Travaux Dirigés de Physique
Mécanique

Partie 1/3

PEIP 1 / PEIP C

1 | Cinématique

1.1 Coordonnées polaires

Exercice 1.1–1:

Un point mobile M se déplace sur un cercle de centre O et de rayon R avec une vitesse qui croît de manière linéaire avec le temps. C'est à dire $\|\vec{v}\| = kt$ où k est une constante positive.

1. Donner l'expression du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base des coordonnées polaires.
2. Exprimer, en coordonnées polaires, les composantes de la vitesse et de l'accélération du point M. On note M_0 la position du point M à $t = 0$. On choisira l'axe Ox tel que M_0 soit situé sur cet axe.
3. Déterminer les coordonnées de ces mêmes vecteurs en coordonnées cartésiennes.
4. Déterminer la distance parcourue par le point M à l'instant t.

Exercice 1.1–2:

On considère la courbe défini par l'équation en coordonnées polaires :

$$\rho(\theta) = r_0(1 + \cos\theta)$$

où r_0 est une constante positive. Un point matériel M décrit cette courbe avec $\theta = \omega t$ (ω = constante). On prendra $\theta \in [0, 2\pi[$.

1. Après avoir étudié les symétries de la fonction, tracer la courbe.
2. Calculer les composantes du vecteur vitesse en coordonnées polaires. Tracer ce vecteur aux points $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$
3. Montrer que $\|\vec{v}\| = \omega\sqrt{2\rho r_0}$
4. Calculer l'accélération $\vec{a}$ et représenter ce vecteur aux points $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

1.2 Coordonnées intrinsèques

Exercice 1.2–1:

Dans un repère orthonormé Oxy, les coordonnées d'une particule sont données en fonction du temps t par :

$$\begin{cases} x(t) = ct \\ y(t) = bt(t - \tau) \end{cases}$$

avec $c = 2$ S.I., $b = 4$ S.I. et $\tau = 1$ S.I.

1. Donner les dimensions de c et b.
2. Déterminer l'équation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes ; la tracer.
3. Ecrire l'élément infinitésimal d'abscisse curviligne ds en fonction de t et dt. Donner ensuite sous forme intégrale la distance parcourue entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t = 2$ s.
4. Calculer les composantes du vecteur vitesse à la date t. Le tracer pour $t = 0$ et $t = 0.5$ s.
5. Montrer que la particule possède une accélération constante dont on calculera les composantes tangentielle a_T et normale a_N. En déduire le rayon de courbure à la date $t = 0.5$ s.

Exercice 1.2–2:

Une particule se déplace dans un plan. Son accélération est donnée au cours du temps par l'expression $\vec{a} = \alpha\overrightarrow{u}_t + \beta t^4\vec{u}_n$ où $\vec{u}_t$ et $\vec{u}_n$ sont des vecteurs unitaires du repère intrinsèque lié à la trajectoire orienté. α et β sont des constantes positives.On suppose qu'à l'instant $t = 0$ la particule est au repos à l'origine des coordonnées.

1. Donner les dimensions de α et β.
2. Calculer l'abscisse curviligne $s(t)$ en fonction du temps.
3. Déterminer le rayon de courbure $\mathcal{R}(s)$ de la trajectoire en fonction de s. Vérifier l'homogénéité de la relation.
4. En déduire l'allure de la trajectoire.
5. Calculer la norme de l'accélération de $\vec{a}$. Vérifier l'homogénéité du résultat.

1.3 Coordonnées cylindriques

Exercice 1.3–1:

On considère l'hélice d'équation en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x(t) = R\cos\theta \\ y(t) = R\sin\theta \\ z(t) = h\theta \end{cases}$$

Elle est parcourue par un point animé d'un mouvement uniforme ($\|\vec{v}\| = cst$). R et h sont des constantes positives.

1. Calculer les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ en coordonnées cylindriques, puis en coordonnées intrinsèques.
2. Montrer que $\vec{v}$ fait un angle constant avec le plan Oxy, et que $\vec{a}$ est toujours dirigé vers l'axe Oz.
3. Calculer le rayon de courbure.
4. Calculer la distance parcouru par le point M lorsqu'il fait un tour de l'hélice.

2 | Dynamique

2.1 Principe fondamentale de la dynamique

Exercice 2.1–1:
Les affirmations suivantes sont-elles vrai ou fausse ?

1. Un corps ne peut se déplacer sans qu'une force agisse sur lui.
2. Toute variation de vitesse d'un corps exige l'action d'une force.
3. Si l'énergie cinétique d'un corps est constante, aucune force ne s'applique sur lui.
4. Si la force exercée sur un corps devient et reste nul, le corp s'arrête.

Exercice 2.1–2: Le pendule simple
Un pendule simple est constitué d'un fil inextensible de longueur l constante, de masse négligeable, dont une des extrémités est fixé en O à un support fixe et dont l'autre extrémité est liée à une bille de masse m considérée comme ponctuelle. Soit Oz l'axe vertical **descendant** passant par O, de vecteur unitaire $\vec{k}$. Le référentiel d'étude est supposé galiléen.

1. Déterminer la position d'équilibre M_0 de la bille. Donner l'expression correspondante de la norme de la tension du fil, que l'on notera N_0.
2. On écarte la bille de sa position d'équilibre d'un angle θ_0. A l'instant t_0, pris comme origine des temps, on lâche la bille. On admet que la bille reste dans le plan défini par $OzOM(t_0)$. On repère la bille grâce aux coordonnées polaires. On notera $\vec{u}_l$ et $\vec{u}_\theta$ les vecteurs unitaires de cette base.
   (a) Faire le bilan des forces appliquées à la bille à l'instant t.
   (b) Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la bille et obtenir les composantes radiale et orthoradiale de l'accélération de la bille.
   (c) Obtenir l'équation différentielle qui régit le mouvement du pendule. On se placera dans l'approximation des petits angles. En déduire la pulsation ω et la période T des oscillations.
   (d) Exprimer la tension N du fil lorsque $\theta = 0$ en fonction de $\dot{\theta}$. Montrer que N est maximale en ce point.

Exercice 2.1–3: Charge dans un champ magnétique
Dans un référentiel galiléen muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère le mouvement d'une particule chargé de charge q ($q > 0$) dans un champ magnétique uniforme ($\vec{B} = B\vec{k}$). Au temps $t = 0$, la particule se trouve à l'origine et possède une vitesse initiale $\vec{v}_0$ contenue dans le plan Oxz et faisant un angle α avec $\vec{k}$. On néglige la pesanteur et on pose $\omega = \frac{qB}{m}$ (fréquence cyclotron). On donne la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

1. Ecrire l'équation différentielle à laquelle obéit le mouvement de la particule.
2. Déterminer les équations paramétriques de la trajectoire en coordonnées cartésiennes : $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

3. En déduire la nature du mouvement de la particule dans le plan Oxy et sur l'axe Oz.
4. On se place dans le cas où $\alpha = \pi/2$. Que devient le mouvement de la particule ? Pourrait-on sélectionner des particules de vitesse donné ?
5. La particule se déplaçant dans le plan Oxy est soumise à un champ électrique $\vec{E} = E_0\,\vec{\imath}$ en plus du champ magnétique. Résoudre les équations du mouvement.

