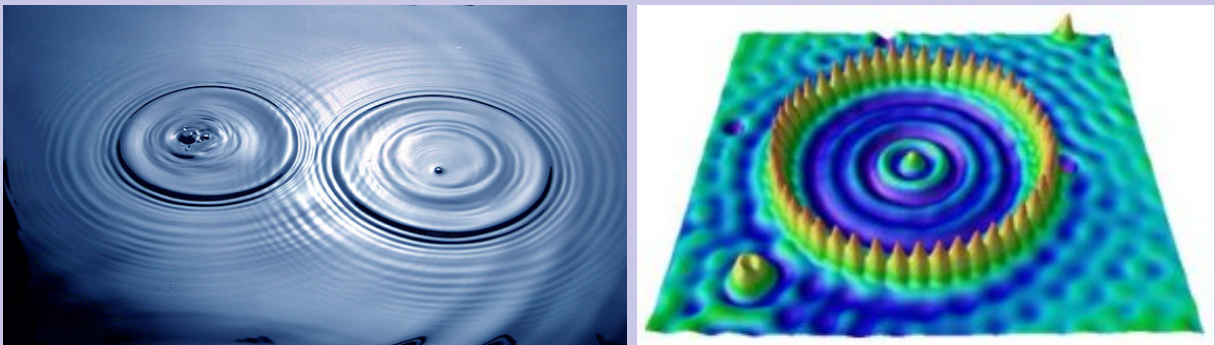


Polycopié de cours Peip2 S3
Année universitaire 2021-2022

PHYSIQUE DES ONDES



Julien BASSET

Enseignant-chercheur au Laboratoire de Physique des Solides
Groupe Nanostructures à la Nanoseconde (NS2)
Bâtiment 510 - Université Paris Saclay

julien.basset@universite-paris-saclay.fr

<https://www.equipes.lps.u-psud.fr/ns2/index.shtml>

A propos de la couverture

Figure de gauche : Interférences à la surface de l'eau induite par 2 sources ponctuelles comme deux cailloux lancés dans l'eau.

Figure de droite : Enclos quantique. Des atomes de Fer ont été déplacés à la surface d'un métal en cuivre pour former un cercle. La géométrie circulaire permet de confiner des ondes de densités électroniques qui révèlent la nature ondulatoire de la matière. ©IBM Almaden Visualization Lab

Table des matières

i	Organisation de la matière et spécificités Covid-19	iii
i.i	Organisation	iii
i.ii	Spécificités Covid-19	iii
ii	Préliminaires et bibliographie	v
1	Introduction	1
1.1	Qu'est-ce qu'une onde? Exemples	1
1.1.1	Les ondes mécaniques	1
1.1.2	Les ondes qui transportent les forces fondamentales	2
1.1.3	Les ondes de la mécanique quantique (ou ondes de matière)	2
1.1.4	Parti pris de ce cours	3
1.2	Tentative de définition d'une onde	3
1.3	Importance des ondes en physique	4
1.3.1	Onde versus particule en physique classique	4
1.3.2	Importance des ondes dans la vie courante	4
1.4	Caractériser une onde	5
1.5	Reconnaître une onde	5
2	Phénomène de propagation et équation d'onde	7
2.1	Propagation sans atténuation ni déformation, l'équation d'onde de d'Alembert	8
2.1.1	Solution générale de l'équation d'onde	9
2.1.2	Rappels de mathématiques sur les dérivées partielles et les équations différentielles linéaires	10
2.2	Onde progressive sinusoïdale	10
2.2.1	Définition	10
2.2.2	Notations complexes	11
2.2.3	Equation d'onde et relation de dispersion	12
2.2.4	Vitesse de phase et dispersion	12
2.3	Autres exemples d'équations d'onde linéaires et de relations de dispersion	13
2.4	Equation d'onde de d'Alembert tridimensionnelle	14
3	Équation d'onde de d'Alembert : corde vibrante et tuyau sonore	17
3.1	Corde vibrante (CV)	18

3.1.1	Equation d'onde et vitesse des ondes sur une corde	18
3.1.2	Energie mécanique	21
3.1.3	Impédance mécanique	22
3.2	Tuyau sonore (TS)	23
3.2.1	Equation d'onde	23
3.2.2	Vitesse du son dans un fluide : compressibilité isotherme ou isentropique?	25
3.2.3	Vitesse du son dans un solide	26
3.2.4	Energie mécanique	27
3.2.5	Impédance acoustique et impédance acoustique caractéristique	27
4	Ondes libres : propagation et transport énergie	29
4.1	Puissance transportée par une onde - exemple de la corde vibrante	30
4.2	Conservation locale de l'énergie mécanique - démonstration pour la corde vibrante	30
4.3	Vérification de la conservation pour la corde vibrante	31
4.4	Transport d'énergie par une onde progressive : vitesse de propagation de l'énergie sur une corde vibrante	32
4.5	Puissance transportée par une onde acoustique dans un tuyau sonore	33
4.6	Energie, puissance et intensité d'une onde progressive	33
4.6.1	Généralisation	34
4.7	Dilution de l'énergie d'une onde progressive à trois dimensions	35
4.8	A retenir	36
5	Réflexion et transmission des ondes. Ondes stationnaires	37
5.1	Réflexion totale d'une onde progressive quelconque	38
5.1.1	Mur dur	38
5.1.2	Mur doux	38
5.1.3	Cas du tuyau sonore	39
5.2	Réflexion totale d'une onde progressive sinusoïdale, onde stationnaire	40
5.3	Réflexions totales multiples d'une onde progressive sinusoïdale, onde stationnaire de fréquence quantifiée	41
5.3.1	Quantification de la fréquence, phénomène de résonance : fréquences propres	41
5.3.2	Modes propres	42
5.3.3	Décomposition sur les modes propres (analyse harmonique). Exemple de la corde de guitare	42
5.4	Réflexion et transmission partielles d'une onde progressive à l'interface entre deux milieux	43
5.4.1	Plan de séparation de deux fluides	43
5.4.2	Jonction de deux tuyaux de sections différentes	45
6	Interférences et battements	47

6.1	Introduction	47
6.1.1	Trous de Young	48
6.1.2	Battelements	49
6.1.3	Diffraction	49
6.2	Mathématiques des interférences, principe de superposition et intensité= $ \text{amplitude} ^2$	50
6.3	Battelements	50
6.4	Interférences	52
6.5	Diffraction	53
6.5.1	Explication qualitative de la diffraction	54
6.6	A retenir	54
7	Conclusion	55
7.1	Résumé : ce que nous avons appris, ce que nous devons retenir	55
7.2	Sujets non-traités : ouvertures	55
A	Repères historiques sur les ondes	57

Organisation de la matière et spécificités Covid-19

i.i Organisation

L'enseignement des ondes est répartie sur le début du semestre (jusqu'aux vacances de la Toussaint) et contient trois volets. Un cours magistral reprenant les thèmes de ce polycopié, des travaux dirigés (TDs) et enfin deux séances de travaux pratiques (TPs). Le cours magistral sera délivré par Julien Basset. Les enseignants de TDs sont Dana-Codruta Marinica (Groupe 1), Jean-Baptiste Touchais (Groupe 2) et Lise Tazaïrt (groupe 3) et enfin les TPs seront encadrés par Lise et Jean-Baptiste. Le cours comprendra 9 séances de 2h, les TDs sont au nombre de 11 séances de 2 heures et il y aura 2 séances de 4h pour les TPs. Les TDs couvrent l'intégralité du cours tout en assurant une certaine complémentarité. Il est donc essentiel de travailler l'ensemble de la matière. Les TPs sont 2 illustrations essentielles des ondes. Un premier TP permet de mettre en avant les notions fondamentales d'ondes progressives sinusoïdales grâce à l'utilisation d'équipement permettant d'émettre et de détecter des ultrasons. Le second TP est une illustration du concept d'onde stationnaire grâce à une corde de guitare.

i.ii Spécificités Covid-19

Ce qui suit peut évoluer à tout moment et émane de la présidence de l'Université en date du 27 aout 2021 :

« La situation sanitaire actuelle et [...] permettent d'anticiper une rentrée étudiante en présentiel à 100%, sous certaines conditions et en continuant à mettre en oeuvre les mesures sanitaires permettant de prévenir une reprise épidémique [...], ainsi :

- la vigilance et les gestes barrières restent prioritaires ;
- l'Université encourage fortement la vaccination de ses communautés étudiantes et académiques . »

Préliminaires et bibliographie

Remarques générales :

Ces notes de cours présentent une introduction aux ondes scalaires. Les démonstrations des principales équations, à partir de certains principes fondamentaux, sont détaillées afin que ces notes ne soient pas qu'un catalogue de "formules". les équations importantes et à retenir sont encadrées.

Les ouvrages suivants sont recommandés comme compléments éventuels à ces notes de cours :

- Le livre de physique des ondes de Berkeley [1] écrit par F.S. Crawford. C'est un livre qui contient à la fois la discussion des vibrations/oscillations mécaniques et des ondes. Ce livre traite des phénomènes communs à toutes les ondes, ce qui est aussi le parti pris de ce cours. Il contient de nombreuses suggestions d'expériences à réaliser soit même.
- Le cours de physique de Richard Feynman contient quelques chapitres sur les ondes, en particulier le tome 1 de Mécanique [2]. Je recommande en particulier les chapitres 47 (son et équation d'onde), 48 (battements), 49 (modes), 51 (exemples d'ondes), 29 (interférences avec la lumière).
- "Ondes et Vibrations" de Etienne Gravier edition Ellipses [4].

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1	Qu'est-ce qu'une onde ? Exemples	1
1.1.1	Les ondes mécaniques	1
1.1.2	Les ondes qui transportent les forces fondamentales	2
1.1.3	Les ondes de la mécanique quantique (ou ondes de matière)	2
1.1.4	Parti pris de ce cours	3
1.2	Tentative de définition d'une onde	3
1.3	Importance des ondes en physique	4
1.3.1	Onde versus particule en physique classique	4
1.3.2	Importance des ondes dans la vie courante	4
1.4	Caractériser une onde	5
1.5	Reconnaître une onde	5

1.1 Qu'est-ce qu'une onde ? Exemples

La notion d'onde recouvre deux aspects : vibration dans le temps et propagation dans l'espace d'une perturbation. Les exemples les plus courant d'ondes sont les vagues, le son et la lumière. Dans la suite nous essayons de donner plus d'exemples et de les classer en fonction de leur nature.

1.1.1 Les ondes mécaniques

Il s'agit d'ondes dans un milieu constitué de nombreux constituants comme un fluide (gaz ou liquide) ou un solide. Une onde est alors un phénomène collectif qui implique un grand nombre de particules microscopiques. Ces ondes existent en tant que perturbation dans un milieu.

- Les ondes sonores (ou acoustiques) dans un fluide i.e. le son dans l'air ou dans l'eau par

exemple. La quantité qui vibre est la densité de particules (mais aussi la pression). La vibration est longitudinale.

- Les ondes sur une corde (e.g. une corde de guitare). La vibration est transverse.
- Les ondes sur une membrane (e.g. un tambour). Là aussi la vibration est transverse.
- Les ondes élastiques dans un solide : elles peuvent exister dans son volume (e.g. le son dans un solide – ondes longitudinales – et les ondes de cisaillement – ondes transverses) mais aussi à sa surface (e.g. un séisme).
- Les ondes à la surface libre d'un liquide (e.g. les vagues à la surface de la mer, le mascaret dans la Seine ou la Gironde, les raz-de-marée ou tsunami). Plusieurs régimes : la houle (ondes de gravité) et vaguelettes ou ondes capillaires (e.g. les rides à la surface d'un lac).
- Les ondes de compression dans un ressort (ce sont des ondes longitudinales). Les ondes transverses sur un ressort.
- La ola dans un stade de foot (ou onde mexicaine). Il s'agit d'une onde transverse.

1.1.2 Les ondes qui transportent les forces fondamentales

On dit aussi les ondes vecteur d'interaction. Il s'agit d'ondes qui n'ont pas besoin de milieu matériel pour se propager (elles peuvent se propager dans le vide, il n'y a pas besoin du fameux et mystérieux ether). Ces ondes médient les interactions fondamentales¹ entre particules. Par exemple, les ondes électromagnétiques transportent la répulsion électrique entre deux charges de même signe.

- Les ondes électromagnétiques (e.g. la lumière, les ondes radio, les rayons X, les IR, les UV, etc.). Les champs électriques et magnétiques vibrent. Il s'agit d'ondes transverses. Elles transportent les interactions électriques et magnétiques.
- Les ondes gravitationnelles. Elles transportent l'interaction attractive entre corps massifs (i.e. la gravitation). A ne pas confondre avec les ondes de gravité qui est le nom donné à un certain type de vagues.
- Les ondes qui transportent l'interaction nucléaire forte (c'est l'interaction responsable de l'attraction entre un neutron et proton par exemple).
- Les ondes qui transportent l'interaction nucléaire faible (c'est l'interaction responsable de la radioactivité β).

1.1.3 Les ondes de la mécanique quantique (ou ondes de matière)

Ce sont les ondes associées à la description quantique d'un électron par exemple (idée de de Broglie 1924). La quantité qui vibre est l'amplitude de probabilité de présence de l'électron (il s'agit d'une quantité complexe au sens de \mathbb{C} et qu'on l'appelle la fonction d'onde). L'équation des ondes de matière s'appelle l'équation de Schrödinger.

1. Il existe 4 interactions fondamentales : électromagnétique, gravitationnelle, (nucléaire) faible et (nucléaire) forte.

1.1.4 Parti pris de ce cours

Dans ce cours, nous nous intéresserons aux phénomènes communs à toutes les ondes et pas seulement à un type d'onde. Néanmoins, nous aurons principalement en tête les exemples du son, de la lumière et de la corde vibrante. Un livre très bien fait et avec le même parti pris est le cours de physique de Berkeley (volume 3) appelé Ondes et écrit par F.S. Crawford (édité soit chez A. Colin soit chez Dunod).

1.2 Tentative de définition d'une onde

Il est difficile de donner une définition générale d'une onde. C'est pourquoi il ne s'agit que d'une tentative. Mettons en avant deux propriétés fondamentales des ondes :

1. Pour qu'une onde existe, il faut un champ (au sens mathématique). Un champ est une grandeur physique (un déplacement u par exemple) qui est défini en tout point de l'espace x et à tout instant t . D'où la notation $u(x, t)$ pour désigner le champ u défini dans l'espace temps (x, t) . Une onde est alors une perturbation dans ce champ qui vibre (ou oscille) dans le temps et se propage (ou se déplace) dans l'espace². En une phrase de résumé : **une onde est une perturbation dans un champ et cette perturbation vibre dans le temps et, en général, se déplace dans l'espace.**

La quantité $u(x, t)$ obéit à une **équation d'onde**. Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles qui relie la vibration en temps à la vibration d'espace. Exemple : $\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u$ est l'équation d'onde de d'Alembert (c est la vitesse de propagation de l'onde).

