $\ell$ ,

$$\frac{dT}{d\ell} = \frac{\pi}{\sqrt{\ell g}}.$$

On obtient donc une estimation (au premier ordre) de la variation  $\Delta T$

**Calcul d'une variation :** Si  $f$  est une fonction de  $x$ ,  $f(x)$  dont on connaît la valeur  $f_0 = f(x_0)$  en  $x = x_0$ . Alors lorsque  $x$  varie d'une quantité  $\Delta x \ll x_0$  à partir de  $x_0$ , on peut estimer la variation  $\Delta f \equiv f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  de la façon suivante :

$$\Delta f \simeq \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \Delta x.$$

de la période :

$$\Delta T \simeq \frac{dT}{d\ell} \Delta\ell = \frac{\pi}{\sqrt{\ell g}} \Delta\ell.$$

On remarque que cette dernière équation peut encore s'écrire (en divisant l'égalité par  $T$ ) de la façon suivante :

$$\frac{\Delta T}{T} \simeq \frac{1}{2} \frac{\Delta\ell}{\ell},$$

qui donne la variation relative  $\frac{\Delta T}{T}$  de la période en fonction de la variation relative  $\frac{\Delta\ell}{\ell}$  de la longueur du pendule.

Effectuons l'application numérique avec  $\ell = 0.30$  m et  $\Delta\ell = -1 \times 10^{-2}$  m, on obtient  $\frac{\Delta T}{T} = -0.5 \times 0.01/0.3 = -1.7 \times 10^{-2}$  et donc  $\Delta T = -1.1 \times 1.7 \times 10^{-2} = -1.8 \times 10^{-2} \simeq -2 \times 10^{-2}$  s.

En effectuant le calcul exact, on aurait obtenu :  $T(\ell + \Delta\ell) = 2\pi\sqrt{\frac{\ell + \Delta\ell}{g}} \simeq 1.08$  s et donc  $T(\ell + \Delta\ell) - T(\ell) \simeq 1.08 - 1.1 = -0.02$  s. L'approximation qui consiste à approcher la variation de la période au premier ordre en  $\Delta\ell$  est donc une bonne approximation.