Exercice 2.1–4: Partiel de 2010

Dans la salle de TP, que l'on considère comme un référentiel galiléen, une bille de masse m décrit une trajectoire circulaire et uniforme de centre O et de rayon R dans le plan horizontal Oxy. La vitesse angulaire de la bille est ω. La bille, que l'on supposera ponctuelle, est attaché a un fil dont l'autre extrémité est attaché en un point C à la verticale et au dessus de O. On repère la position M de la bille par ses coordonnées polaires (ρ, θ) dans le plan Oxy.

1. Sur un schéma du plan Oxy, placer le point M à un instant quelconque, ρ, θ et les vecteurs $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\theta$.
2. Donner l'expression de $\overrightarrow{OM}$ en polaire.
3. Donner l'expression de la vitesse $\vec{v}$ en polaire.
4. Donner l'expression de l'accélération $\vec{a}$ en polaire.
5. Faire le bilan des forces qui s'appliquent sur la bille. On le représentera sur un schéma.
6. On note T la tension du fil et α l'angle que fait le fil avec la verticale. Exprimer les composantes de ces forces dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k})$. Avec $\vec{k}$ vecteur unitaire colinéaire à $\overrightarrow{OC}$ et de même sens. On exprimera ces composantes en fonction de T, α, m et de l'accélération de pesanteur g.
7. En applicant le principe fondamental de la dynamique, en déduire $\tan\alpha$ en fonction de R, ω et g.
8. Le fil peut-il être horizontal ?
9. Application numérique : $\omega = 2$ rad/s, $g = 10$ m/s^2, $R = 50$ cm. Calculer $\tan\alpha$.

2.2 Frottements

Exercice 2.2–1: Traineau sur une pente

On pose un traineau sur une pente enneigé d'angle β. Dans cet exercice les forces de frottements sont supposées suffisantes pour maintenir le traineau immobile. La réaction du sol peut alors se décomposer en deux composantes : la réaction normale $\vec{R}$ et la réaction tangentielle $\vec{f}$.
Pour rappel on peut écrire le coefficient de frottement statique k_s par :

$$k_s = \frac{\|\overrightarrow{f_{max}}\|}{\|\vec{R}\|}$$

avec $\|\overrightarrow{f_{max}}\|$ norme de la force maximale de frottement que peut fournir le contact.tout en maintenant le traineau immobile.

1. Exprimer les normes de $\vec{f}$ et de $\vec{R}$.
2. En déduire une relation entre le coefficient de frottement statique k_s et l'angle β pour que le traineau se mette en mouvement.
3. AN : vérifier que cette relation est bien satisfaite pour $k_s = 0.1$ (frottement métal sur glace) et $\beta = 60°$

3 | Energie

3.1 Circulation et travail

Exercice 3.1–1:

1. Quel travail doit-on fournir pour élever une masse M d'une hauteur h
   — en suivant la verticale
   — en suivant un plan incliné d'un angle α
2. On suppose que la masse se déplace a une vitesse v. Dans chacun des deux cas quelle puissance doit-on développer pour effectuer ce travail ?
3. Quel est le travail du poids pendant ce mouvement ? Est il positif ou négatif ? Comparer avec le travail calculé à la question 1.
4. Comment le travail serait il modifié s'il existait des forces de frottements sur l'air ou sur le plan incliné ?

3.2 Théorème de l'énergie cinétique

Exercice 3.2–1: Traineau en mouvement

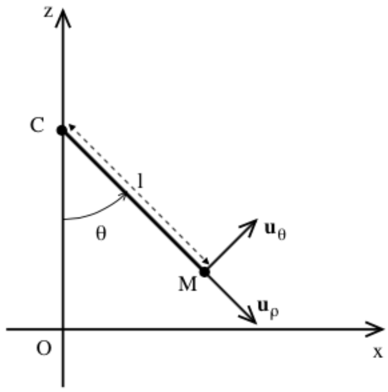
On reprend l'exercice 2.2–1 mais maintenant on suppose que le traineau est en mouvement. Il a donc une force de frottement dynamique noté $\vec{f}'$. Il part du point C pour arriver en bas de la piste incliné (d'un angle β) en D, puis il poursuit sa course sur une piste horizontale, de même nature que la piste incliné, jusqu'à son point d'arrêt noté E.
On note les distances $CD = l$ et $DE = l'$ et k_d le coefficient de frottement dynamique.

1. Calculer le travail W_{CD} de la résultante des forces appliquées au traineau sur le trajet CD.
2. Calculer le travail W_{DE} de la résultante des forces appliquées au traineau sur le trajet DE.
3. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, exprimer k_d en fonction du rapport $r = \frac{l'}{l}$ et de β.

Exercice 3.2–2: Rotation d'un pendule

Un pendule est constitué d'une masse ponctuelle m suspendue a l'extrémité d'une tige rigide de longueur l et de masse négligeable. L'autre extrémité de la tige est fixé au point C. La tige peut tourner dans le plan xOz autour du point C. On place l'origine O du repère de manière à ce qu'il coïncide avec la position la plus basse de m. Au cours du mouvement, on repère la position de la masse m par l'angle θ que fait la tige avec la verticale. Le but de l'exercice est de déterminer la vitesse minimale qu'il faut donner à la masse m pour que son mouvement soit un mouvement de rotation et non un mouvement d'oscillations.

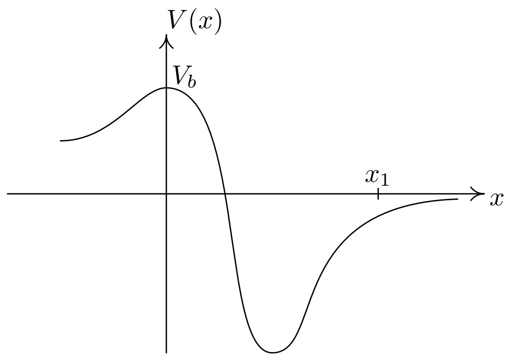
1. Faire le bilan des forces qui s'appliquent sur la masse m. On précisera quelles sont les forces qui travaillent.
2. Donner l'expression de l'énergie potentielle E_p de la masse m. On prendra l'origine de l'énergie potentielle en O.



3. Tracer le graphe représentant l'énergie potentielle $E_p(\theta)$ pour $\theta \in [-\pi, \pi]$. En déduire les positions des équilibres stable et instable.
4. Le pendule est initialement a sa position d'équilibre stable. En utilisant le graphe précédent, déterminer l'énergie minimale E_0 qu'il faut fournir à la masse m pour que son mouvement soit un mouvement de rotation et non un mouvement d'oscillation.
5. En déduire la vitesse minimale v_0 à communiquer à la masse m.

EXERCICE 3.2–3: Particule dans un potentiel variable

On s'intéresse à une particule se déplaçant sur un axe Ox et soumise à un potentiel $V(x)$ représenté à la figure suivante. On veut étudier qualitativement le mouvement de la particule pour différentes valeurs de son énergie mécanique. Pour chacun des cas suivants décrire qualitativement le mouvement puis tracer l'allure de $x(t)$ et de $\dot{x}(t)$.