2. Une onde **transporte** des grandeurs physiques³ telles que de l'**information**⁴ (ex : ondes radio), de l'**énergie** (ex : la lumière du soleil qui nous chauffe) et de la **quantité de mouvement** ou de l'impulsion (ex : la pression de radiation de la lumière)⁵. Par contre, elle **ne transporte pas de matière** (est-ce toujours vrai?).

2. Le déplacement dans l'espace n'est pas nécessairement une oscillation : voir le cas des ondes évanescentes. Nous ne parlerons pas des ondes évanescentes dans ce cours. Les ondes stationnaires (qu'on étudiera plus tard) ne rentrent pas très bien dans notre définition d'une onde : elles vibrent dans le temps mais ne se déplacent pas dans l'espace. Il y a des noeuds et des ventres.

3. Elle peut également transporter d'autres quantités physiques telles que du moment cinétique, de la charge électrique, etc.

4. L'information en tant que grandeur physique est une notion subtile avec laquelle vous n'êtes sans doute pas familiers. Elle est définie dans le cadre de ce qu'on appelle le traitement du signal ou la théorie de l'information qui prend sa source dans des idées de physique statistique et de thermodynamique. Voir par exemple la notion d'entropie de Shannon.

5. Selon la relativité restreinte (Einstein 1905), la vitesse maximale de propagation de l'information et de l'énergie est 3.10^8 m/s, qu'on appelle habituellement la vitesse de la lumière dans le vide. Elle est usuellement notée c : attention à ne pas confondre avec le c qui apparaît dans l'équation d'onde de d'Alembert, qui est la célérité de l'onde et qui suivant le contexte désigne la vitesse du son ou la vitesse des ondes sur une corde ou la vitesse de la lumière ou etc.

En conséquence quand on a affaire à une onde, on peut se poser les questions suivantes : quelle est la quantité qui vibre (un champ électrique ? une densité d'atomes) ? Quelle est sa nature (est-ce un champ scalaire, vectoriel, réel ou complexe,...) ? Par exemple : pour une onde sonore le champ est un scalaire réel c'est juste une pression ou une densité ; pour la lumière c'est un champ électrique et il faut donc donner les trois composantes du vecteur champ électrique ; pour une onde de matière associée à un électron c'est ce qu'on appelle la fonction d'onde qui est un scalaire complexe (équivalent à deux scalaires réels), etc. Dans quel espace-temps se produit cette vibration (pour la corde c'est (x, t) , pour la membrane d'un tambour c'est (x, y, t) , pour le son dans l'espace libre c'est (x, y, z, t) , etc.) ?

1.3 Importance des ondes en physique

1.3.1 Onde versus particule en physique classique

En physique classique (au sens de non-quantique, i.e. en gros la physique telle qu'on la connaissait juste avant 1900), il existe deux types ou familles d'objets d'étude :

1. Les particules ou corpuscules. Une particule est un objet localisé (dans son idéalisation : un objet ponctuel) qui a une trajectoire (i.e. une position à chaque instant). Quand on détecte une particule c'est en bloc (elle est là ou elle n'est pas là). Exemple : une bille, une voiture, un électron (classique), un atome, etc. C'est le royaume de la mécanique newtonienne du point (et des solides rigides).
2. Les ondes. Une onde est un objet étendu (dans son idéalisation : un objet délocalisé dans tout l'espace come une onde plane). Exemple : vagues, lumière, son, etc. La détection d'une onde ne se fait pas en bloc, l'intensité de l'onde peut être arbitraire. Les ondes sont décrites par des équations d'onde (comme celle de d'Alembert).

Ces deux familles sont incompatibles, elles s'excluent mutuellement (un objet classique est soit une onde, e.g. le son, soit une particule, e.g. une bille, mais ne peut être les deux à la fois).

La mécanique quantique dépasse cette dichotomie. Les objets quantiques sont à la fois des particules et des ondes (plus exactement : ils se comportent dans certaines situations comme des particules classiques et dans d'autres comme des ondes). On parle de dualité onde-corpuscule. L'analogie du cylindre permet de comprendre comment un objet (le cylindre) peut apparaître comme un cercle et comme un rectangle suivant les circonstances.

1.3.2 Importance des ondes dans la vie courante

Importance des ondes dans la vie courante à la fois dans la nature et dans les applications technologiques. Communications entre êtres vivants par la lumière (vision), les sons (audition). Télécommunications : radio, TV, téléphone fixe, internet, téléphone portable, WiFi, etc. Four micro-onde. Etc.

1.4 Caractériser une onde

- Vibration dans le temps caractérisée par une **fréquence**⁶ (e.g. 5 vibrations par seconde signifie une fréquence de 5 Hz) et vibration dans l'espace caractérisée par une **longueur d'onde**⁷ (e.g. la vibration se répète tous les 0.2 mètres, alors la longueur d'onde est de 0.2 m). Remarque : ces notions ne sont bien définies que pour une onde sinusoïdale.
- Ondes **longitudinales** (ex : onde de compression dans un ressort) versus ondes **transverses** (ex : corde vibrante), ni l'une ni l'autre (ex : vagues)
- Onde **progressive** (i.e. qui se déplace) versus onde **stationnaire** (présence de noeuds et de ventres, vibration dans le temps mais pas de propagation dans l'espace).
- Ondes **libres** (ex : le son dans l'espace 3D) ou **confinées** (ex : corde de guitare immobile à ses deux extrémités) ou **guidées** (ex : fibre optique)
- Ondes scalaire (ex : onde sonore) ou vectorielle (notion de polarisation, ex : la lumière) ou tensorielle (ex : ondes gravitationnelles) ou ...
- **ondes de volume** (ex : le son dans l'eau) ou **ondes de surface** (ex : les vagues à la surface de la mer)
- Forme du **front d'onde** : est-ce une **onde plane**, une **onde sphérique**, etc ?

1.5 Reconnaître une onde

Comment reconnaître si l'on a affaire à une onde ? Quel est la preuve irréfutable, la signature, l'empreinte digitale de la nature ondulatoire d'un objet ou d'une quantité physique ? Il s'agit des interférences au sens large incluant la diffraction, les battements, etc. Si on arrive à produire des interférences alors on sait qu'il s'agit d'une onde. Thomas Young a ainsi montré la nature ondulatoire de la lumière en 1801.

Pour obtenir des interférences, il faut scinder le flux d'ondes (ou de particules) émis par une source primaire en deux sources secondaires (en général en interposant un écran percé de deux trous – c'est l'expérience dite des trous de Young). Puis il faut détecter ce flux sur un deuxième écran. Si le signal obtenu sur l'écran de détection lorsque les deux trous sont ouverts n'est pas simplement la somme de ce qu'on obtient lorsqu'un seul trou est ouvert (d'abord le trou #1 seul ensuite le trou #2 seul), c'est qu'il y a interférences entre les deux sources secondaires et qu'on a donc affaire à des ondes.

6. Ou une pulsation ou une période.

7. Ou un vecteur d'onde ou un nombre d'onde.

Phénomène de propagation et équation d'onde

- But de ce chapitre : Nous allons étudier dans ce chapitre les phénomènes de propagation entrevus dans le chapitre précédent de manière plus formelle. Il s'agit d'un chapitre très important. Nous allons surtout étudier les phénomènes de propagation sans atténuation qui sont décrits par l'équation de d'Alembert. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire. Nous verrons également des exemples de phénomènes propagatifs décrits par d'autres équations différentielles éventuellement non-linéaires. Nous définirons la relation de dispersion d'une onde et étudierons les solutions sinusoïdales de l'équation de d'Alembert qui jouent un rôle important. L'essentiel du chapitre est consacré aux équations d'onde à une dimension. Nous verrons néanmoins en fin de chapitre l'extension à la propagation à deux et trois dimensions ce qui nous permettra d'étudier la notion de front d'onde.
- Lien avec cours de Mathématiques :
 - Etude de fonctions de plusieurs variables et des dérivées partielles (cours Maths S1)
 - Etude des équations différentielles linéaires (cours Maths S3).
 - Nombres complexes (cours Maths S1).

Sommaire

2.1	Propagation sans atténuation ni déformation, l'équation d'onde de d'Alembert	8
2.1.1	Solution générale de l'équation d'onde	9
2.1.2	Rappels de mathématiques sur les dérivées partielles et les équations différentielles linéaires	10
2.2	Onde progressive sinusoïdale	10
2.2.1	Définition	10
2.2.2	Notations complexes	11
2.2.3	Equation d'onde et relation de dispersion	12
2.2.4	Vitesse de phase et dispersion	12
2.3	Autres exemples d'équations d'onde linéaires et de relations de dispersion	13
2.4	Equation d'onde de d'Alembert tridimensionnelle	14

2.1 Propagation sans atténuation ni déformation, l'équation d'onde de d'Alembert

Imaginons faire claquer un fouet : une perturbation se déplace sur le fouet qui va de la main vers l'extrémité opposée. Si on idéalise, on peut imaginer une corde infiniment longue sur laquelle on crée une perturbation quelconque qui se propage sans atténuation (son amplitude reste la même au cours du mouvement) et sans déformation (la forme de la perturbation, on dit du paquet d'onde, reste la même au cours du mouvement). La propagation se fait à vitesse constante ? Pour formaliser cette situation appelons x la coordonnée le long de la corde, t le temps et u le déplacement de la corde par rapport à sa position au repos ($u = 0$). On imagine que la corde ne peut se déplacer que dans une seule direction perpendiculaire à la direction x . On appelle $c > 0$ la **vitesse de propagation (ou célérité) de l'onde**. Alors pour une onde se déplaçant vers les x croissant, on a

$$u(x, t) = u(x - ct, 0)$$

(attention au signe !) ceci garantit que l'onde conserve sa forme et son amplitude. On peut donc écrire que $u(x, t)$ est une fonction quelconque¹ de la variable $x - ct$ ou de manière équivalente de la variable $x/c - t$ ou encore de la variable $t - x/c$ etc. On va appeler $f(z)$ cette fonction² et écrire $u(x, t) = f(t - x/c)$. La fonction f donne la forme de l'onde (qui peut être une bosse, une montagne, un sinus, une marche, etc.). Alors $\partial_t u = -c \partial_x u$ et en dérivant une deuxième fois

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

On aurait également pu considérer une onde se déplaçant vers les x décroissant, alors

$$u(x, t) = u(x + ct, 0)$$

qui montre que $u(x, t)$ est une fonction d'une seule variable $x + ct$ (ou encore $t + x/c$ etc). Appelons $g(z)$ cette fonction, alors $u(x, t) = g(t + x/c)$. On montre alors que $\partial_t u = c \partial_x u$ (attention au signe !) et que

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

qui est encore une fois la même équation différentielle que ci-dessus. Cette équation est appelée **l'équation d'onde de d'Alembert** (ou comme c'est la plus célèbre et la plus ancienne équation d'onde, elle est aussi simplement appelée "L'équation d'onde") unidimensionnelle (1D). Du point de vue mathématique, il s'agit d'une équation aux dérivées

1. Pas tout à fait quelconque au sens des mathématiciens. On va quand même supposer qu'il s'agit d'une fonction deux fois différentiable.

2. On note $f(z)$ la fonction et pas $f(x)$ car x est ici déjà utilisé pour désigner la coordonnée d'espace.

partielles, linéaire, à coefficients constants et du deuxième ordre. En raison de la linéarité de l'équation, on peut vérifier qu'une combinaison linéaire quelconque des solutions $f(t - x/c)$ et $g(t + x/c)$ est aussi une solution de l'équation d'onde. Soit α et β deux constantes et $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions quelconques, alors $u(x, t) = \alpha f(t - x/c) + \beta g(t + x/c)$ est une solution de l'équation d'onde. C'est ce qu'on appelle le **principe de superposition**.

Le principe de superposition est valable pour toute équation différentielle linéaire.

Pour comprendre ce qu'est une équation linéaire, examinons quelques équations d'onde qui ne sont pas linéaires. Dans tous ces exemples, A et B sont des constantes réelles. Vous pouvez pour vous entraîner, trouver quel est le terme (ou les termes) responsable(s) de la non-linéarité dans chacun des exemples suivant :

- L'équation de Korteweg - de Vries

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

décrit le mascaret.

- L'équation de Gross-Pitaevskii (aussi appelée Schrödinger non-linéaire) :

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B |u|^2 u$$

où u est ici un champ complexe et $i = \sqrt{-1}$. Cette équation décrit les condensats de Bose-Einstein au zéro absolu.

- L'équation de sine-Gordon (à comparer à celle de Klein-Gordon qu'on verra un peu plus loin) :

$$\frac{\partial u^2}{\partial t^2} = A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \sin u$$

ici $A = c^2$ et $B = -\omega_0^2$.

2.1.1 Solution générale de l'équation d'onde

On peut démontrer (mais nous ne le ferons pas ici) que la solution générale de l'équation d'onde de d'Alembert 1D est

$$u(x, t) = f(t - x/c) + g(t + x/c)$$

avec $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions quelconques. La solution générale est donc la superposition d'une onde progressive vers la droite et d'une onde progressive vers la gauche. La fonction f (respectivement g) donne la forme de l'onde progressive vers la droite (respectivement la gauche).

2.1.2 Rappels de mathématiques sur les dérivées partielles et les équations différentielles linéaires

Rappels très succints sur les dérivées partielles.

- Notations : ∂ se lit “d rond” ; d se lit “d droit” et δ se lit “delta”. Quand on dérive par rapport au temps t on note souvent $\partial u / \partial t = \partial_t u = \dot{u}$ et pour une dérivée d'espace $\partial u / \partial x = \partial_x u = u'$.
- Définition de la dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables (deux ici) $f(x, y) : \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+dx, y) - f(x, y)}{dx}$ où la différentielle $dx \rightarrow 0$. C'est la dérivée de $f(x, y)$ par rapport à x en maintenant y fixée. Le symbole $\partial f / \partial x$ est non sécable ; il ne signifie pas la fraction (le rapport) entre ∂f et ∂x . Ces objets ∂x et ∂f n'existent pas. Par contre, on raccourcit souvent $\partial f / \partial x$ en $\partial_x f$.
- Différentielle totale de $f(x, y) : df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$
- Dérivée totale de $f(x, y) : \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}$ qui est l'équation précédente divisée par dx . Ainsi, en général, on a $df/dx \neq \partial f / \partial x$ (sauf si $f(x, y)$ ne dépend en réalité pas de y , auquel cas dérivée totale et partielle sont égales (c'est le cas des fonctions d'une seule variable)).
- Changement de variable dans une fonction de plusieurs variables : règle de la (dérivation en) chaîne (chain rule en anglais). Soit $f(x, y) = F(v, w)$ avec $v = x + y$ et $w = x - y$ par exemple (de manière générale $v = g(x, y)$ et $w = h(x, y)$ qu'on note souvent (en physique, pas en maths) simplement $v(x, y)$ et $w(x, y)$). Alors $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}$
- Les dérivées partielles croisées sont égales : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$
- En thermodynamique, vous avez aussi vu que $\frac{\partial P}{\partial V} = \frac{1}{\partial V / \partial P}$ et que $\frac{\partial P}{\partial V} \Big|_T \frac{\partial V}{\partial T} \Big|_P \frac{\partial T}{\partial P} \Big|_V = -1$ (comme conséquence de l'équation $f(P, V, T) = 0$).

Principe de superposition des solutions d'une équation différentielle linéaire.

- Soient a, b, c trois nombres complexes, a étant non nul. Soient g_1 et g_2 deux fonctions continues sur un intervalle de \mathbb{R} à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Si f_1 est une solution particulière sur I de l'équation $ay'' + by' + cy = g_1$ et f_2 est une solution particulière sur I de l'équation $ay'' + by' + cy = g_2$, alors pour tous nombres λ_1 et λ_2 , la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est une solution particulière de l'équation $ay'' + by' + cy = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$.

2.2 Onde progressive sinusoïdale

On va introduire ici un type particulier d'onde qui joue un rôle important les ondes sinusoïdales ou ondes harmoniques.

2.2.1 Définition

Une **onde progressive sinusoïdale** est une onde progressive (disons vers la droite) donc $u(x, t) = f(t - x/c)$ de forme sinusoïdale ce qui signifie que $f(z)$ est un sinus ou un

cosinus. On note

$$u(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \phi) = A \cos(\omega[t - x/c] - \phi)$$

où $k = \omega/c$. La quantité qui vibre est u , l'espace-temps est (x, t) , A est l'**amplitude** de l'onde (dont la dimension est la même que u . Si u est en V/m alors A est aussi en V/m.), ω est la **pulsation ou fréquence angulaire** de l'onde sinusoïdale et k est le **vecteur d'onde**. On appelle **phase** de l'onde tout l'argument de la fonction cosinus ou sinus : c'est donc un angle (qui se mesure en radians). Ici la phase de l'onde est donc $kx - \omega t + \phi$ et ϕ est le **déphasage** ou la phase à l'origine (i.e. quand $x = 0$ et $t = 0$).

Une onde sinusoïdale oscille en temps comme un sinus et oscille dans l'espace comme un sinus. La vibration temporelle est caractérisée par la **pulsation** ω ou de manière équivalente par la **fréquence** $\nu = \omega/2\pi$ (aussi notée f) ou la **période** $T = 1/\nu = 2\pi/\omega$. La fréquence donne le nombre d'oscillations par seconde (par exemple 5 oscillations par seconde correspond à $\nu = 5$ hertz noté 5 Hz). La pulsation donne l'angle dont a tourné le sinus par seconde (l'unité est le radian par seconde noté rad/s). La période donne la durée d'une oscillation complète, d'un tour et se mesure en secondes. La vibration spatiale est caractérisée par le **vecteur d'onde** k (qui est une pulsation spatiale) ou de manière équivalente par le **nombre d'onde** $\sigma = k/2\pi$ (qui est une fréquence spatiale) ou encore par la **longueur d'onde** (aussi appelée période spatiale) $\lambda = 1/\sigma = 2\pi/k$. Le nombre d'onde s'exprime en par mètre m^{-1} et donne le nombre de vibrations spatiales par mètre. La longueur d'onde donne la distance totale d'une oscillation spatiale et s'exprime en mètres.

	vibration dans le temps	vibration dans l'espace
fréquence	fréquence ν en Hz (ou cycles/s)	nombre d'onde σ en m^{-1}
pulsation	pulsation $\omega = 2\pi\nu$ en rad/s	vecteur d'onde $k = 2\pi\sigma$ en rad/m
période	période $T = 1/\nu$ en s	longueur d'onde $\lambda = 1/\sigma$ en m

Le tableau ci-dessus résume la caractérisation des oscillations temporelles et spatiales d'une onde sinusoïdale. On verra plus loin que le lien entre oscillation temporelle et oscillation spatiale dépend du type d'onde (i.e. de l'équation d'onde) et s'appelle la **relation de dispersion**.

2.2.2 Notations complexes

Il est utile à ce stade d'introduire une astuce mathématique : la notation complexe d'une onde sinusoïdale

$$u(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \phi) = \text{Re}[Ae^{i(kx - \omega t + \phi)}]$$

où Re désigne la partie réelle du nombre complexe $e^{i\dots}$. On note l'onde complexe avec un chapeau

$$\hat{u}(x, t) \equiv Ae^{i(kx + \phi)e^{-i\omega t}}$$

on parle de vibration complexe associée à l'onde réelle $u(x, t)$. On définit aussi l'amplitude complexe $\hat{A}(x) \equiv Ae^{i(kx+\phi)}$. Alors

$$u(x, t) = \text{Re}[\hat{u}(x, t)] = \text{Re}[\hat{A}(x)e^{-i\omega t}]$$

et l'amplitude réelle de l'onde $A = |\hat{A}(x)|$ est donnée par le module de l'amplitude complexe. La phase de l'amplitude complexe (en $x = 0$) donne le déphasage $\phi = \text{Arg}[\hat{A}(0)]$.

L'intérêt de la notation complexe est de simplifier les opérations de dérivation et d'intégration (qui deviennent des multiplications et des divisions). En particulier, on a

- $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -i\omega \hat{u}$ (dérivation par rapport à t équivalente à multiplication par $-i\omega$)
- $\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = ik \hat{u}$ (dérivation par rapport à x équivalente à multiplication par ik)
- On conserve la linéarité : si $u = u_1 + u_2$ alors $\hat{u}_1 = \hat{u}_2 + \hat{u}_2$

Dans la pratique, on fait les calculs avec la grandeur complexe \hat{u} et on prend la partie réelle à la fin pour obtenir ce qui nous intéresse vraiment, à savoir u .

2.2.3 Equation d'onde et relation de dispersion

On considère pour commencer l'équation d'onde de d'Alembert (on verra ensuite d'autres équations d'onde). Et on essaye une solution particulière : une onde progressive sinusoïdale $u(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \phi)$. Pour l'instant, on ne connaît pas le lien entre ω et k (on les suppose tous les deux > 0), c'est ce que nous cherchons. On injecte cette onde dans l'équation de d'Alembert pour obtenir que $\partial_t^2 u = -\omega^2 u$ et $\partial_x^2 u = -k^2 u$. Donc pour satisfaire l'équation de d'Alembert $\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u$ on doit avoir $\omega^2 u(x, t) = c^2 k^2 u(x, t)$. Soit $u(x, t) = 0$ (mais ce n'est pas une onde très intéressante...) soit $u(x, t) \neq 0$ et alors $\omega^2 = c^2 k^2$ i.e.

$$\boxed{\omega = ck}$$

C'est la **relation de dispersion de l'équation de d'Alembert**. C'est le lien entre oscillation temporelle (ω) et oscillation spatiale (k). Son statut est différent des relations $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ et $k = 2\pi\sigma = 2\pi/\lambda$ qui sont toujours vraies. La relation de dispersion, elle, dépend du type d'onde, i.e. de l'équation d'onde. Ce n'est pas toujours $\omega = ck$. De manière générale, la relation de dispersion relie ω ou ν ou T à soit k soit σ soit λ . On peut symboliquement noter $\omega = f(k)$.

Le nom de relation de dispersion vient de la raison suivante : c'est la relation qui indique la manière dont un paquet d'onde s'étale ou se disperse. Quand la relation de dispersion est $\omega \propto k$ on dit que l'onde est non-dispersive (on devrait plutôt parler de relation de non-dispersion dans ce cas là. Par contre si la relation entre ω et k n'est pas linéaire mais par exemple $\omega \propto k^\alpha$ avec $\alpha \neq 1$, on dit que l'onde est dispersive. Nous allons voir ci-dessous ce que cela implique.

2.2.4 Vitesse de phase et dispersion

Supposons qu'on ait affaire à une onde sinusoïdale $u(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \phi)$ dont la relation de dispersion est $\omega = f(k)$ avec f une fonction quelconque (ce n'est donc pas

2.3 Autres exemples d'équations d'onde linéaires et de relations de dispersion

nécessairement $f(k) = ck \propto k$ et on ne parle donc pas nécessairement de l'équation d'onde de d'Alembert. On se place dans un cadre plus général.). A quelle vitesse se déplace la phase de cette onde sinusoïdale? Autrement dit, à quelle vitesse se déplace l'onde sinusoïdale? Appelons $\varphi(x, t) = kx - \omega t + \phi$ la phase de l'onde. Pour trouver la vitesse de la phase écrivons que la phase doit être la même à deux instants successifs proches (t et $t + dt$) en deux points d'espace différents et proches (x et $x + dx$) :

$$\varphi(x + dx, t + dt) = \varphi(x, t) \text{ soit } k(x + dx) - \omega(t + dt) + \phi = kx - \omega t + \phi$$

La vitesse de phase v_φ est alors la vitesse à laquelle s'est déplacée la phase³, soit le rapport entre la distance dont elle s'est déplacée dx durant l'intervalle de temps dt : $v_\varphi = dx/dt$. On trouve donc que $kdx = \omega dt$ ce qui montre que la **vitesse de phase** est

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

On remarquera en particulier que nous n'avons pas utilisé la relation de dispersion pour établir l'équation $v_\varphi = \omega/k$.

Nous allons maintenant considérer des cas particuliers de relation de dispersion :

- Si $\omega = ck$ alors $v_\varphi = c$ la vitesse de phase est une constante (elle ne dépend pas de k ou de ω). On dit que l'onde est **non-dispersive** et dans ce cas là un paquet d'onde ne se déforme pas. Cette constante est ce que nous avons appelé la vitesse de propagation de l'onde dans l'équation de d'Alembert.
- Si $\omega \propto k^\alpha$ avec $\alpha \neq 1$ alors $v_\varphi = \omega/k \propto k^{\alpha-1} \propto \omega^{1-1/\alpha}$ car $k \propto \omega^{1/\alpha}$. La vitesse de phase dépend alors de la pulsation $v_\varphi(\omega)$ ou du vecteur d'onde $v_\varphi(k)$. On dit que l'onde est **dispersive**. Dans ce cas là un paquet d'onde se déforme au cours de la propagation.

En effet, un paquet d'onde (ou une onde de forme quelconque qui se décompose sur la base des fonctions sinusoïdales) contient un grand nombre de fréquences. Si chaque fréquence se déplace à une vitesse (de phase) différente alors la forme du paquet d'onde change : c'est le cas dispersif. Au contraire, si toutes les fréquences se déplacent à la même vitesse, alors un paquet d'onde quelconque conserve sa forme : c'est le cas non-dispersif.

2.3 Autres exemples d'équations d'onde linéaires et de relations de dispersion

On va considérer deux autres exemples ici.

- L'équation d'onde de Klein-Gordon est

$$\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u - \omega_0^2 u$$

3. Dans la suite nous verrons qu'il y a d'autres vitesses de propagation importantes pour les ondes : la vitesse de groupe, la vitesse de signal ou vitesse de propagation de l'information, etc.

où c et ω_0 sont deux constantes (la première a les dimensions d'une vitesse et la deuxième les dimensions d'une pulsation). En injectant une onde progressive sinusoïdale dans cette équation, on trouve qu'elle est solution si $\omega^2 = \omega_0^2 + c^2k^2$ soit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + c^2k^2}$. On voit que la vitesse de phase n'est pas une constante mais $v_\varphi = c\sqrt{1 + (\omega_0/ck)^2}$ qui tend vers c quand $k \rightarrow \infty$ et vers $+\infty$ quand $k \rightarrow 0$.

– L'équation de diffusion (ou équation de la chaleur de Fourier) est

$$\partial_t u = D \partial_x^2 u$$

où D est une constante qui s'exprime en m^2/s . Si on injecte une onde sinusoïdale complexe \hat{u} on trouve qu'elle est solution si $-i\omega = D(ik)^2$ i.e. $\omega = -iDk^2$ qui n'est pas une quantité réelle mais imaginaire pure (si k est réel). On a donc affaire à une solution qui n'est pas oscillante. Ce n'est pas vraiment une onde. L'équation de diffusion n'est pas une équation d'onde, elle décrit un autre type de mouvement : ce qu'on appelle de la diffusion (ou de la marche aléatoire au niveau microscopique).

2.4 Equation d'onde de d'Alembert tridimensionnelle

On peut généraliser l'équation d'onde de d'Alembert à un espace de dimension deux (2D) ou trois (3D). On pense par exemple au cas d'une onde acoustique qui ne serait pas guidée dans un tuyau mais se propagerait dans l'air libre (cas 3D). Nous admettons que la généralisation est

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u}$$

ou $\nabla^2 \equiv \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ est le laplacien (ou opérateur de Laplace) à 3D. On le note également $\nabla^2 = \Delta$.

On cherche une solution à symétrie sphérique de l'équation de d'Alembert 3D, i.e. que $u(x, y, z, t) = u(r, t)$ où $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. On impose donc au champ $u(\mathbf{r}, t) = u(r, \theta, \phi, t)$ de ne pas dépendre des angles sphériques θ et ϕ . Alors l'opérateur laplacien se simplifie et on peut montrer que $\nabla^2 u(r, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (ru)}{r^2}$, l'équation de d'Alembert 3D devient alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (ru)}{r^2}$$

. Posons $U(r, t) \equiv ru(r, t)$ qui vérifie l'équation $\partial_t^2 U = c^2 \partial_r^2 U$ qui est simplement l'équation de d'Alembert 1D (en variables (r, t)). Or on connaît les solutions générales de cette équation : $U(r, t) = f(r - ct) + g(r + ct)$ où f et g sont deux fonctions quelconques. On en déduit donc qu'une **onde sphérique générale** s'écrit

$$\boxed{u(r, t) = \frac{f(r - ct)}{r} + \frac{g(r + ct)}{r}}$$

(qu'on veillera à ne pas confondre avec $F(r - ct) + G(r + ct)$). L'onde $f(r - ct)/r$ est une **onde sphérique progressive divergente** (elle quitte une source ponctuelle) alors que

$g(r + ct)/r$ est une **onde sphérique progressive convergente** (elle est focalisée sur un puits ponctuel).

Le **front d'onde** d'une onde sphérique a la forme de la surface d'une sphère. Pour définir ce qu'est le front d'onde de manière générale : on imagine allumer une source qui émet des ondes et on suit la forme du premier signal émis (des premières ondes qui sortent de la source). Cette forme est le front d'onde.

A cause de sa dépendance en $1/r$, l'amplitude de l'onde sphérique décroît comme $1/r$ quand r croît. Par exemple, une onde sphérique progressive divergente de forme sinusoïdale $u(r, t) = (A/r) \cos(kr - \omega t + \phi)$ a une amplitude qui est A/r .