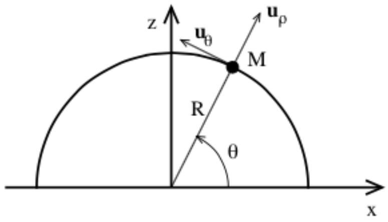


1. Pour $V_{min} < E_m < 0$ avec $x(0) = x_1$ et $\dot{x}(0) < 0$.
2. Pour $0 < E_m < V_b$ avec $x(0) = x_1$ et $\dot{x}(0) < 0$.
3. Pour $E_m > V_b$ avec $x(0) = x_1$ et $\dot{x}(0) < 0$.

EXERCICE 3.2–4: Glissade sur un Igloo

Un petit morceau de glace de masse m glisse sans frottement sur la surface externe d'un igloo qui est une demi-sphère de rayon R dont la base est horizontale. Au temps $t = 0$, il est lâché sans vitesse initiale d'un point M_0 repéré par l'angle θ_0 (voir figure suivante) :

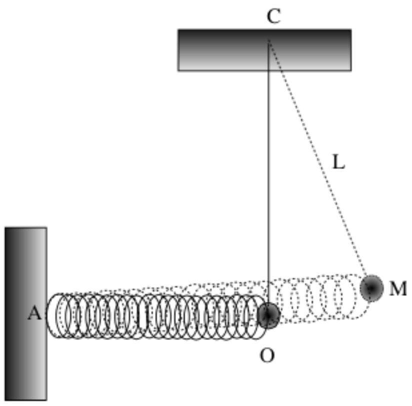
1. Déterminer les composantes de la vitesse et de l'accélération dans le repère $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$.
2. On désigne par $\vec{N}$ la réaction de l'igloo sur le glaçon.En utilisant la relation fondamentale de la dynamique, déterminer l'expression de $||\vec{N}||$ en fonction de la norme de la vitesse.



3. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, donner l'expression de v puis de $||\vec{N}||$ en fonction de θ.
4. Représenter la variation de $||\vec{N}||$ en fonction de θ. Pour quelle valeur de θ le glaçon décolle-t-il ? Quelle est la vitesse de décollage ? Quelle est la nature de la trajectoire lorsque le glaçon quitte l'igloo ?
5. Montrer que le cas particulier $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ correspond à une position d'équilibre. Etudier sa stabilité.

Exercice 3.2–5: Pendule et ressort

On considère une masse ponctuelle m accroché à l'extrémité d'un pendule de longueur L dont le point de suspension est fixé en C. La masse M est de plus accroché à un ressort de raideur k dont l'autre extrémité est fixé en A. A l'équilibre, le ressort est horizontal et la masse m située en O, à la verticale du point de suspension C du pendule. On supposera que le mouvement du pendule à lieu dans un plan. On se place dans l'approximation des petits angles, on pourra donc faire des hypothèses simplificatrices.



1. Calculer l'énergie potentielle du pendule supposé seul (sans le ressort) en fonction de l'angle θ. On prendra l'origine des énergies potentielles en O.
2. Calculer l'énergie potentielle du ressort seul lorsqu'on écarte le pendule de l'angle θ.
3. Calculer l'énergie potentielle totale.
4. Calculer l'énergie cinétique du pendule en fonction de $\dot{\theta}$. En déduire une expression de l'énergie totale du système.
5. En déduire l'équation différentielle du mouvement vérifié par θ. Déterminer la pulsation ω du mouvement.

Interrogation de Mécanique n°1
Mardi 10 Février 2015, durée 1h30

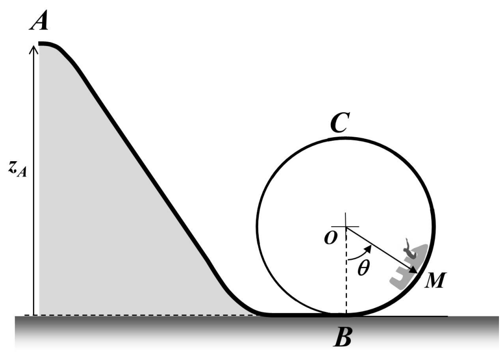
Les documents et les calculatrices sont interdits.
Les exercices sont **indépendants.**

1 Question de cours

1. Donner l'expression des vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées polaires en fonction des vecteurs $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ et des coordonnées r, θ et de leurs dérivées.
2. Donner l'expression de l'accélération d'un point M en coordonnées intrinsèques. On la donnera en fonction de $\vec{u}_t$, $\vec{u}_n$, v, $\frac{dv}{dt}$ et de $\mathcal{R}$. On précisera la signification de $\mathcal{R}$.
3. Enoncer les trois lois de Newton.

2 Dynamique et Energie : la boucle infernale

Un parc d'attraction veut construire une "boucle infernale" comme celle de la figure suivante. Les ingénieurs responsables de la construction se demandent quelle hauteur z_A doit avoir le point de départ A pour que le chariot passe la boucle de rayon R sans tomber. On néglige les frottements et la vitesse initiale est nulle.



Pour cette étude, on va utiliser les coordonnées polaires avec l'origine au centre de la boucle et l'angle θ comme indiqué sur la figure. Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

2.1 Première partie : Dynamique

1. Faire un schéma du chariot à un angle θ quelconque. Dessiner les vecteurs $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\theta$ ainsi que les forces qui agissent sur lui.
2. Donner l'expression des forces en les projetant dans le repère des coordonnées polaires.
3. Donner l'accélération du chariot en coordonnées polaires.
4. Ecrire le PFD et le projeter sur $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\theta$.
5. Quelle doit être la condition satisfaite par la réaction de la piste pour que le chariot reste toujours en contact avec la piste ? Montrer que cette condition amène à l'inéquation suivante :

$$R\dot{\theta}^2 \geqslant -g\cos\theta$$

2.2 Deuxième partie : Energie

Dans cette partie, on prendra l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur en B.

6. Donner l'expression de la vitesse en coordonnées polaires. Ecrire ensuite l'énergie cinétique du point M avec ses coordonnées polaires.
7. Quelle doit être l'énergie cinétique minimale au point C pour que le chariot reste en contact avec la piste.
   indication : Pour cette question il faut utiliser la relation de la question 5. Que l'on ait réussi cette question ou pas, on peut toujours utiliser la relation donnée.
8. Quelle est l'énergie mécanique minimale au point C pour que le chariot reste en contact de la piste.

9. L'énergie mécanique du chariot est-elle conservée ? La réponse devra être justifier.
10. En déduire la hauteur minimale z_A en fonction du rayon de la boucle R pour que le chariot ne décolle jamais de la piste.

3 Cinématique : Fusée de feux d'artifices

Un artificier veux étudier la trajectoire d'une fusée de feux d'artifices. La fusée part du sol, à l'origine des coordonnées, avec une vitesse verticale $v_z = v_0$. Au cours du mouvement, la fusée garde sa vitesse verticale constante, mais acquière une vitesse horizontale $v_y = \frac{z(t)}{\tau}$ proportionnel à l'altitude. Il n'y a pas de vitesse suivant l'axe x.