Un autre exemple important d'onde 3D est l'**onde plane** $u(x, y, z, t) = u(x, t)$ dont le front d'onde est un plan (le plan yz obtenu à x constant dans notre exemple). C'est le type d'onde que nous avons supposé exister dans le cas du tuyau sonore de manière à rendre le problème unidimensionnel (la surface du front d'onde était alors juste la section du tuyau). De manière générale, une **onde progressive plane** s'écrit $u(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct)$ où \mathbf{n} est un vecteur unitaire qui indique la direction de propagation de l'onde. Les surfaces d'onde sont des plan perpendiculaires à ce vecteur \mathbf{n} . Un cas particulier important est celui d'une **onde progressive plane sinusoïdale** aussi appelée **onde progressive plane monochromatique**⁴ (OPPM)

$$u(\mathbf{r}, t) = A \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi)$$

où le vecteur d'onde (ui prend maintenant tout son sens) est $\mathbf{k} = k\mathbf{n}_k$ avec \mathbf{n}_k est un vecteur unitaire. Attention à ne pas confondre $kr = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ dans l'onde sphérique sinusoïdale et $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$ dans l'onde plane sinusoïdale.

4. Monochromatique signifie qui ne contient qu'une seule couleur, i.e ; qu'une seule fréquence pour une onde lumineuse, autrement dit une seule fréquence. Il s'agit donc bien d'une onde sinusoïdale ou encore d'une onde harmonique. Bien identifier les synonymes : monochromatique = sinusoïdale = harmonique et signifie "onde qui ne contient qu'une seule fréquence".

Chapitre 3

Équation d'onde de d'Alembert : corde vibrante et tuyau sonore

- But de ce chapitre :

Le but de ce chapitre est de décrire avec des **considérations microscopiques** deux types de systèmes dont l'équation d'onde est régie par l'équation de d'Alembert (ainsi que les hypothèses et approximations sous-jacentes). Nous allons étudier deux exemples d'ondes mécaniques : les ondes sur une corde vibrante (e.g. une corde de guitare) et les ondes acoustiques (i.e. le son) guidées dans un tuyau¹. On cherche à s'appuyer sur les lois fondamentales (mécanique classique et thermodynamique), microscopiques pour **démontrer** l'équation de ces ondes mécaniques. On verra que sous certaines hypothèses, on obtient bien une équation d'onde de d'Alembert et on aura alors une **expression microscopique** de la vitesse de propagation ou célérité c .

- Lien avec cours de Mathématiques :

- Etude de fonctions de plusieurs variables et dérivées partielles (cours Maths S1)
- Développements de Taylor (cours Maths S1)

Sommaire

3.1	Corde vibrante (CV)	18
3.1.1	Equation d'onde et vitesse des ondes sur une corde	18
3.1.2	Energie mécanique	21
3.1.3	Impédance mécanique	22
3.2	Tuyau sonore (TS)	23
3.2.1	Equation d'onde	23
3.2.2	Vitesse du son dans un fluide : compressibilité isotherme ou isentropique ?	25

1. Les ondes électromagnétiques seront vues dans la suite de votre formation, ainsi que les ondes de matière dans le cours de mécanique quantique.

3.2.3	Vitesse du son dans un solide	26
3.2.4	Energie mécanique	27
3.2.5	Impédance acoustique et impédance acoustique caractéristique	27

On va maintenant étudier deux exemples d'ondes mécaniques : les ondes sur une corde vibrante (e.g. une corde de guitare) et les ondes acoustiques (i.e. le son) guidées dans un tuyau. On cherche à s'appuyer sur les lois fondamentales (mécanique classique et thermodynamique), microscopiques (ou du moins mésoscopiques) pour démontrer l'équation de ces ondes mécaniques. On verra que sous certaines hypothèses, on obtient bien une équation d'onde de d'Alembert et on aura alors une expression microscopique de la vitesse de propagation (ou célérité c).

3.1 Corde vibrante (CV)

On considère une corde de guitare fixée à ses deux extrémités. Au repos, cette corde est tendue et immobile. Si on l'écarte de sa position d'équilibre en tirant dessus, elle cherche à y revenir. La corde peut donc augmenter sa longueur et est élastique (comme un ressort) dans le sens où elle cherche à revenir à sa longueur initiale (il y a donc une énergie potentielle élastique). De plus la corde a une masse qu'on supposera répartie de façon homogène. On va aussi faire l'hypothèse que la corde est souple (on verra plus loin ce que cela signifie précisément). Quand on tire sur la corde et qu'on la lâche, elle se met à vibrer (et à produire un son mais il s'agit alors là d'une autre onde). La masse de la corde va jouer un rôle dans son inertie mais on négligera la force de pesanteur (la gravité) devant la tension de la corde.

3.1.1 Equation d'onde et vitesse des ondes sur une corde

Corde au repos

La corde est tendue horizontalement (direction x) par deux poids (de masses égales M) qui pendent après une poulie à chacune des extrémités de la corde. La longueur de la corde au repos entre les deux poulies est appelée L . L'extrémité gauche de la corde est en $x = 0$ et l'extrémité droite en $x = L$. La masse par unité de longueur (ou masse linéique) de la corde au repos est appelée μ_0 . La tension de la corde au repos $T_0 = Mg$ est obtenue à partir de l'équation de la statique de la corde (qui ne penche ni d'un côté, ni de l'autre, car les deux masses M s'équilibrent) où $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ est l'accélération de la pesanteur. En toute généralité seule la tension T_0 joue un rôle peu importe les moyens pour y arriver².

Dynamique de la corde

On écarte la corde de sa position d'équilibre et on la lâche. On fait les hypothèses suivantes :

2. En TP, vous utiliserez un bras de levier au bout duquel sera accroché une masse pour induire une tension $T_0 > Mg$

- On se limite à de faibles déplacements de la corde, de petites amplitudes.
- La corde est supposée ne se déplacer que dans une seule direction y perpendiculaire à la direction x (c'est pourquoi on dit que les ondes sur la corde sont transverses). Tout se passe donc dans le plan (x, y) et on oublie la troisième direction. On peut penser à la direction y comme étant la verticale.
- L'angle que fait la tangente à la corde en chaque point avec l'axe x est supposé être petit.
- On néglige la force de gravité dans la description du mouvement de la corde même si elle joue un rôle dans la mise sous tension $T_0 = Mg$. En effet on suppose que $\mu_0 Lg \ll T_0$ i.e. que la masse de la corde $\mu_0 L$ est beaucoup plus petite que celle M des deux poids qui la mette sous tension.

On appelle $u(x, t)$ le déplacement de la corde (qui se trouve en $(x, y = 0)$ au repos) dans la direction y à l'instant t . La nouvelle position de la corde est alors $(x, y = u(x, t))$.

Quelles sont les forces qui agissent sur ce bout de corde? Il y a le poids, mais on le néglige. Et il y a les forces exercées par la corde à gauche du petit morceau et par la corde à droite du petit morceau. Ces forces sont appelées des forces de tension. Par définition, la tension $\vec{T}(x, t)$ est la force que, à l'instant t , la corde à gauche du point x exerce sur la corde à droite du point x . A cause de la loi de l'action et de la réaction (3ème loi de Newton), cette force est égale à moins la force que la partie droite exerce sur la partie gauche. L'hypothèse que la corde est souple consiste à supposer que la force de tension est tangente à la corde en tout point et à tout instant et que la tension est une force de traction mais pas de compression³. Que la tension est tangente à la corde signifie que $|T_y(x, t)/T_x(x, t)| = |\partial u/\partial x(x, t)|$ et avec nos conventions de signe que

$$T_y(x, t) = T_x(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$$

(en effet si $u(x + dx) > u(x)$ alors $\partial u/\partial x > 0$ alors que $T_y(x) < 0$ et $T_x(x) < 0$). On peut appeler cette équation la relation de corde souple.

A un instant t la longueur du petit morceau de corde n'est plus dx : en effet son extrémité gauche se trouve en $(x, u(x, t))$ et son extrémité droite en $(x + dx, u(x + dx, t))$. On peut donc utiliser le théorème de Pythagore pour trouver que cette longueur est environ $\sqrt{(dx)^2 + (u(x + dx, t) - u(x, t))^2} \approx dx\sqrt{1 + (\partial_x u)^2}$. Soit θ l'angle que fait la tangente en x à la corde avec l'horizontale. On a $\tan \theta = (u(x + dx, t) - u(x, t))/dx \approx \partial_x u$. Faire l'hypothèse que cet angle est petit signifie que $|\tan \theta| \approx |\theta| \approx |\partial_x u| \ll 1$. On voit donc que la longueur du petit morceau de corde est environ $dx\sqrt{1 + (\partial_x u)^2} \approx dx(1 + (\partial_x u)^2/2) \approx dx$ ce qui signifie que la longueur de la corde ne change pas beaucoup.

Appliquons maintenant la relation fondamentale de la dynamique (RFD ou 2ème loi de Newton) au mouvement d'un petit morceau de corde situé entre x et $x + dx$. Sa masse est $\mu_0 dx$ et ne varie pas au cours du mouvement par définition. Sa position est $\vec{r} = (x, y = u(x, t))$, sa vitesse est donc $d\vec{r}/dt = (0, \partial_t u)$ et son accélération $d^2\vec{r}/dt^2 = (0, \partial_t^2 u)$. On a

3. Autrement dit la force de tension que la gauche exerce sur la droite est dirigée de la droite vers la gauche et pas de la gauche vers la droite

donc

$$\mu_0 dx \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{T}(x, t) - \vec{T}(x + dx, t) + \mu_0 dx \vec{g} \approx \vec{T}(x, t) - \vec{T}(x + dx, t)$$

en négligeant le poids de la corde car $\mu_0 L \ll M$. On peut projeter cette relation vectorielle sur les directions x et y . Suivant x on obtient $0 = T_x(x, t) - T_x(x + dx, t) \approx -\partial_x T_x(x, t) dx$ ce qui signifie que $T_x(x, t)$ ne dépend pas de x or $T_x(0, t) = -T_0$ (c'est l'extrémité gauche de la corde, au niveau de la poulie qui transmet le poids de la masse M). Finalement, on trouve que $T_x(x, t) = -T_0$ ne dépend ni de x ni de t et donc en utilisant la relation de la corde souple on obtient :

$$T_y(x, t) \approx -T_0 \frac{\partial u}{\partial x}(x, t). \quad (3.1)$$

Si on projette la RFD suivant y , on trouve que

$$\mu_0 dx \ddot{u} \approx T_y(x, t) - T_y(x + dx, t) \approx -\partial_x T_y(x, t) dx,$$

soit

$$\mu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx -\frac{\partial T_y}{\partial x}. \quad (3.2)$$

En combinant les équations (3.1) et (3.2), on trouve finalement l'équation d'onde :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{T_0}{\mu_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

qui est bien de la forme de d'Alembert⁴. On peut donc y lire la célérité des ondes sur une corde

$$\boxed{c = \sqrt{T_0/\mu_0}}.$$

On notera que c^2 s'exprime comme le rapport d'une rigidité (ou force de rappel T_0) et d'une inertie (la masse linéique μ_0)⁵. En travaux pratiques, on vérifiera expérimentalement la justesse de cette relation.

Remarque : ne pas confondre la vitesse de propagation des ondes (ou célérité) c et la vitesse de déplacement du morceau de corde $(\partial_t u) \vec{e}_y$ (où \vec{e}_y est le vecteur unité suivant y). On a ici démontré, moyennant quelques hypothèses, que les ondes sur une corde obéissent à l'équation d'onde qu'on sait décrire la propagation sans déformation, ni atténuation d'ondes de forme quelconque (voir chapitre 2). On connaît également la solution générale de cette équation. De plus, on a maintenant une expression microscopique de la vitesse de propagation des ondes. On sait comment elle dépend de la tension de la corde et de sa masse linéique.

4. Jean le Rond d'Alembert a obtenu cette équation pour la corde vibrante en 1747.

5. Analogie avec l'oscillateur harmonique unidimensionnel (le ressort) dont l'équation du mouvement est $m\ddot{u} = -Ku$ si u est le déplacement du ressort par rapport à sa position d'équilibre et K la constante de raideur du ressort (loi de Hooke). On trouve alors que la pulsation de vibration du ressort vérifie $\omega^2 = K/m$ similaire à $\omega^2 = c^2 k^2 = T_0 k^2 / \mu_0$ pour la corde.

3.1.2 Énergie mécanique

On cherche maintenant à calculer l'énergie contenue dans une onde sur une corde vibrante. L'énergie contenue dans la corde a deux origines. Premièrement comme la corde est massive et se déplace, elle possède de l'énergie cinétique i.e. masse \times vitesse²/2 par analogie avec une masse ponctuelle. Deuxièmement, quand on tire sur la corde au repos et qu'on la maintient hors de sa position d'équilibre, on sait que si on la lâche elle va se mettre en mouvement. C'est donc qu'elle contient de l'énergie potentielle. Cette énergie est liée à l'allongement de la longueur de la corde : il s'agit d'énergie potentielle élastique i.e. constante de raideur \times déplacement²/2 par analogie avec un ressort.

Calculons tout d'abord l'énergie cinétique d'un morceau de corde : c'est $(\mu_0 dx) \times (\partial_t u(x, t))^2/2$. Pour l'ensemble de la corde, il suffit de sommer sur tous les bouts de corde de longueur dx depuis $x = 0$ jusqu'à $x = L - dx \approx L$ et donc

$$E_c = \int_0^L dx \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2.$$

On voit que l'énergie cinétique par unité de longueur est $e_c(x, t) = \mu_0 (\partial_t u(x, t))^2/2$. L'énergie cinétique est concentrée aux endroits où la corde se déplace rapidement, i.e. là où $|\partial_t u(x, t)|$ est grand. On peut noter également que cela correspond à $u(x, t) = 0$, une situation où l'énergie potentielle élastique est nulle.

L'énergie potentielle élastique E_p peut être obtenue en calculant le travail W de la force de tension qui allonge la corde. En effet $dE_p = -\delta W = \vec{F} \cdot \vec{dl}$ où dl est l'allongement de la corde (comme pour un ressort). La force de tension est en gros constante $\sim T_0$ et orientée selon x . En effet $\vec{T} = -T_0[\vec{e}_x + \partial_x u \vec{e}_y] \approx -T_0 \vec{e}_x$ car dans l'hypothèse de faible inclinaison de la corde on a $|\partial_x u| \ll 1$. L'allongement de la corde est donné par $L' - L = \int_0^L dx \sqrt{1 + (\partial_x u)^2} - L \approx \int_0^L dx (\partial_x u)^2/2$ car l'élément de longueur curviligne est $dl = dx \sqrt{1 + (\partial_x u)^2}$ comme nous l'avons vu précédemment. On trouve donc que le travail est $W \approx -T_0(L' - L)$ et donc que la variation d'énergie potentielle est $\Delta E_p = -W$. En choisissant que l'énergie potentielle est nulle quand la corde est au repos, on obtient

$$E_p \approx \int_0^L dx \frac{T_0}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2.$$

Cette énergie est toujours plus grande quand la corde est déformée car déformer la corde en l'allongeant doit coûter de l'énergie potentielle. C'est pourquoi l'énergie potentielle élastique est ici toujours positive. L'énergie potentielle par unité de longueur est donc $e_p(x, t) = T_0 (\partial_x u(x, t))^2/2$.

L'énergie mécanique totale E est simplement la somme des énergies cinétique et potentielle élastique

$$E = E_c + E_p = \int_0^L dx \left[\frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right].$$

On définit également la **densité linéique d'énergie**

$$e_L(x, t) = \left[\frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right].$$

On veut maintenant montrer que de manière générale, **l'énergie contenue dans une onde est proportionnelle au carré de son amplitude**. Si on multiplie l'onde $u(x, t)$ par un facteur α (par exemple $\alpha = 2$ si on veut une onde d'amplitude deux fois plus grande) par quel facteur est multiplié son énergie? On sait que $E[u(x, t)] = \int_0^L dx \left[\frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]$ pour la corde vibrante (on voit que u apparaît systématiquement sous un carré) donc si $u \rightarrow \alpha \times u$ alors $E \rightarrow \alpha^2 \times E$. Cqfd. On retient donc que

$$E \propto |\text{Amplitude}|^2$$

3.1.3 Impédance mécanique

On veut maintenant introduire la notion d'impédance. **Une impédance est de manière générale le rapport entre une sollicitation et une réponse**. Par exemple en électronique, l'impédance électrique Z_e d'un composant tel qu'une résistance, une capacité ou une bobine est le rapport entre la tension au borne du composant U et le courant I qui traverse le composant $Z_e = U/I$. Dans le cas de la corde vibrante, la sollicitation est une force de tension et la réponse est la vitesse de déplacement de la corde. Comme la vitesse de la corde est uniquement transverse, on ne va considérer que la force de tension suivant la même direction.

Considérons une onde progressive quelconque $u(x, t) = f(x \mp ct)$ sur la corde (le signe du haut désigne une onde qui se propage vers les x croissants, la droite et celui du bas une onde qui se propage vers les x décroissants, la gauche). Le vitesse de la corde en un point x et à l'instant t est $\vec{v}(x, t) = \vec{e}_y \partial_t u(x, t) = \mp c f'(x \mp ct) \vec{e}_y$ (à ne pas confondre avec la vitesse de l'onde). Donc $v_y(x, t) = \mp c f'(x \mp ct)$. La force de tension que la gauche exerce sur la droite est $\vec{F}(x, t) = -T_0 \vec{e}_x - T_0 \partial_x u(x, t) \vec{e}_y = -T_0 [\vec{e}_x + f'(x \mp ct) \vec{e}_y]$. Donc $F_y(x, t) = -T_0 f'(x \mp ct)$. On définit alors l'impédance mécanique Z_m par

$$Z_m = \frac{F_y(x, t)}{v_y(x, t)} = \pm \frac{T_0}{c} = \pm \mu_0 c = \pm \sqrt{T_0 \mu_0}$$

Il faut se souvenir que l'impédance est définie pour une onde propagative et que son signe dépend de la direction de propagation. On rappelle que le signe du haut correspond à une onde se propageant vers la droite et celui du bas à une onde se propageant vers la gauche. Il est remarquable que l'impédance ne dépende ni de x ni de t alors qu'elle est définie comme le rapport entre deux quantités qui en dépendent. Ceci signifie que T_y et v_y sont des quantités qui vibrent en phase.

L'impédance mécanique mesure la difficulté avec laquelle la corde se déplace sous l'effet d'une force. Une grande impédance signifie qu'il ne va pas être facile de mettre la corde en mouvement pour créer une onde. Impédance vient de l'anglais *to impede* i.e. empêcher, entraver, faire obstacle à. L'inverse de l'impédance s'appelle en général une admittance. Dans le cas de l'impédance mécanique, l'inverse de l'impédance s'appelle une mobilité.

On remarque que le couple $\{T_0, \mu_0\}$ qui caractérise la corde peut être remplacé par le couple $\{c^2 = T_0/\mu_0, Z_m^2 = T_0\mu_0\}$, ce qui donne pour résumer

$$\boxed{\{T_0, \mu_0\} \longleftrightarrow \{c^2 = T_0/\mu_0, Z_m^2 = T_0\mu_0\}}.$$

On remarque aussi que la célérité au carré est le rapport entre une rigidité (T_0) et une inertie (μ_0) alors que l'impédance mécanique au carré est le produit de cette rigidité et de cette inertie.

3.2 Tuyau sonore (TS)

On considère maintenant un deuxième exemple d'ondes mécaniques. Il s'agit d'une onde acoustique guidée dans un tuyau : on parle de tuyau sonore. Là aussi, on va s'appuyer sur des lois fondamentales de la physique pour obtenir l'équation des ondes sonores. Le fait de se placer dans un tuyau de section constante permet de se ramener à un problème unidimensionnel et d'y considérer des ondes planes. Cela évite de s'attaquer directement à la complication liée à la propagation des ondes sonores dans un milieu tridimensionnel. On fera aussi l'hypothèse que la perturbation introduite par l'onde sonore dans le fluide est petite.

3.2.1 Equation d'onde

A l'équilibre

On considère un tuyau (horizontal) de section S et de longueur L (entre $x = 0$ et $x = L$) rempli d'un fluide (i.e. un gaz ou un liquide). A l'équilibre, la pression dans le fluide est uniforme et vaut P_0 . La masse volumique à l'équilibre est ρ_0 . On considère une tranche de fluide comprise entre les abscisses x et $x + dx$. Sa masse est donc $\rho_0 S dx$ et son volume $V_0 = S dx$. La tranche est donc limitée à gauche par un plan virtuel en x et à droite par un plan virtuel en $x + dx$.

Au passage d'une onde

Considérons maintenant ce qu'il arrive de cette tranche de fluide lors du passage d'une onde sonore dans le tuyau. On suppose que l'onde est plane et que son front d'onde est perpendiculaire à l'axe x . On appelle $u(x, t)$ la distance algébrique (son signe importe) dont s'est déplacé le plan virtuel (à l'instant t) qui se trouvait en x à l'équilibre. Ainsi, la tranche de fluide est maintenant limitée à gauche par un plan virtuel en $x + u(x, t)$ et à droite par un

plan virtuel d'abscisse $x+dx+u(x+dx, t)$. La masse de la tranche de fluide est constante par définition mais son volume et sa masse volumique ont changé. Le volume de la tranche de fluide est donc maintenant $V(x, t) = S[u(x+dx, t) + x + dx - (x+u(x, t))] \approx Sdx(1+\partial_x u)$ et la masse volumique est $\rho(x, t) = \rho_0 Sdx/[Sdx(1+\partial_x u)] \approx \rho_0(1-\partial_x u)$. On a fait l'hypothèse que le changement de volume est faible i.e. que $|\partial_x u| \ll 1$.

Ecrivons maintenant la relation fondamentale de la dynamique pour la tranche de fluide : masse \times accélération = somme des forces. La masse est $\rho_0 Sdx$ et la vitesse de la tranche de fluide est $\vec{e}_x \partial_t u(x, t)$. Quelles sont les forces qui agissent sur la tranche de fluide ? Il y a le poids, la réaction du tuyau, la force de pression que le fluide à gauche de la tranche exerce sur la tranche et la force de pression que le fluide à droite exerce sur la tranche de fluide. On fait l'hypothèse que les forces de frottements du fluide sur la paroi du tuyau sont négligeables et donc que la réaction du tuyau est perpendiculaire à la direction x . Ainsi la réaction du tuyau compense exactement le poids de la tranche de fluide et il n'y a pas de mouvement de fluide selon les directions perpendiculaires à x . Il reste donc à se concentrer sur ce qui se passe parallèlement à x . Appelons $P(x, t)$ la pression dans le fluide en x à l'instant t . On définit aussi la surpression $p(x, t) \equiv P(x, t) - P_0$. La force que le fluide à gauche exerce sur la tranche de fluide est $P(x+u(x, t), t)S\vec{e}_x$ alors que la force que le fluide à droite exerce sur la tranche est $-P(x+dx+u(x+dx, t), t)S\vec{e}_x$. Finalement la projection de la RFD sur x s'écrit :

$$\rho_0 Sdx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = S[P(x+u(x, t), t) - P(x+dx+u(x+dx, t), t)] \approx S[p(x, t) - p(x+dx, t)]$$

On peut ensuite utiliser que $p(x+dx, t) - p(x, t) = dx \partial_x p(x, t)$ et simplifier par Sdx pour écrire que

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx -\frac{\partial p}{\partial x}}$$

Cette relation est équivalente à $\mu_0 \partial_t^2 u \approx -\partial_x T_y$ pour la corde vibrante.

Il faut maintenant obtenir une deuxième relation entre la surpression p et le déplacement de la tranche de fluide u . C'est la thermodynamique qui va nous la fournir. Soit

$$\chi_0 \equiv -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P}$$

la compressibilité du fluide à l'équilibre. Cette quantité caractérise en quelques sorte l'élasticité du fluide. De manière approchée, pour la tranche de fluide, on a $\Delta P \approx -\Delta V/(\chi_0 V_0)$ si V_0 est le volume à l'équilibre, ΔV le changement de volume et ΔP le changement de pression. Or $\Delta V = V(x, t) - V_0 \approx Sdx \partial_x u(x, t) = V_0 \partial_x u(x, t)$ et $\Delta P = P(x, t) - P_0 = p(x, t)$. Donc

$$\boxed{p \approx -\frac{1}{\chi_0} \frac{\partial u}{\partial x}}$$

qui est l'équivalent de $T_y \approx -T_0 \partial_x u$ pour la corde vibrante.

En combinant les deux équations encadrées pour éliminer p (ou u)⁶ on trouve que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{1}{\rho_0 \chi_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

C'est l'équation d'onde de d'Alembert qui nous montre que le son est une onde de déplacement de la tranche de fluide (ou une onde de surpression, voir la note de bas de page) de célérité

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_0}}.$$

La célérité obtenue ici s'appelle la vitesse du son dans le fluide. On reconnaît que la rigidité est ici $1/\chi_0$ (l'inverse de la compressibilité) et que l'inertie est ρ_0 la masse volumique. On peut donc déjà dire que l'impédance (acoustique caractéristique) Z_{ac} vérifiera $Z_{ac}^2 = \rho_0/\chi_0$: on le montrera explicitement dans la suite. Mentionons également que non seulement $u(x, t)$ vérifie l'équation de d'Alembert avec la vitesse du son mais aussi la surpression $p(x, t)$ et la masse volumique $\rho(x, t)$ (qui est proportionnelle à la densité du fluide). On peut donc dire de manière équivalente qu'une onde sonore dans un fluide est une onde longitudinale de déplacement de fluide, ou de surpression ou de densité.

3.2.2 Vitesse du son dans un fluide : compressibilité isotherme ou isentropique ?

Le père Mersenne a été un des premiers à mesurer la vitesse du son (vers 1636). Sa mesure n'était pas très précise : il a trouvé environ 400 m/s. A la même époque Gassendi a constaté que la vitesse du son est la même pour des sons graves (basses fréquences) et des sons aigus (hautes fréquences). Quand la précision des mesures s'est améliorée, on a trouvé que la vitesse du son était environ de 350 m/s.

En thermodynamique on définit en réalité deux compressibilités pour un fluide : la compressibilité isotherme χ_T si la compression se fait à température constante et la compressibilité isentropique χ_S si la compression se fait sans changement d'entropie (ce qui se produit dans une transformation adiabatique, i.e. sans échange de chaleur $\delta Q = 0$, et réversible). Newton, qui a le premier obtenu une expression théorique pour la vitesse du son dans un fluide (1687), pensait que les échanges de chaleur dans le fluide se faisaient suffisamment rapidement pour que lors du passage d'une onde sonore la température soit en gros constante. Il a donc utilisé la compressibilité isotherme. Son résultat était très impressionnant et donnait le bon ordre de grandeur pour la vitesse du son. Néanmoins la valeur trouvée (environ 300 m/s) était significativement plus petite que celle mesurée (plutôt 350 m/s). En travaux pratiques, vous ferez une mesure de la vitesse du son qui exclut la prédiction théorique de Newton : $c_{TP} = 350 \pm 10$ m/s. Plus d'un siècle plus tard (1816), Laplace a compris que les compressions-dilatations qui se produisent lors du passage du son sont très rapides devant la vitesse des échanges de chaleur : supposer qu'il s'agit d'un

6. On obtient alors que $\rho_0 \chi_0 \partial_t^2 p = \partial_x^2 p$ qui est encore une fois l'équation d'onde de d'Alembert.

processus sans échange de chaleur (i.e. adiabatique) et réversible est donc une bien meilleur approximation. Les expériences (mesures précises de la vitesse du son) ont validé l'idée de Laplace. Dans toutes les équations précédentes, il faut donc comprendre que $\chi_0 = \chi_S$. La vitesse du son dans un fluide est donc

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}} = \sqrt{\left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_S}$$

où

$$\chi_S \equiv -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_S = \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_S$$

la deuxième égalité résultant de $\rho \propto 1/V$ et donc $d\rho/\rho = -dV/V$.

En travaux dirigés, on verra que pour un gaz parfait $\chi_T = 1/P_0$ alors que $\chi_S = 1/(\gamma P_0)$ avec $\gamma \approx 1.4$ pour l'air. Le coefficient γ s'appelle le coefficient isentropique et est défini comme étant le rapport des capacités calorifiques à pression et à volume constant $\gamma \equiv C_P/C_V$: pour un gaz parfait monoatomique $\gamma = 5/3$ et pour un gaz parfait diatomique $\gamma = 7/5 = 1.4$. On voit que c'est aussi le rapport entre les compressibilités isotherme et isentropique : $\gamma = \chi_T/\chi_S$.

Un gaz est un fluide compressible $\chi_0 \sim 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$ et peu dense $\rho_0 \sim 1 \text{ kg/m}^3$ (pour l'air à pression atmosphérique et température ambiante). Un liquide est un fluide quasi-incompressible $\chi_0 \sim 5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ et dense $\rho_0 \sim 10^3 \text{ kg/m}^3$ (pour l'eau). On en déduit que le rapport entre la vitesse du son dans un liquide et dans un gaz est grand devant l'unité $c_{\text{liq}}/c_{\text{gaz}} \sim 4 \gg 1$ (on a $c_{\text{eau liquide}} \sim 1500 \text{ m/s}$ et $c_{\text{air gaz}} \sim 350 \text{ m/s}$).

3.2.3 Vitesse du son dans un solide

Nous énonçons ici quelques résultats sur la propagation des ondes élastiques dans un solide sans démonstration.