1. Déterminer l'expression de $z(t)$ en fonction de v_0 et t.
2. Déterminer de la même manière les expressions de $x(t)$ et $y(t)$.
3. En déduire l'équation de la trajectoire $z(y)$ de la fusée et la représenter sur un graphique.
4. Donner le vecteur vitesse, puis en déduire le vecteur accélération. Les représenter en un point M quelque de la trajectoire.
5. Calculer la norme du vecteur vitesse. Donner ensuite l'expression du vecteur tangentiel $\vec{u}_t$ en coordonnées cartésiennes.
6. En déduire l'expression du vecteur normal $\vec{u}_n$. Pour cela vous pouvez utiliser le fait que $\vec{u}_n = \vec{\imath} \wedge \vec{u}_t$.
7. A l'aide des questions précédentes, en déduire les composantes tangentielle et normale de l'accélération en fonction de v_0, τ et t.
8. En déduire alors l'expression du rayon de courbure :

$$\mathcal{R} = -\frac{v_0(t^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}}{\tau^2}$$

Travaux Dirigés de Physique
Mécanique

Partie 2/3

PEIP 1 / PEIP C

4 | Changement de référentiel

4.1 Cinématique

Exercice 4.1–1: Flocons de neige
Des flocons de neiges tombent verticalement par rapport au sol, en parcourant 8 m/s. A quelle vitesse les passagers d'une voiture roulant à 50 km/h sur une route droite les voient ils frapper le pare-brise du véhicule ?

Exercice 4.1–2:
Un enfant lâche une bille dans la cage d'escalier de son immeuble depuis le 4$^{\text{ème}}$ étage au moment où l'ascenseur y passe. Son père, qui monte par l'ascenseur jusqu'au 10$^{\text{ème}}$ étage avec une vitesse constante observe lui aussi la chute de la bille. Les grandeurs physiques suivantes sont-elles identiques pour l'enfant et pour son père :

1. la vitesse de la bille à un instant donné ?
2. le temps de chute total ?
3. l'accélération de la bille à un instant quelconque ?
4. la distance totale parcourue par la bille ?

Exercice 4.1–3: Vol de Brest à Bâle
Un avion s'envole de Brest vers Bâle. Sa vitesse, constante par rapport à l'air, est égale à 300 km/h et le vent souffle du nord-ouest à 60 km/h. On admettra que Brest est à l'ouest de Bâle à environ 1000 km.

1. Quel doit être le cap suivi par le pilote ?
2. Quelle est la durée du voyage ?
3. Reprendre les deux premières questions pour le voyage retour.

4.2 Dynamique dans un référentiel non galiléen

Exercice 4.2–1: Pèse personne
Une personne se tient sur un pèse personne situé dans un ascenseur. L'ascenseur étant à l'arrêt, le pèse personne indique 70 kg. L'ascenseur monte en décrivant trois phases :
— phase 1 : phase d'accélération constante de 2 ms^{-2}.
— phase 2 : phase d'accélération nulle.
— phase 3 : phase de décélération constante de 2 ms^{-2}.

1. Quelle indication fournit le pèse personne durant chacune des phases du mouvement de l'ascenseur ?
2. Après l'arrêt, le câble casse et l'ascenseur tombe en chute libre. Qu'indique alors le pèse personne ?

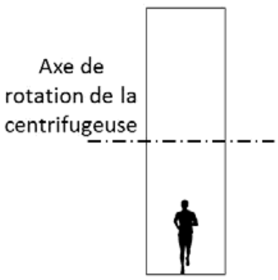
EXERCICE 4.2–2: Pendule dans un référentiel non galiléen

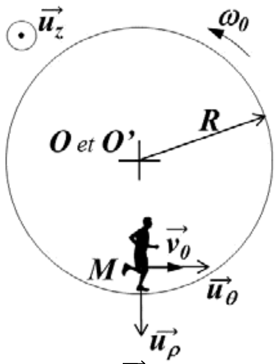
Le pendule décrit dans l'exercice 2.1–2 est suspendu en O au plafond d'un véhicule se déplaçant avec un mouvement de translation horizontal uniformément accéléré, d'accélération $\vec{a}_t$, par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen.

1. Soit M_0' la position de la masse m à l'équilibre définissant l'axe Oz'. Déterminer cette position d'équilibre par l'angle non orienté entre les axes Oz et Oz'.
2. A l'instant $t = 0$, on écarte la masse m de sa position d'équilibre dans le plan vertical contenant Oz et Oz' du même angle θ_0 qu'au 2.1–2 et on la lâche sans vitesse initiale. Obtenir l'équation différentiel du mouvement.

EXERCISE 4.2-3: 2001 l'Odyssée de l'espace

Le vaisseau spatial « Discovery-One » en route vers Jupiter à vitesse constante (Référentiel Galiléen O), possède une grande centrifugeuse faisant partie de son espace habitable. La centrifugeuse a un rayon R et tourne avec un vecteur rotation $\vec{\omega}=\omega_0\,\vec{u_z}$ constant. Dans la suite, on se propose d'étudier l'utilité d'un tel objet dans l'espace. Pour ce faire, nous considèrerons le mouvement d'un point matériel de masse m qui représente l'astronaute David Bowman en train de courir à une vitesse $\vec{v'}=v_0\,\vec{u_\theta}$, constante dans le référentiel de la centrifugeuse.





Aide : $\vec{a_e} = d^2\overrightarrow{OO'}/dt^2 + d\vec{\omega}/dt \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$ *et* $\vec{a_c} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v'}$

En se plaçant dans le référentiel de la centrifugeuse centré en O' :

1. Donner l'expression des forces d'inertie en fonction $\vec{a_e}$ et $\vec{a_c}$.
2. Donner l'expression des forces d'inertie en coordonnées polaires et en fonctions des données de l'énoncé (m, R, ω_0 et v_0). Quelles autres forces agissent sur David ? Les représenter sur une figure.
3. En utilisant la deuxième loi de Newton selon la direction $\vec{u_\rho}$, montrer que l'expression de la réaction du sol sur David est $N = m\,R\,(\omega_0 + v_0\,/\,R)^2$.

La vitesse de rotation de la centrifugeuse est réglée à $\omega_0 = (g/R)^{1/2}$:

4. Montrer que la réaction du sol sur David, lorsqu'il est immobile (cas $v_0 = 0$), est alors équivalente à la force ressentie sur terre.
5. Donner les expressions de la réaction du sol sur David (calculée à la question 3) en fonction de m et g dans le cas où il court vers la droite ($v_0 = \frac{1}{3}\omega_0 R$) et vers la gauche ($v_0 = -\frac{1}{3}\omega_0 R$). D'après vos résultats, dans quel sens David trouvera-t-il plus facile de courir et pourquoi?

Questions Bonus :

6. Plus tard, David arrête de courir et s'assoit sur un banc. On considéra qu'au cours de ce mouvement David suit une trajectoire verticale du haut vers le bas à une vitesse constante de $v_A=\omega_0 R/8$. Trouver l'expression de la force de Coriolis que va subir David en fonction de m et g. Commenter.

5 | Moment cinétique

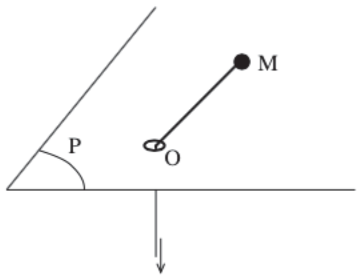
5.1 Exercice d'intro

Exercice 5.1–1:
Du sommet O d'une tour, on lance à $t = 0$ un objet assimilable à un point matériel A de masse m avec une vitesse horizontale $\vec{v}_0$. On néglige tous frottements, on suppose que le référentiel terrestre est galiléen.