Dans un solide, il existe plusieurs ondes élastiques : certaines sont transverses et d'autres longitudinales. Ici, nous ne considérons que les ondes longitudinales dont la relation de dispersion est approximativement $\omega \propto k$ quand $k \rightarrow 0$: on parle d'ondes longitudinales acoustiques (c'est donc le son dans un solide). La vitesse du son dans un solide est donnée par

$$c = \sqrt{\frac{\mathcal{B}}{\rho}}$$

où ρ est la masse volumique du solide et \mathcal{B} sont module de compression (bulk modulus en anglais). Le module de compression est (grosso modo ?) l'inverse de la compressibilité $\mathcal{B} \equiv -V \partial P / \partial V = \rho \partial P / \partial \rho$ et se mesure en pascals (même dimension qu'une pression)⁷.

Il existe également des ondes élastiques transverses dans un solide. On parle d'ondes de cisaillement. Leur vitesse est donnée par $c = \sqrt{\mu/\rho}$ où μ est le module de cisaillement.

7. Pour un solide, il n'est pas essentiel de distinguer les compressibilités isotherme et isentropique car le coefficient isentropique $\gamma \approx 1$.

Le cisaillement est une propriété physique qui n'existe que dans un solide et pas dans un fluide (un fluide s'écoule et ne possède donc pas de force de rappel lorsqu'on le cisaille).

3.2.4 Energie mécanique

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle liée à la force de pression. L'énergie cinétique de la tranche de fluide est $1/2 \times S dx \rho_0 \times (\partial_t u(x, t))^2$. Pour tout le tuyau de longueur L c'est donc

$$E_c = \int_0^L dx S \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2$$

Pour obtenir l'énergie potentielle de compression/dilatation, il faut calculer le travail des forces de pression. Par définition, quand la tranche de fluide est à l'équilibre et que la pression à gauche et à droite est P_0 , il n'y a pas d'énergie potentielle de compression/dilatation. Ici nous ne calculerons pas cette énergie potentielle (car ce n'est pas si facile...) et nous contenterons de procéder par analogie avec la corde vibrante : on a

$$E_p = \int_0^L dx S \frac{1}{2} \frac{1}{\chi_S} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$$

Finalement l'énergie mécanique est donc

$$E = \int_0^L dx S \left[\frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\chi_S} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right].$$

On peut également définir la **densité volumique d'énergie**

$$e_V(x, t) = \left[\frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\chi_S} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]$$

et la **densité linéique d'énergie** $e_L(x, t) = S \left[\frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\chi_S} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] = S e_V(x, t)$. Comme dans le cas de la corde vibrante, on voit que l'énergie contenue dans l'onde est proportionnelle au carré de son amplitude $E \propto |\text{Amplitude}|^2$.

3.2.5 Impédance acoustique et impédance acoustique caractéristique

De manière équivalente au cas de la corde vibrante, on peut définir une impédance pour le tuyau sonore. On parle d'impédance acoustique⁸ Z_a . L'impédance est le rapport

8. Attention, les différentes impédances (électrique, mécanique, acoustique, électromagnétique, etc.) ont des significations physiques proches pour les ondes respectives mais les unités et les dimensions diffèrent.

entre une sollicitation et une réponse pour une onde progressive. Ici la sollicitation est la surpression et la réponse est la vitesse de déplacement de la tranche de fluide (ou le débit volumique). Il y a évidemment un certain arbitraire à définir ce qu'est la sollicitation (on aurait pu prendre la force associée à la surpression plutôt que la surpression, par exemple).

Soit une onde progressive $u(x, t) = f(x \mp ct)$. La surpression est $p(x, t) = -\partial_x u / \chi_S = -f'(x \mp ct) / \chi_S$. La vitesse de la tranche de fluide (selon x) est $v(x, t) = \partial_t u(x, t) = \mp f'(x \mp ct)$. Le débit volumique est simplement $Q(x, t) \equiv Sv(x, t)$ (on verra plus tard pourquoi on le fait intervenir plutôt que la vitesse v). Par définition l'impédance acoustique est

$$Z_a \equiv \frac{p(x, t)}{Q(x, t)} = \pm \frac{1}{Sc\chi_S} = \pm \frac{\rho_0 c}{S} = \pm \frac{1}{S} \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_S}}$$

On voit que l'impédance acoustique fait non-seulement intervenir des caractéristiques du fluide (ρ_0, χ_S) mais également la surface S de la section du tuyau. On définit alors une grandeur qui ne concerne que le fluide lui-même et qu'on appelle l'impédance acoustique caractéristique

$$Z_{ac} \equiv S|Z_a| = \left| \frac{p(x, t)}{v(x, t)} \right| = \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_S}}.$$

Cette quantité est bien la racine carrée du produit d'une rigidité ($1/\chi_S$) et d'une inertie (ρ_0).

Ondes libres : propagation et transport énergie

- But de ce chapitre :
Dans ce chapitre nous allons étudier les ondes libres et la manière dont elles propagent de l'énergie. Ce chapitre reprend de manière plus générale quelques éléments du chapitre précédent sur l'énergie et introduit la notion de puissance et d'intensité. Nous utiliserons surtout l'exemple de la corde vibrante (CV).
- Lien avec cours de Mathématiques :
 - *Dérivées partielles (revoir le cours de Math de S1)*
 - *intégrales (revoir le cours de Math de S1)*

Sommaire

4.1	Puissance transportée par une onde - exemple de la corde vibrante . . .	30
4.2	Conservation locale de l'énergie mécanique - démonstration pour la corde vibrante	30
4.3	Vérification de la conservation pour la corde vibrante	31
4.4	Transport d'énergie par une onde progressive : vitesse de propagation de l'énergie sur une corde vibrante	32
4.5	Puissance transportée par une onde acoustique dans un tuyau sonore .	33
4.6	Energie, puissance et intensité d'une onde progressive	33
4.6.1	Généralisation	34
4.7	Dilution de l'énergie d'une onde progressive à trois dimensions	35
4.8	A retenir	36

4.1 Puissance transportée par une onde - exemple de la corde vibrante

On va maintenant définir diverses grandeurs utiles à la discussion du transport d'énergie par une onde. On considère le cas de la corde vibrante à titre d'exemple.

On a vu que l'énergie mécanique de la corde vibrante est $E = \int_0^L dx \left[\frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]$. La **densité linéique d'énergie** (i.e. l'énergie mécanique par unité de longueur de la corde) est

$$e_L(x, t) = \left[\frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]$$

On définit aussi la puissance instantanée $\mathcal{P}(x, t) \equiv \vec{T}(x, t) \cdot \vec{v}(x, t)$ où \vec{T} est la force de tension que la gauche exerce sur la droite et \vec{v} est la vitesse de la corde. La puissance ainsi définie est la puissance instantanée qui passe de gauche à droite¹ de x à l'instant t . Or $\vec{v} = \vec{e}_y \partial_t u$ et $\vec{T} = -T_0 \vec{e}_x - T_0 \partial_x u \vec{e}_y$ (voir section 3.1 sur la corde vibrante), d'où la **puissance instantanée qui passe de gauche à droite** (de x à l'instant t) est

$$\mathcal{P}(x, t) = -T_0 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x}$$

On rappelle que la puissance est une énergie par unité de temps ou aussi une force multipliée par une vitesse. La puissance que nous venons d'obtenir s'interprète alors comme l'énergie par unité de temps qui passe en x de la gauche vers la droite à l'instant t . C'est donc aussi le **courant d'énergie** compté positivement s'il passe de gauche à droite avec notre convention et négativement s'il passe de droite à gauche. Il est important de se souvenir que la puissance transportée est une grandeur algébrique : son signe est important car il indique le sens du transport de l'énergie. On appelle $\vec{\mathcal{P}}(x, t) = \mathcal{P}(x, t) \vec{e}_x$ le **vecteur courant d'énergie**. Ce vecteur est surtout important quand on étudie des ondes qui se propagent dans un espace à plusieurs dimensions.

4.2 Conservation locale de l'énergie mécanique - démonstration pour la corde vibrante

Considérons une corde en train d'osciller. On appelle A son extrémité gauche immobile ($x=0$) et B son extrémité droite immobile ($x=L$). Et on considère un morceau de corde limité à gauche par le point C et à droite par le point D . Le morceau de corde CD n'est pas nécessairement de taille infinitésimale. L'énergie qui entre dans le morceau CD durant

1. Si on avait pris la force de tension que la droite exerce sur la gauche on aurait obtenu la puissance transportée de la droite vers la gauche.

un temps dt est $\mathcal{P}(x_c, t)dt - \mathcal{P}(x_d, t)dt$ (i.e. ce qui entre par la gauche moins ce qui sort par la droite). Dans le même temps, l'énergie contenue dans le morceau CD a changée : la variation de cette énergie est $E_{CD}(t + dt) - E_{CD}(t) = dt \frac{dE_{CD}}{dt}$ où $E_{CD}(t) = \int_{x_c}^{x_d} dx e_L(x, t)$. Comme l'énergie mécanique est conservée (i.e. qu'il n'y a pas de dissipation ni d'absorption d'énergie), la variation d'énergie est égale à l'énergie (algébrique) qui entre dans le morceau CD et donc

$$\frac{dE_{CD}}{dt}(t) = \mathcal{P}(x_c, t) - \mathcal{P}(x_d, t)$$

On peut écrire une forme locale de cette **équation de conservation de l'énergie** (ici c'est une loi globale). Pour cela, on remarque que $d/dt \int dx e_L(x, t) = \int dx \partial_t e_L$ et $\mathcal{P}(x_c, t) - \mathcal{P}(x_d, t) = \int_{x_d}^{x_c} dx \partial_x \mathcal{P}(x, t) = - \int_{x_c}^{x_d} dx \partial_x \mathcal{P}(x, t)$. Alors la loi de conservation de l'énergie pour le morceau CD s'écrit $\int_{x_c}^{x_d} dx [\partial_t e_L + \partial_x \mathcal{P}] = 0$. Et comme ceci doit être vrai quelquesoit C et D , on en déduit la **loi de conservation locale de l'énergie mécanique**

$$\boxed{\frac{\partial e_L}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x}(x, t) = 0}$$

C'est un premier exemple de loi de continuité : vous en verrez d'autres en physique (par exemple, la loi de conservation locale de la charge électrique ou encore la loi de conservation de la probabilité de présence en mécanique quantique) à chaque fois qu'une grandeur physique se conserve localement. Dans ce contexte \mathcal{P} s'interprète comme le courant d'énergie.

Pour démontrer cette loi, nous n'avons pas utilisé le modèle de la corde vibrante (nous n'avons par exemple pas utilisé l'équation d'onde de d'Alembert). Nous nous sommes juste servi de l'hypothèse de conservation de l'énergie. Dans la prochaine partie, nous vérifions que notre modèle de la corde vibrante conserve bien l'énergie mécanique.

Notons également qu'aux deux extrémités de la corde (en A et en B), la puissance transportée est nulle car la corde ne vibre pas $u(0, t) = 0 = u(L, t)$ à tout instant. En appliquant la loi de conservation globale de l'énergie à la corde entre A et B , on trouve donc que

$$\boxed{\frac{dE_{AB}}{dt}(t) = \mathcal{P}(x_a = 0, t) - \mathcal{P}(x_b = L, t) = 0 - 0 = 0 \Rightarrow E_{AB}(t) = \text{constante}}$$

4.3 Vérification de la conservation pour la corde vibrante

On part de $\mathcal{P} = -T_0 \partial_t u \partial_x u$ et $e_L = \left[\frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]$ obtenus dans la description de la corde vibrante (vraie sous certaines hypothèses telles que la corde souple, la faible inclinaison de la corde par rapport à la direction au repos, etc.). Calculons alors $\partial_x \mathcal{P}$ et $\partial_t e_L$ pour voir si nous avons bien $\partial_t e_L + \partial_x \mathcal{P} = 0$:

$$\begin{aligned} \partial_x \mathcal{P} &= -T_0 \left(\partial_{xt}^2 u \partial_x u + \partial_t u \partial_x^2 u \right) \\ \partial_t e_L &= \mu_0 \partial_t u \partial_t^2 u + T_0 \partial_x u \partial_{tx}^2 u \end{aligned}$$

Donc²

$$\partial_t e_L + \partial_x \mathcal{P} = \partial_t u \times (\mu_0 \partial_t^2 u - T_0 \partial_x^2 u) + T_0 \partial_x u \partial_{tx}^2 u \times (1 - 1) = 0$$

où pour montrer la nullité nous avons utilisé l'équation d'onde de d'Alembert de la corde vibrante $\mu_0 \partial_t^2 u = T_0 \partial_x^2 u$. Nous avons donc explicitement vérifié que notre modèle de la corde vibrante conserve l'énergie mécanique.

4.4 Transport d'énergie par une onde progressive : vitesse de propagation de l'énergie sur une corde vibrante

Considérons une onde progressive $u(x, t) = f(x \mp ct)$ et calculons la puissance transportée (ici $c = \sqrt{T_0/\mu_0}$ est la vitesse de propagation des ondes sur la corde vibrante). La densité linéique d'énergie est $e_L = \left[\frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] = \mu_0 c f'(x \mp ct)^2$ où nous avons utilisé que $\partial_t u = \mp c f'$, $\partial_x u = f'$ et $\mu_0 c^2 = T_0$. Ceci montre que $e_L(x, t) = \mu_0 c f'(x \mp ct)^2$ est une fonction uniquement de la variable $x \mp ct$. Or nous savons (voir la section 2.1.1 sur la solution générale de l'équation de d'Alembert) qu'une fonction $g(x - ct)$ est solution de l'équation différentielle $\partial_t g(x - ct) + c \partial_x g(x - ct) = 0$ et qu'une fonction $g(x + ct)$ est solution de $\partial_t g(x + ct) - c \partial_x g(x + ct) = 0$. De plus on sait que $g(x - ct)$ décrit une onde se propageant à la vitesse $+c$ et que $g(x + ct)$ décrit une onde se propageant à la vitesse $-c$. On en déduit que **l'énergie se propage à la vitesse c** et que $e_L(x, t) = \mu_0 c f'(x \mp ct)^2$ vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\partial e_L}{\partial t} \pm c \frac{\partial e_L}{\partial x} = 0$$

En comparant avec l'équation locale de conservation de l'énergie, on en déduit que la puissance transportée est

$$\boxed{\mathcal{P}(x, t) = \pm c \times e_L(x, t)}$$

Là encore, il s'agit d'un résultat assez général que vous rencontrerez dans d'autres contextes : le courant (ici \mathcal{P}) d'une grandeur physique (ici l'énergie) est donné par le produit de la vitesse de transport de cette grandeur (ici la vitesse de propagation de l'énergie $\pm c$) et de la densité de cette grandeur (ici la densité linéique d'énergie e_L).

Démonstration alternative : pour une onde progressive $u(x, t) = f(x \mp ct)$, on a $\mathcal{P} = -T_0 \partial_t u \partial_x u = \pm \mu_0 c^3 f'(x \mp ct)^2$ or $e_L = \mu_0 c^2 f'(\mp ct)^2$ donc $\mathcal{P} = \pm c e_L$. Cqfd.