1. Donner les équations horaires du mouvement de l'objet. On prendra l'origine des coordonnées en O.
2. Calculer le moment de la force de pesanteur en O à l'instant t.
3. Calculer le moment cinétique de l'objet en O à l'instant t.
4. Vérifier le théorème du moment cinétique.

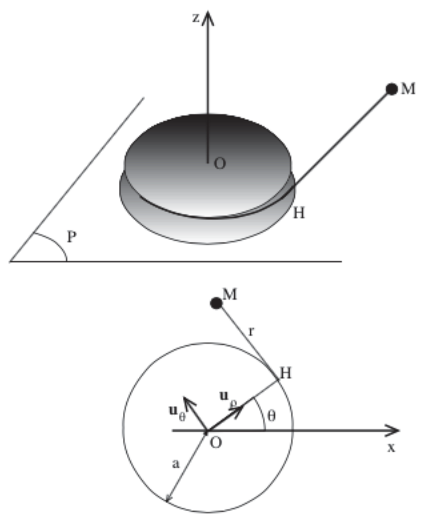
5.2 Exercices d'application

Exercice 5.2–1: Masse qui glisse sur une table
Un point matériel M de masse m glisse sans frottements sur un plan horizontal P. Il est retenu par un fil de masse négligeable qui coulisse à travers un petit trou situé en O et on fait varier manuellement la distance $\rho = ||\overrightarrow{OM}||$ selon la loi $\rho(t) = -Vt + \rho_0$ où V est une constante positive. A $t = 0$, M se trouve en M_0 et possède une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec $\overrightarrow{OM_0}$.



1. En applicant le théorème du moment cinétique, trouver une première grandeur conservé.
2. Dans le bon choix des coordonnées, exprimer la vitesse $\vec{v}$de M en fonction des données.
3. Calculer la tension exercée par le fil sur le point matériel. Montrer que sa norme tend vers une limite non physique lorsque ρ diminue. Commentaire ?

Exercice 5.2–2: Enroulement autour d'un cylindre
Un point matériel M de masse m glisse sans frottement sur un plan horizontal P. Il est retenu par un fil de masse négligeable qui s'enroule autour d'un cylindre fixe de rayon a et d'axe Oz, O étant dans le plan P. On note r la distance HM, H est le point où le fil rejoint le cylindre (H est également dans le plan P). On repère H par ses coordonnées polaires et on repère M dans la base liée à H $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$. On désigne par l la longueur totale du fil. A $t = 0$, le point M est lancé de telle façon que le fil s'enroule autour du cylindrent restant tendu. Voir figure ci après.



1. Faire le bilan des forces s'exerçant sue M.
2. Donner l'expression du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
3. Calculer la vitesse du point M et montrer qu'elle est toujours perpendiculaire à HM. En déduire que $||\vec{v}||$ et donc l'énergie cinétique de M sont constantes.
4. Calculer en fonction de m, r et E_c le moment cinétique de M en O ; puis la force s'exerçant sur M.

Exercice 5.2–3: Atome de Bohr

On considère un électron de charge $-e$ et de masse m en orbite autour d'un proton de charge $+e$ situé à l'origine O. Soit M le point représentant la position de l'électron, soient $r = ||\overrightarrow{OM}||$ et $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}$.

1. Montrer que la trajectoire de l'électron est plane. Dans la suite, on utilisera des coordonnées polaires (r, θ) pour décrire la position de l'électron. On négligera les effets de la gravitation.
2. La force $\vec{F}$ subie par l'électron a pour expression dans la base polaire : $\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\vec{u}_r$. Montrer que $\vec{F}$dérive d'une énergie potentielle $E_p(r)$ que l'on exprimera.
3. On note $\vec{u}_I = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta$. Soit $\vec{L}$ le moment cinétique de l'électron par rapport à O. Exprimer les coordonnées de $\vec{L}$ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_I)$ en fonction de m, r et $\dot{\theta}$.
4. On considère désormais que l'électron reste sur une orbite circulaire de rayon R. En utilisant le principe fondamental de la dynamique en déduire :
   (a) que le mouvement est circulaire uniforme.
   (b) l'expression de la norme v de la vitesse de l'électron en fonction de K, m et R.
   (c) que l'énergie mécanique totale est $E = -\frac{K}{2R}$.
5. Calculer la norme L du moment cinétique de l'électron en fonction de K, m et R. Retrouver ce résultat par une équation aux dimensions.
6. En 1913 Niels Bohr a fait l'hypothèse que L ne pouvait prendre que des valeurs du type suivant : $L_n = n\hbar$ où $n \in \mathbb{N}$ et $\hbar = 1.055\ 10^{-34}$Js ($\hbar$ est appelé constante de planck). Montrer alors que les valeurs possibles pour le rayon R et l'énergie mécanique totale E se mettent sous la forme :
$$R_n = \mathcal{R}_B n^2 \quad \text{et} \quad E_n = -\frac{\mathcal{E}_B}{n^2}$$

On exprimera $\mathcal{R}_B$ et $\mathcal{E}_B$ en fonction de $\hbar$, m et K. Donner les valeurs numériques de $\mathcal{R}_B$ et $\mathcal{E}_B$ respectivement en anastomoser en électron-volts. On donne $K = 2.31\ 10^{-28}$S.I et $m = 9.11\ 10^{-31}$kg.

6 | Dynamique spatiale

6.1 Vitesse de libération

Exercice 6.1–1: Vitesse de libération

Un projectile est lancé du sol d'un corp céleste, supposé sphérique et homogène, avec une vitesse $\vec{v}_0$ dirigé verticalement vers le haut. On négligera les frottements, le corp céleste à une masse M_p et un rayon R_p.

1. Exprimer la norme v de la vitesse du projectile lorsqu'il est à la distance r du centre du corp céleste.
2. En déduire que le projectile peut s'éloigner indéfiniment de la planète (et échapper à son attraction gravitationnelle) que si la vitesse initiale v_0 dépasse une valeur minimalev_l appelé vitesse de libération. Exprimer v_l en fonction de $g_0 = \frac{GM_p}{R_p^2}$.
3. *Application numérique :*
   - Pour la terre : $M = 6.10^{24}$kg et $R = 6400$km.
   - Pour la lune dont le rayon et la masse sont respectivement 3.7 et 81 fois plus petits que pour la terre.

   On rappelle que la constante gravitation universelle est $G = 6.67\,10^{-11}$SI.
4. Pour une masse M donnée, il existe un rayon limite pour lequel la lumière elle même ne peut plus s'échapper, on parle alors de trou noir. Calculer ce rayon pour une masse solaire ($M = 2\,10^{30}$kg).
   Ce rayon limite est dénommé rayon de Shwarzschild.

6.2 Dynamique spatiale

Exercice 6.2–1: Changement d'orbite

Un satellite de masse m tourne autour de la terre sur une orbite circulaire, orbite "basse" de rayon r_1 et de vitesse v_1. On veut le transférer sur une autre orbite circulaire, orbite "haute" de rayon $r_2 > r_1$ et de vitesse v_2. Pour cela, on lui décrier une demi-ellipse, dite orbite de transfert, qui se raccorde tangentiellement aux deux orbites circulaires précédentes. On allume les propulseurs du satellite pendant une durée brève au début et à la fin de cette demi-ellipse. Ceci correspond à communiquer à chaque fois au satellite, de façon instantanée, un supplément de vitesse sans changement de direction. Le but de cet exercice est de calculer ces suppléments ce vitesse $\Delta v_1 = v_1' - v_1$ et $\Delta v_2 = v_2 - v_2'$.

1. Faire un schéma représentant la terre, les deux orbites circulaires et l'orbite de transfert.
2. Déterminer la norme de la vitesse v_1 du satellite sur l'orbite circulaire de rayon r_1 en fonction de R, g_0 et r_1.
3. Même question que la question précédente mais pour v_2 sur l'orbite "haute".
4. En se servant des lois de conservation, établir deux relations reliant la vitesse initiale v_1' et finale v_2' sur l'orbite de transfert. En déduire v_1' et v_2' en fonction de R, g_0, r_1 et r_2.
5. Calculer les suppléments de vitesses Δv_1 et Δv_2 en fonction de R, g_0, r_1 et r_2.

Exercice 6.2–2: Retour d'un satellite

Pour ramener sur la terre un satellite géostationnaire S, on le ralentit au moment où il atteint un certain point A de sa trajectoire, sa vitesse passer donc d'une valeur u sur l'orbite géostationnaire à v_a mais gardant la même direction. On appellera T le centre de la terre.

1. Calculer u et le rayon r_s de l'orbite géostationnaire.
2. Comparer l'énergie de S sur l'orbite géostationnaire après ralentissement. En déduire la nature de sa nouvelle trajectoire $(\mathcal{E})$.
3. On veut que le satellite atterrisse en C tel que TA perpendiculaire à TC. Que représentent les points T, A et la distance TC pour la trajectoire $(\mathcal{E})$?
4. Calculer la vitesse v_a pour que l'atterrissage se déroule ainsi. Montrer que v_a s'exprime simplement en fonction de u, R_T et r_s.
   Aide : calculer d'abord a le demi-grand axe de $\mathcal{E}$ en fonction de R_T et de r_s.

Interrogation de Mécanique n°2
Mardi 17 Mars 2015, durée 1h30

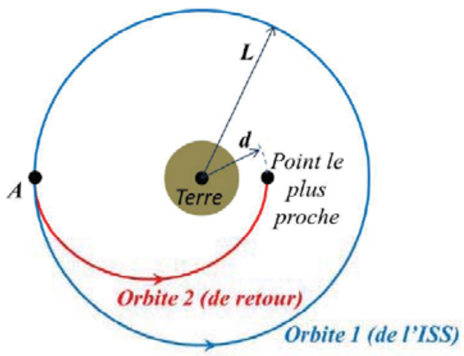
Les documents et les calculatrices sont interdits.
Les exercices sont **indépendants.**

1 Questions de cours

1. On considère deux référentiels R et R'. R est supposé galiléen et R' est en mouvement par rapport à R. Donner la loi de composition de vitesses et d'accélérations dans les deux cas suivant :
   (a) R' est en translation par rapport à R.
   (b) R' est en rotation pure avec le vecteur rotation instantanée $\vec{\omega}$ par rapport à R.
2. Enoncer le théorème du moment cinétique.
3. Lois de Kepler
   On va étudier un point de masse m soumis à une force centrale de gravitation par un centre attracteur de masse M placé en O.
   (a) Enoncer la première loi de Kepler.
   (b) Calculer la norme du moment cinétique L_0 en utilisant les coordonnées polaires.
   (c) A l'aide de la question précédente, montrer que la deuxième loi de Kepler peut s'écrire :
   $$\frac{dA}{dt} = \frac{L_0}{2m}$$
   où A est l'aire balayé par le rayon vecteur.
   (d) En sachant que l'aire d'une ellipse vaut πab (où a et b sont les deux demi-axes de l'ellipse). Prouver que le carré de la période T^2 des orbites est proportionnel au cube du demi grans axe a^3.
   aide : On donne les formules suivantes $b^2 = a^2(1 - e^2)$ et $L_0^2 = GMm^2a(1 - e^2)$

2 Retour depuis l'ISS

Un vaisseau spatial qui viens de ravitailler la station spatial international (ISS) est prêt à retourner sur terre. Le vaisseau spatial en orbite (que l'on va supposé circulaire dans cet exercice) avec l'ISS, veut modifier sa vitesse pour que sa nouvelle trajectoire le ramène plus proche de la terre (voir figure) et ainsi rentrer dans l'atmosphère terrestre.



Données : Masse du vaisseau m, masse de la terre M, orbite de l'ISS est circulaire de rayon L, le point le plus proche de l'orbite de retour du vaisseau est d et la constante de gravitation est G.

2.1 Pour le vaisseau sur l'orbite circulaire

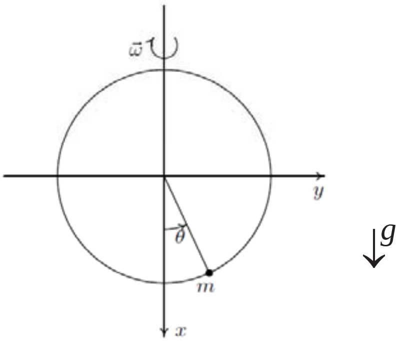
1. Donner l'expression de l'énergie totale d'un système de masse m en orbite autour d'un centre attacteur de masse M en fonction de G et des paramètres de l'ellipse.
2. Que deviens cette expression pour notre navette spatiale.
3. Réécrire cette énergie totale comme étant la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.
   En déduire la vitesse du vaisseau $\vec{v}_1$ en fonction de G, M et L.

2.2 Pour le vaisseau sur l'orbite 2 (orbite elliptique autour de la terre)

4. Donner l'énergie totale en fonction de G, M, m, d et L.
5. Réécrire cette énergie totale comme étant la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle au point A. En déduire la vitesse du vaisseau $\vec{v}_2$ en fonction de G, M, d et L.
6. Calculer le ralentissement nécessaire pour effectuer ce changement d'orbite.

3 Masse sur un cerceau tournant

Une masselotte m peut glisser sans frotter tout autour d'un cerceau de rayon R. Ce dernier tourne sur lui même avec une vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_x$. Le but de l'exercice est de trouver les positions d'équilibre de la masselotte.



3.1 Préliminaires

1. Faire le bilan de **toutes** les forces qui s'appliquent sur la masse dans le référentiel tournant (Oxy) lié au cerceau.
2. Montrer que la force d'inertie d'entrainement s'écrit :

$$\vec{F}_{ie} = m\omega^2 y\, \vec{u}_y = mR\omega^2 \sin\theta\, \vec{u}_y$$

3.2 Avec l'énergie

3. Montrer que la force d'inertie d'entrainement $\vec{F}_{ie}$ dérive d'une énergie potentielle $E_{p_{ie}}$. Donner son expression. On prendra $E_{p_{ie}} = 0$ sur l'axe de rotation (en $y = 0$).
aide : On rappelle que $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle si on peut écrire : $\vec{F} = -\overrightarrow{grad} E_p$
4. Donner l'énergie potentielle de pesanteur E_{p_g} en fonction de m, g, R et θ. On prendra l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur en $\theta = 0$.
5. (a) Déduire des questions précédentes que l'énergie potentielle totale s'écrit :

$$E_p(\theta) = mR\left(g(1 - \cos\theta) - \frac{1}{2}R\omega^2 \sin^2\theta\right)$$

   (b) En déduire les positions d'équilibres. Combien y en a-t-il ?
   (c) Etudier leur stabilité.