2. La notation $\partial_{tx}^2 u$ signifie $\partial_{tx}^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \partial_{xt}^2 u$.

4.5 Puissance transportée par une onde acoustique dans un tuyau sonore

La puissance transportée est $\mathcal{P}(x, t) = \vec{F} \cdot \vec{v} = Sp(x, t)\partial_t u(x, t) = -(S/\chi_S)\partial_x u \partial_t u$. On remarque qu'on a utilisé la force de surpression et pas la force totale de pression : en effet, l'onde acoustique est uniquement due à la surpression p , la pression à l'équilibre P_0 ne contribue pas. Pour une onde progressive $u(x, t) = f(x \mp ct)$, la puissance transportée est $\mathcal{P}(x, t) = \pm c(S/\chi_S)f'(x \mp ct)^2$ et la densité linéique d'énergie est $e_L(x, t) = S \left[\frac{1}{2}\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2\chi_S} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right] = (S/\chi_S)f'(x \mp ct)^2$. On a donc $\mathcal{P} = \pm ce_L = \pm cSe_V$. On voit là aussi que l'énergie est transportée à la vitesse $\pm c$.

4.6 Energie, puissance et intensité d'une onde progressive

On va maintenant définir diverses quantités liées à l'énergie d'une onde : la puissance \mathcal{P} , l'intensité I et l'intensité en decibels I_{dB} . La puissance est un courant d'énergie et l'intensité est un courant d'énergie (moyenné sur le temps) par unité de surface. Dimensionnellement, l'énergie est en joules (J), la puissance en watts (W=J.s) et l'intensité en W/m² (front d'onde 3D) ou W/m (front d'onde 2D).

De manière générale, la **puissance transportée** le long d'un axe x , au travers d'une surface de section dS est

$$d\mathcal{P}(x, t) = -\mathcal{C}dS \partial_x u(x, t)\partial_t u(x, t)$$

. Le seul rôle joué par la constante positive $\mathcal{C} > 0$ est de faire en sorte que la puissance s'exprime dans les bonnes unités.

Si l'onde a une période T (il ne s'agit pas nécessairement d'une onde sinusoïdale mais juste d'un signal périodique), on peut définir la puissance moyennée sur une période $\langle \mathcal{P}(x) \rangle_T \equiv T^{-1} \int_{\text{période}} dt \mathcal{P}(x, t)$ qui est une quantité qui ne dépend plus du temps. L'idée est qu'il est fréquent d'avoir une onde qui oscille vite, i.e. avec une courte période, devant la vitesse à laquelle réagit un **détecteur** de cette onde. Par exemple, notre oreille n'entend pas que la note "La" émise par un diapason oscille 440 fois par seconde. De même notre oeil ne perçoit pas que la lumière du soleil oscille environ 10^{14} fois par seconde. La bonne quantité à définir pour un tel détecteur (lent devant la période de l'onde) est la puissance moyennée sur le temps reçue par unité de surface : c'est ce qu'on appelle **l'intensité**

$$I(x) \equiv \frac{|\langle d\mathcal{P}(x) \rangle_T|}{dS}$$

. C'est la valeur absolue de la puissance (ou la norme du vecteur puissance dans un cadre plus général) qui intervient ici car l'intensité est toujours positive alors que la puissance

transportée possède un signe. Si la puissance est uniforme sur le front d'onde de surface S , cette formule se simplifie en :

$$I \equiv \frac{|\langle \mathcal{P} \rangle_T|}{S}$$

L'oreille a une sensibilité qui varie approximativement comme la fonction logarithme³. Il est commode de définir l'intensité en decibels (dB) pour mesurer l'intensité d'une onde acoustique :

$$I_{dB} \equiv 10 \log \frac{I}{I_0}$$

où I_0 est une intensité de référence habituellement prise à $I_0 = 10^{-12}$ W/m² qui est le seuil d'audition typique d'un être humain (à 1 kHz). Dans la formule précédente I est l'intensité en W/m², I_{dB} est sans dimension mais on a l'habitude de dire qu'il s'agit de decibels (dB) et le logarithme est en base 10 ($\log 10^3 = 3$). Quelques exemples : le seuil d'audition est par définition à 0 dB, le seuil de douleur est à 120 dB, un chuchotement correspond à 20 ou 30 dB, le bruit dans l'amphi durant un cours de physique des ondes est à 70 dB (c'est le seuil de tolérance de l'enseignant), un klaxon de voiture à 80 ou 90 dB, un avion au décollage correspond à 140 dB, etc.

On considère maintenant le cas particulier important d'une onde progressive sinusoïdale $u(x, t) = A \cos(kx \mp \omega t + \phi)$. La puissance transportée est $\mathcal{P}(x, t) = -\mathcal{C}S\partial_x u \partial_t u$ où $\mathcal{C} > 0$. Pour une onde progressive $u(x, t) = f(x \mp ct)$ on a $\partial_t u = \mp c \partial_x u$ et donc $\mathcal{P}(x, t) = \pm c \mathcal{C} S (\partial_x u)^2$. De plus l'onde est sinusoïdale et donc $\partial_x u = -kA \sin(kx \mp \omega t + \phi)$ donc la puissance est $\mathcal{P}(x, t) = \pm c \mathcal{C} S k^2 A^2 \sin^2(kx \mp \omega t + \phi) \propto S A^2$ qui est bien proportionnelle au carré de l'amplitude de l'onde. On reconnaît aussi que $\mathcal{P} = \pm c \times e_L$. Pour calculer l'intensité, il faut maintenant calculer la moyenne temporelle d'un sinus au carré. Un résultat général important⁴ est que **la moyenne sur une période du carré d'un sinus ou d'un cosinus vaut 1/2**. Donc $\langle \mathcal{P}(x) \rangle_T = \pm c \mathcal{C} S k^2 A^2 / 2$ et l'intensité est $I = c \mathcal{C} k^2 A^2 / 2 \propto A^2$ qui est bien proportionnelle au carré de l'amplitude.

4.6.1 Généralisation

Si on veut généraliser un peu, on appelle \mathcal{R} la rigidité du milieu, \mathcal{I} son inertie et S la surface du front d'onde. La célérité des ondes est donnée par $c = \sqrt{\mathcal{R}/\mathcal{I}}$ et l'impédance

3. Il existe une loi empirique dite de Fechner ou de Weber-Fechner qui dit que la sensation est proportionnelle au logarithme de l'excitation. Quand on applique cette loi à l'acoustique on comprend que l'échelle d'intensité en decibels est bien adaptée à décrire la sensation du son : en passant de 40 à 80 dB on a l'impression que le son est deux fois plus fort alors que son intensité est 10^4 fois plus grande.

4. Démonstration : soit t_0 et ϕ deux constantes quelconques (elles ne doivent pas dépendre du temps) alors $\langle \sin^2(2\pi t/T + \phi) \rangle_T \equiv T^{-1} \int_{t_0}^{t_0+T} dt \sin^2(2\pi t/T + \phi) = T^{-1} \int_{t_0}^{t_0+T} dt (1 - \cos(4\pi t/T + 2\phi))/2 = T^{-1} T/2 - T^{-1} \int_{t_0}^{t_0+T} dt \cos(4\pi t/T + 2\phi) = 1/2 - 0$ où on a utilisé que $\sin^2 \theta = (1 - \cos 2\theta)/2$ et que le cosinus est de moyenne nulle (son intégrale sur une période ou plusieurs est nulle). De même, on montre que $\langle \cos^2(2\pi t/T + \phi) \rangle_T \equiv T^{-1} \int_{t_0}^{t_0+T} dt \cos^2(2\pi t/T + \phi) = 1/2$ en utilisant que $\cos^2 \theta = (1 + \cos 2\theta)/2$. On retient que $\langle \sin^2(2\pi t/T + \phi) \rangle_T = \langle \cos^2(2\pi t/T + \phi) \rangle_T = 1/2$.

caractéristique par $Z_{car} = \sqrt{\mathcal{R}\mathcal{I}}$. La puissance transportée est alors $\mathcal{P} = -\mathcal{R}S\partial_x u \partial_t u$ et la densité linéique d'énergie est $e_L = (\mathcal{I}(\partial_t u)^2 + \mathcal{R}(\partial_x u)^2)S/2$. Pour une onde progressive $u(x, t) = f(x \mp ct)$ alors $\partial_t u = \mp c\partial_x u$ et donc $\mathcal{P} = \pm c\mathcal{R}S(\partial_x u)^2$ et $e_L = (\mathcal{I}c^2(\partial_x u)^2 + \mathcal{R}(\partial_x u)^2)S/2 = S\mathcal{R}(\partial_x u)^2$. On a donc que $\mathcal{P} = \pm ce_L$.

Soit $\vec{I} = d\vec{\mathcal{P}}/dS$ le vecteur densité volumique de courant d'énergie (c'est une intensité). On a $\vec{I} = e_V \vec{v}_E$? où e_V est la densité volumique d'énergie et \vec{v}_E est la vitesse à laquelle se propage l'énergie. Alors la conservation locale de l'énergie s'écrit $\partial_t e_V + \text{div} \vec{I} = 0$. Le flux de \vec{I} à travers une surface S est $\mathcal{P} = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{I}$ est la puissance transportée à travers la surface S . C'est aussi le courant d'énergie à travers la surface S ou encore la densité linéique de courant d'énergie. En effet $\mathcal{P} = e_L v_E = S e_V v_E$. On a alors la loi de conservation locale de l'énergie sous la forme $\partial_t e_L / S + \partial_x \mathcal{P} / S = 0$ i.e. $\partial_t e_L + \partial_x \mathcal{P} = 0$. L'intensité est la norme de la densité volumique de courant d'énergie moyennée sur une période $I = |\langle \vec{I} \rangle_T|$.

4.7 Dilution de l'énergie d'une onde progressive à trois dimensions

Nous avons généralisé à la fin du chap. II, l'équation d'onde de d'Alembert à un espace de dimension trois. On pense par exemple au cas d'une onde acoustique qui se propagerait dans l'air libre. Nous avons vu qu'une solution de l'équation de d'Alembert à 3D s'écrit

$$u(r, t) = \frac{f(r - ct)}{r} + \frac{g(r + ct)}{r}.$$

A cause de sa dépendance en $1/r$, l'amplitude de l'onde sphérique décroît comme $1/r$ quand r croît. Par exemple, une onde sphérique progressive divergente de forme sinusoïdale $u(r, t) = (A/r) \cos(kr - \omega t + \phi)$ a une amplitude qui est A/r .

Une autre façon de le voir est de se rendre compte que la surface du front d'onde augmente comme r^2 (en effet la surface du front d'onde à une distance r de la source est $4\pi r^2$, c'est la surface d'une sphère de rayon r). Or la conservation de l'énergie sur tout le front d'onde impose que l'intensité diminue comme $1/r^2$. Prenons le cas simple d'une source ponctuelle qui émet avec une puissance moyenne \mathcal{P}_m une onde sphérique progressive divergente. A une distance r de la source l'intensité est

$$I(r) = \mathcal{P}_m / S = \mathcal{P}_m / (4\pi r^2) \propto 1/r^2$$

C'est le phénomène de **dilution de l'énergie sur le front d'onde**. Il s'agit d'un mécanisme de diminution de l'amplitude d'une onde qui est d'origine purement géométrique (il ne s'agit pas de dissipation d'énergie, ni de réflexion partielle d'une onde). Or on sait que l'intensité est proportionnelle à l'amplitude au carré, on retrouve donc que l'amplitude d'une onde sphérique varie comme $1/r$.

4.8 A retenir

Par le même raisonnement que dans le cas de l'énergie ($u \rightarrow \alpha \times u \Rightarrow E \rightarrow \alpha^2 \times E$), on montre que la puissance et l'intensité sont proportionnelles au carré de l'amplitude de l'onde : \mathcal{P} et $I \propto |\text{Amplitude}|^2$. De plus l'intensité est indépendante de la surface du front d'onde (c'est une grandeur intensive) alors que la puissance est proportionnelle à cette surface et que l'énergie est proportionnelle au volume occupé par l'onde (c'est une grandeur extensive). Finalement, on retient que

$$I \propto \mathcal{P}/S \propto E/V \propto |\text{Amplitude}|^2$$

Réflexion et transmission des ondes. Ondes stationnaires

- *But de ce chapitre :*
Dans ce chapitre nous allons tout d'abord étudier la réflexion totale d'une onde progressive sur une paroi. Cela nous conduira naturellement aux ondes confinées dans l'espace et donc aux ondes stationnaires. Pour finir le chapitre, nous étudierons les phénomènes de réflexion partielle d'une onde.
- *Lien avec cours de Mathématiques :*
 - Nombres complexes et trigonométrie (revoir le cours de Math de S1)
 - Introduction aux séries de Fourier (qui sera abordé dans le cours de Math de S4)

Sommaire

5.1	Réflexion totale d'une onde progressive quelconque	38
5.1.1	Mur dur	38
5.1.2	Mur doux	38
5.1.3	Cas du tuyau sonore	39
5.2	Réflexion totale d'une onde progressive sinusoïdale, onde stationnaire .	40
5.3	Réflexions totales multiples d'une onde progressive sinusoïdale, onde stationnaire de fréquence quantifiée	41
5.3.1	Quantification de la fréquence, phénomène de résonance : fréquences propres	41
5.3.2	Modes propres	42
5.3.3	Décomposition sur les modes propres (analyse harmonique). Exemple de la corde de guitare	42
5.4	Réflexion et transmission partielles d'une onde progressive à l'interface entre deux milieux	43
5.4.1	Plan de séparation de deux fluides	43
5.4.2	Jonction de deux tuyaux de sections différentes	45

5.1 Réflexion totale d'une onde progressive quelconque

5.1.1 Mur dur

On considère l'exemple d'une onde progressive (disons vers la gauche) quelconque sur une corde vibrante provenant de $x = +\infty$ et se dirigeant vers un "mur" en $x = 0$, i.e. un point où la corde ne peut bouger car elle est maintenue fixe. On parlera de "mur dur". On appelle $t \approx 0$ l'instant où l'onde atteint le mur. Quand $t < 0$ l'onde progresse vers le mur et s'écrit $u(x, t) = f(x + ct)$. Or on sait que la **condition au bord** en $x = 0$ est

$$\boxed{u(0, t) = 0, \quad \forall t \text{ (mur dur)}}.$$

Pour satisfaire cette condition, il est nécessaire de considérer la présence d'une onde progressive vers la droite $g(x - ct)$. L'onde totale s'écrit $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$. La condition au bord $u(0, t) = 0 = f(ct) + g(-ct)$ implique que $g(y) = -f(-y)$. Autrement dit

$$u(x, t) = f(x + ct) - f(-x + ct).$$

La signification physique est que l'onde incidente $f(x + ct)$ (qui est une onde progressive vers la gauche) est réfléchiée en $-f(-x + ct)$ qui est une onde progressive vers la droite, qui a la même forme que l'onde incidente mais qui est inversée de "haut en bas" (c'est $u \rightarrow -u$ et c'est le signe $-$ devant f et également inversée comme dans un miroir qui échange la droite et la gauche (c'est $x \rightarrow -x$ et c'est le signe dans l'argument de f). En effet on a $g(y) = -f(-y)$. Dans le cas présent, on dit que la **réflexion** est **totale** (car $|g(y)| = |f(y)|$ autrement dit l'amplitude de l'onde réfléchiée est la même que celle de l'onde incidente) et que la réflexion se fait **avec changement de signe** pour u (car $g(y) = -f(-y)$ c'est le signe $-$ devant f). On verra plus loin que le coefficient de réflexion en amplitude vaut $r = -1$ ici.