3.3 Avec le moment cinétique

6. Donner le moment du poids.
7. Donner le moment de la force d'inertie d'entrainement.
8. Trouver les positions d'équilibre. Combien y en a-t-il ?

Travaux Dirigés de Physique
Mécanique

Partie 3/3

PEIP 1 / PEIP C

TD 7

Dynamique des solides indéformables

7.1 Distribution continue de masse

7.1.1 Centre de masse

Exercice **7.1.1** *(★)* : Soit une tige homogène de masse m, longueur L. A l'une de ses extrémités est fixée une masse ponctuelle m'. Déterminer la position du centre de masse de ce système.

Exercice **7.1.2** *(★★)* **Disque évidé** : Soit une plaque constituée d'un disque D_1 de centre O et rayon a, dans laquelle a été évidé un disque D_2 de diamètre $OA = a$, A étant un point de la périphérie de D_1. Déterminer le centre de masse de la plaque.

7.1.2 Moment d'inertie

Exercice **7.1.3** *(★)* **Tige homogène** : Calculer le moment d'inertie d'une tige homogène de masse M, longueur L :

1. par rapport à un axe perpendiculaire à la tige et passant par son centre
2. par rapport à un axe perpendiculaire à la tige et passant par l'une de ses extrémités (on fera ce calcul de deux façons : d'abord directement, puis en utilisant le résultat de la question précédente et le théorème de Huygens)

Exercice **7.1.4** *(★★)* **Disque homogène** : Calculer le moment d'inertie d'un disque plan homogène de masse M et rayon R

1. par rapport à l'axe perpendiculaire au disque et passant par son centre
2. par rapport à un axe passant par un diamètre

Exercice **7.1.5** *(★★)* **Cylindre plein homogène** : Calculer le moment d'inertie d'un cylindre plein, homogène, de masse M, de hauteur h et de rayon R, par rapport à l'axe du cylindre.

Exercice 7.1.6 *(★★)* **Sphère pleine homogène** : Calculer le moment d'inertie d'une sphère pleine homogène de masse M, rayon R, par rapport à un axe passant par un de ses diamètres.

Exercice 7.1.7 *(★)* **Plaque carrée homogène** : Calculer le moment d'inertie d'une plaque carrée homogène de masse M et coté a

1. par rapport à un axe parallèle à un des ses côtés et passant par son centre
2. par rapport à un axe passant par un de ses côtés.

7.2 Dynamique

Exercice 7.2.1 *(★)* **Rotation d'un cylindre** : Un cylindre d'axe vertical, de masse M et rayon R, peut tourner sans frottements autour de son axe. Il est initialement immobile. Puis à partir du temps $t = 0$, on applique en un point A de la surface du cylindre une force horizontale et tangente à la surface du cylindre, de module constant F. Déterminer la vitesse angulaire acquise par le cylindre au bout de deux tours.

Exercice 7.2.2 *(★)* **Pendule** : Soit une tige homogène OA de masse m, longueur l. A l'extrémité A de la tige est fixée une masse ponctuelle m'. L'autre extrémité O de la tige est fixe, et le système peut osciller autour d'un axe horizontal passant par O. Déterminer la période des petites oscillations de ce pendule.

Exercice 7.2.3 *(★★)* **Pendule semi-circulaire** : Un solide S a la forme d'un demi-cercle de centre C et de rayon a, fermé par un diamètre. Le fil constituant S a une masse linéïque constante λ. Un repère orthonormé $CXYZ$ est lié au solide S de telle sorte que son origine coïncide avec C et que l'axe CZ soit perpendiculaire au plan de S (voir figure 7.1).

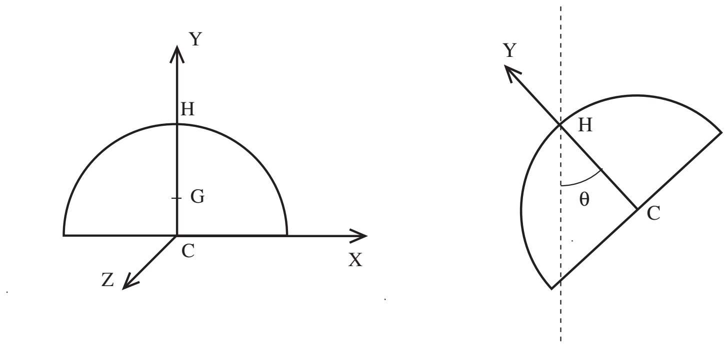


FIG. 7.1 – *pendule semi-circulaire*

1. Déterminer la position du centre de gravité de S.
2. Calculer le moment d'inertie de S par rapport à l'axe CZ.

3. On note H le point du demi-cercle situé sur l'axe CY. Le solide peut osciller sans frottements autour d'un axe horizontal HZ perpendiculaire au plan du demi-disque.
   (a) Calculer le moment d'inertie I_H de S par rapport à l'axe HZ.
   (b) Montrer que les petites oscillations du pendule sont sinusoïdales et calculer la période des oscillations, en fonction de m, la masse totale du pendule, g, d (distance HG) et I_H.

Exercice 7.2.4 *(★)* **Oscillations amorties** : Une tige homogène OM de masse m et longueur l, est mobile dans un plan vertical autour d'un axe horizontal fixe passanr par O. L'articulation en O est parfaite. Un dispositif amortisseur exerce en un point A de la tige ($OA = a$) une force de frottement fluide $\vec{f} = -k\vec{v_A}$ où $\vec{v_A}$ est la vitesse du point A.

1. Etablir l'équation différentielle satisfaite par le mouvement angulaire de la tige.
2. On pose $2\lambda = \frac{3ka^2}{ml^2}$ et $\omega_0^2 = \frac{3}{2}\frac{g}{l}$. On suppose que la force de frottement est suffisamment faible pour que λ^2 soit très petit devant ω_0^2. Montrer que les mouvements de faible amplitude sont des oscillations amorties et calculer la période des pseudo-oscillations.

Exercice 7.2.5 *(★★)* **La poulie** : Une poulie est constituée d'un disque de rayon R et de masse M. Elle peut tourner autour d'un axe horizontal Oy passant par son centre O. Une masse ponctuelle m est attachée à une corde (de masse négligeable) enroulée autour de la poulie. A l'instant $t = 0$, on débloque la poulie auparavant bloquée. On travaille dans un référentiel galiléen, et on utilisera un système d'axes $Oxyz$ (voir la figure 7.2, l'axe Oy étant orienté pour que le système d'axes soit direct). La position de la masse m sera repérée par $z(t)$. On rappelle que le moment d'inertie d'un disque de rayon R et de masse M par rapport à un axe passant par son centre s'écrit : $I = \frac{MR^2}{2}$.

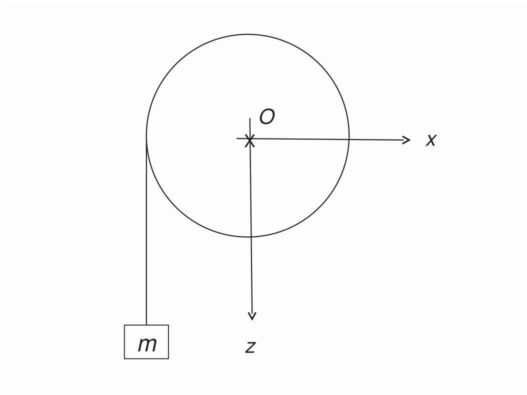


FIG. 7.2 – *La poulie*

1. Faire le bilan des forces appliquées d'une part à la poulie, d'autre part à la masse m (bien tenir compte de la tension de la corde qui est égale en norme aux deux extrémités, mais de direction opposée). Les représenter très soigneusement sur un dessin.
2. Ecrire le principe fondamental de la dynamique pour la masse m. Le projeter sur l'axe Oz.
3. Exprimer vectoriellement le moment de la tension de la corde appliqu'ee à la poulie, par rapport au point O, en fonction de R, T (norme de la tension) et $\overrightarrow{u_y}$

4. Exprimer la projection du moment cinétique de la poulie par rapport à O sur l'axe de rotation en fonction de M, R et $\frac{dz}{dt}$.
5. En déduire l'accélération de la masse m, $\frac{d^2z}{dt^2}$ en fonction de g, m et M. Que se passe-t-il quand la masse M de la poulie devient très faible par rapport à m, ou très grande ? Pouvait-on prévoir ces résultats ?

Exercice 7.2.6 *(★★★)* **Roulement sans glissement d'un cylindre** : Un cylindre homogène d'axe Oz, de masse M et de rayon R, roule sans glisser sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Soient v_G la norme de la vitesse de son centre de masse et ω la vitesse angulaire du mouvement de rotation du cylindre autour de son axe, à l'instant t.

1. Etablir l'expression de l'énergie cinétique du cylindre à un instant donné, en fonction des données, de v_G et ω.
2. Quelle relation entre v_G et ω la condition de roulement sans glissement impose-t-elle ? Soit I le point du cylindre qui est en contact avec le sol à l'instant t. Quelle est à l'instant t la vitesse de ce point ?
3. Indiquer sur un schéma les forces qui s'exercent sur le cylindre.
4. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, déterminer la vitesse du centre de gravité à l'instant t. (on supposera que le cylindre est laché sans vitesse à l'instant $t = 0$).

Interrogation de Mécanique n°3
Vendredi 17 Avril 2015, durée 1h30

Les documents et les calculatrices sont interdits.
Les exercices sont **indépendants.**

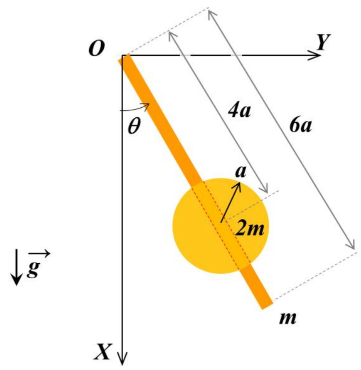
Rendre un exercice par feuille double afin de faciliter la correction

1 Questions de cours (6 pts)

1. Démontrer que la quantité de mouvement du centre de masse est nulle dans le référentiel du centre de masse (*aide : vous pouvez utiliser la définition du centre de masse*).
2. Rappeler le théorème de Huygens, en précisant bien chaque terme de l'expression.
3. Rappeler l'expression du moment cinétique et le théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe Δ.
4. Donner l'expression de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe.
5. Donner l'expression qui permets de calculer la vitesse $\vec{v}_A$ d'un point A d'un solide en fonction de la vitesse $\vec{v}_B$ d'un point B du même solide et de sa vitesse angulaire $\vec{\omega}$.

2 Horloge murale à pendule (8 pts)

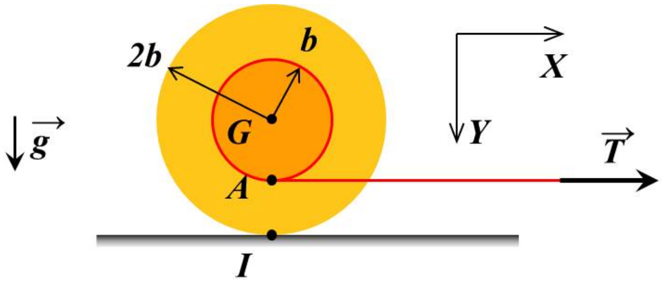
Dans un marché aux puces, vous remarqué une ancienne horloge murale à pendule. Le vendeur vous lance le défi de deviner la période d'oscillation (malheureusement le pendule n'est pas en train d'osciller, ça aurait été trop facile sinon !). Le vendeur vous fourni plus de détails (voir figure) : le pendule est composé d'un disque de rayon a et de masse $2m$, d'une tige de longueur $6a$ et de masse m.



1. Calculer la position du centre de masse du pendule formé par l'ensemble {disque + tige}.
2. Montrer que le moment d'inertie du pendule par rapport à O vaut $I_O = 45ma^2$.
(aide : le moment d'inertie d'un disque de masse M et de rayon R par rapport à son centre de masse est $\frac{1}{2}MR^2$ et pour une tige de masse M et de longueur L par rapport à son centre de masse est $\frac{1}{12}ML^2$, n'oublier pas de bien justifier vos calculs !)
3. Ecrire l'énergie potentielle du pendule en prenant l'origine d'énergie potentielle en $x = 0$.
4. Ecrire l'énergie cinétique du pendule en fonction de I_O et de la vitesse angulaire.
5. A l'aide de la conservation de l'énergie mécanique totale (on justifiera bien son utilisation), montrer que l'équation du mouvement s'écrit :
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{11g}{45a}\sin\theta = 0$$
6. En déduire la fréquence des petites oscillations ω, puis sa période T en fonction de g et a.

3 Yoyo qui roule (6 pts + 2 pts bonus)

Un Yoyo de masse m est posé sur le sol, on tire la ficelle pour le rembobiner avec une tension $\vec{T}$ constante. Pour que cette méthode soit efficace, il faut que le yoyo roule sans glisser. On se propose de calculer la tension maximale sans qu'il y ait glissement.



1. Représenter sur une figure **toutes** les forces qui agissent sur le yoyo.
2. Calculer le moment de ces forces par rapport au point I.
3. Calculer le moment d'inertie J_I du yoyo par rapport au point I en sachant que le moment d'inertie par rapport à son centre de masse vaut $J_G = 2mb^2$.
4. En utilisant le théorème du moment cinétique, calculer l'accélération angulaire $\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$.
5. Vérifier que l'accélération du centre de masse vaut $\vec{a}_G = \dfrac{T}{3m}\vec{u}_x$. Pour cela, vous pouvez utiliser l'accélération angulaire et la condition de roulement sans glissement.

Questions bonus :

6. En utilisant le principe fondamental de la dynamique selon la direction $\vec{u}_x$, trouver un rapport entre la norme de la force de frottement statique f et la norme de la tension T.
7. Si la norme de la force de frottement statique maximale est f_{max}, combien vaut la norme de la tension maximale T_{max} sans qu'il y ait glissement ? Donner le résultat de T_{max} en fonction de k_s coefficient de frottement statique et du poids mg.