Il faut aussi comprendre que la corde existe de $x = 0$ à $+\infty$ mais pas en $x < 0$ ainsi tant que $t < 0$, $u(x, t) = f(x + ct) - f(-x + ct)$ mais l'onde réfléchiée $-f(-x + ct)$ est une onde fantôme car elle a son support sur une portion de la corde qui n'existe pas. Donc en gros quand $t < 0$, $u(x, t) \approx f(x + ct)$. Au contraire, pour $t > 0$, c'est l'onde incidente qui est fantôme et l'onde réfléchiée qui devient réelle $u(x, t) \approx -f(-x + ct)$. Le seul moment où les deux ondes existent en même temps, c'est quand $t \approx 0$.

5.1.2 Mur doux

Il existe un autre type de **réflexion totale** mais **sans changement de signe** de u . C'est ce qui se produit pour la condition au bord dite du "mur doux" par opposition au "mur dur". On peut imaginer qu'à l'extrémité $x = 0$ de la corde, il y a attaché un anneau (de poids négligeable) qui coulisse sans frottements le long d'une tige verticale. La condition au bord en $x = 0$ est maintenant que $T_y(0, t) = 0$ à tout instant, i.e. que

$$\boxed{\partial_x u(0, t) = 0, \quad \forall t \text{ (mur doux)}}.$$

Autrement dit, la corde a une tangente horizontale en $x = 0$. Cette condition appliquée à $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$ va nous permettre de déterminer g (qui ne va pas être la même que dans le cas du mur dur). On a $\partial_x u(x, t) = f'(x + ct) + g'(x - ct)$ et donc $u(0, t) = 0 = f'(ct) + g'(-ct)$ et on trouve donc que $g'(y) = -f'(-y)$. En intégrant, on trouve que $g(y) = f(-y) + \text{constante}$ d'où $u(x, t) = f(x + ct) + f(-x + ct) + \text{constante}$. Or si on est loin des deux ondes incidente et réfléchie, on sait qu'on doit avoir $u(x, t) = 0$ et donc nécessairement la constante est nulle. Finalement

$$u(x, t) = f(x + ct) + f(-x + ct).$$

Ce résultat se comprend de la manière suivante : l'onde incidente subit une réflexion totale sans changement de signe en $x = 0$. Par contre l'onde réfléchie se propage vers la droite alors que l'onde incidente se propage vers la gauche et l'onde réfléchie est inversée gauche-droite (image dans un miroir) de l'onde incidente (c'est le signe $-$ dans l'argument de f dans $g(y) = f(-y)$).

5.1.3 Cas du tuyau sonore

On étudie la réflexion sur un tuyau fermé par un piston en détectant la surpression p (et pas le déplacement de la tranche d'air u). On trouve que cette **réflexion** est **totale** et se fait **sans changement de signe pour** p , alors que la même situation donne une réflexion totale avec changement de signe pour le déplacement u car en présence d'un tuyau fermé en $x = 0$ on a évidemment

$$u(0, t) = 0 \text{ à tout instant } t.$$

En effet, la surpression et le déplacement de la tranche d'air sont des quantités qui sont en quadrature l'une par rapport à l'autre $p = -1/\chi_S \partial_x u$: un maximum/minimum de p correspond à un zéro de u et vice-versa.

Dans le cas du tuyau ouvert, on constate (avec surprise) qu'il y a également une **réflexion totale** mais qui se fait **avec changement de signe pour la surpression** (et donc sans changement de signe pour le déplacement de la tranche d'air). L'explication est la suivante, en dehors du tuyau sonore, la pression dans la pièce est la pression acoustique. Autrement dit suffisamment loin de la sortie du tuyau ouvert la surpression p doit être nulle à tout instant. Si la sortie du tuyau est en $x = 0$ (et que le tuyau occupe $x > 0$), on trouve que la surpression s'annule environ en $x \approx -d/2$ où d est le diamètre du tuyau sonore. On a donc la condition aux limites $p(x \approx -d/2, t) = 0$ à tout instant. Dans la pratique, pour un tuyau de petit diamètre (devant la longueur d'onde), on suppose en général que

$$p(0, t) \approx 0 \text{ à tout instant } t \Rightarrow \partial_x u(0, t) \approx 0.$$

5.2 Réflexion totale d'une onde progressive sinusoïdale, onde stationnaire

Considérons maintenant le cas particulier d'une onde incidente sinusoïdale. Et pour simplifier, on ne considèrera que le cas du mur dur avec la condition au bord $u(x = x_{\text{bord}}, t) = 0$ à tout instant. Dans ce cas là $A \cos(kx + \omega t + \phi)$ est l'onde incidente et l'onde réfléchie est $-A \cos(-kx + \omega t + \phi)$ et l'onde totale est $u(x, t) = A \cos(kx + \omega t + \phi) - A \cos(-kx + \omega t + \phi)$. Or on sait que $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$. On en déduit donc que

$$u(x, t) = -2A \sin(kx) \sin(\omega t + \phi).$$

Il ne s'agit pas d'une onde progressive car elle n'est pas de la forme $f(x \mp ct)$. C'est une onde de la forme $u(x, t) = f(x)g(t)$, i.e. une fonction qui ne dépend que de l'espace en facteur d'une fonction qui ne dépend que du temps. De plus l'oscillation temporelle est sinusoïdale (ici la partie spatiale, $\sin(kx)$, est aussi sinusoïdale mais ce n'est pas le cas général). On a donc affaire à une onde qui oscille (de manière harmonique) dans le temps mais ne se déplace pas dans l'espace : c'est pourquoi on l'appelle une **onde stationnaire** (par opposition à progressive).

Au cours du temps, cette onde ne se déplace pas et il existe des positions remarquables. D'une part, il y a les **noeuds** qui sont des points de vibration nulle $u(x, t) = 0$ à tout instant. Dans notre exemple ils se trouvent en x tel que $\sin kx = 0$ autrement dit en $x = n \times \pi/k = n \times \lambda/2$ avec $n \in \mathbb{Z}$. La distance entre deux noeuds consécutifs est donc $\lambda/2$. D'autre part, il y a les **ventres** qui sont des points où la vibration est maximale et donc où $\partial_x u(x, t) = 0$ à tout instant. Dans notre exemple, ils se trouvent aux endroits où le sinus $\sin kx$ est soit maximal soit minimal, i.e. en $x = (n + 1/2)\lambda/2$. La distance entre deux ventres consécutifs est d'une demi longueur d'onde. La distance minimale entre un noeud et un ventre est de $\lambda/4$.

De manière générale une **onde stationnaire** s'écrit

$$u(x, t) = f(x) \cos(\omega t + \phi),$$

i.e. une fonction quelconque de l'espace en facteur d'une oscillation temporelle harmonique (i.e. sinusoïdale). Pour l'équation d'onde de d'Alembert, on peut démontrer¹ qu'une onde stationnaire est nécessairement le produit d'une fonction sinusoïdale en espace et d'une fonction sinusoïdale en temps (et évidemment les deux oscillations sont reliées par la relation de dispersion $\omega = ck$) soit

$$u(x, t) = A \cos(kx + \varphi) \cos(\omega t + \phi),$$

où A , φ et ϕ sont des constantes réelles quelconques.

1. La démonstration ne sera pas donnée.

5.3 Réflexions totales multiples d'une onde progressive sinusoïdale, onde stationnaire de fréquence quantifiée

On considère maintenant une onde confinée entre deux murs.

5.3.1 Quantification de la fréquence, phénomène de résonance : fréquences propres

Considérons une corde vibrante attachée à ses deux extrémités $x = 0$ et $x = L$. Si on imagine une onde progressive créée sur cette corde (par exemple de la droite vers la gauche), elle va subir une réflexion totale en $x = 0$ puis une autre en $x = L$ puis à nouveau en $x = 0$ et ainsi de suite. Elle va donc subir des réflexions totales multiples. S'il s'agit d'une onde progressive sinusoïdale, on va avoir affaire à une onde stationnaire. Elle doit vérifier $u(0, t) = 0$ et $u(L, t) = 0$ à tout instant. Or on sait qu'en raison de la condition au bord en $x = 0$ on a $u(x, t) = -2A \sin(kx) \sin(\omega t + \phi)$. On impose alors la condition au deuxième bord $u(L, t) = 0 = -2A \sin(kL) \sin(\omega t + \phi)$ à tout instant. Ceci implique que $\sin(kL) = 0$ et donc que $kL = \pi n$. Autrement dit le vecteur d'onde (et donc la pulsation car $\omega = ck$) ne peut être quelconque et est nécessairement un multiple entier de π/L . On obtient donc une **quantification de la fréquence des ondes stationnaires**. la pulsation est nécessairement un multiple entier d'une fréquence fondamentale

$$\omega_n = n \times \frac{\pi c}{L} = n \times \omega_1.$$

Ici la **pulsation fondamentale** est $\omega_1 = \pi c/L$. C'est la fréquence du mode de plus basse fréquence qu'on appelle le mode fondamental. On peut travailler également avec des fréquences $\nu = \omega/(2\pi)$. Dans ce cas,

$$\nu_n = n \times \frac{c}{2L} = n \times \nu_1,$$

où $\nu_1 = \omega_1/(2\pi) = c/(2L)$.

Les autres modes sont ici des **harmoniques** de la fréquence fondamentale (i.e. des multiples entiers de la fréquence fondamentale). On parle de **fréquences propres** ou de fréquences des modes propres pour désigner collectivement ces fréquences.

Ici nous avons considéré le cas d'une corde tenue en ses deux extrémités (mur dur - mur dur). Il est également possible de considérer une corde tenue à une extrémité et "libre" à l'autre (mur dur - mur doux). Ou encore une corde avec ses deux extrémités libres (mur doux - mur doux). De même, il est possible d'avoir des ondes stationnaires quantifiées pour le tuyau sonore qui peut être fermé - fermé ou fermé - ouvert ou encore ouvert - ouvert.

La quantification de la fréquence d'une onde stationnaire résulte d'un phénomène de **résonance**. Il faut un accord entre la longueur d'onde λ de l'onde stationnaire et la taille

L de la “boite” dans laquelle l’onde est confinée (i.e. la distance entre les deux murs). En effet dans la configuration mur dur - mur dur, il y a nécessairement un noeud de l’onde stationnaire en chaque bord ($x = 0$ et $x = L$). Or la distance entre deux noeuds consécutifs est $\lambda/2$. La condition de résonance est donc qu’un nombre entier de demi longueurs d’onde entre dans la boite, soit $n \times \lambda/2 = L$ ce qui est la même chose que $kL = n \times \pi$.

De manière qualitative, on peut considérer les modes propres comme les oscillations préférées de l’onde lorsqu’elle est confinée. Les fréquences quantifiées des modes propres sont alors les **fréquences préférées** ou **fréquences naturelles** du système. Si on excite le système (la corde ou le tuyau sonore) avec une onde sinusoïdale, la réponse sera forte quand la fréquence de l’excitation coïncidera avec une des fréquences propres du système.

5.3.2 Modes propres

De manière très générale, on peut définir les **modes propres** (ou modes normaux ou ondes stationnaires) d’un système linéaire² et invariant dans le temps³ (voir R.P. Feynman, Cours de physique, vol. 1 mécanique, la section 49-5.). Un mode propre est une onde dont l’oscillation temporelle se fait à une seule fréquence (i.e. qu’elle est harmonique ou encore sinusoïdale en temps) et dont la forme spatiale est invariante $u(x, t) = f(x) \cos(\omega t + \phi)$.

5.3.3 Décomposition sur les modes propres (analyse harmonique). Exemple de la corde de guitare

Ces modes propres jouent un rôle très important pour les systèmes linéaires et invariant dans le temps. En effet, on montre qu’une onde générale se décompose sur les modes propres (c’est une idée qui remonte à Daniel Bernoulli). Par exemple, pour une corde vibrante attachée à ses deux extrémités

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right) \cos(\omega_n t + \phi_n),$$

où les pulsations propres sont $\omega_n = n \times \pi c/L$. L’amplitude A_n du n ème mode et son déphasage ϕ_n sont fixés par les conditions initiales. Par exemple si on a tiré plus ou moins fort sur la corde, de quelle manière et à quel instant. Ainsi lorsqu’on joue une corde de guitare, on n’excite jamais une note pure (par exemple simplement le mode fondamental). Une note de musique contient de nombreuses fréquences. Elle contient une fondamentale ainsi que ses harmoniques. La fréquence de la fondamentale donne la hauteur de la note (si basse fréquence on dit que la note est grave, si haute fréquence on dit qu’elle est aigue). Le contenu en harmoniques de la note donne ce qu’on appelle son timbre. Ainsi même lorsqu’on croit jouer la même note sur deux guitares différentes en réalité le son n’est pas identique

2. On a déjà insisté sur l’importance d’avoir une équation d’onde linéaire et notamment du principe de superposition.

3. C’est l’invariance par translation dans le temps qui implique que le passage à la transformée de Fourier temporelle diagonalise le problème et donc que la vibration temporelle est simplement harmonique.

car même si les fréquences sont les mêmes le poids relatif des différentes harmonique est différent. Le contenu en harmonique est révélé par l'opération de transformée de Fourier. Dans les travaux pratiques sur la corde vibrante, vous utiliserez l'algorithme de FFT (fast Fourier transform) de l'oscilloscope pour analyser le contenu en harmoniques d'une note sur une corde de guitare. Le spectre obtenu par FFT consiste en une série de pics aux fréquences propres. La taille des pics est proportionnelles à l'amplitude du mode propre correspondant au carré A_n^2 . Il s'agit d'un exemple simple d' **analyse harmonique** ou d' **analyse de Fourier** que vous rencontrerez en mathématiques prochainement.

5.4 Réflexion et transmission partielles d'une onde progressive à l'interface entre deux milieux

Pour l'instant, nous n'avons considéré que des cas où la réflexion était totale. Nous voudrions maintenant étudier le cas où une onde incidente est partiellement réfléchi et partiellement transmise. C'est ce qui se passe lorsqu'une onde incidente rencontre un changement de milieu. On considère dans la suite le cas d'une onde acoustique dans un tuyau. Le changement de milieu est par exemple un changement de section du tuyau ou alors le passage d'un fluide à un autre fluide (on peut imaginer un tuyau vertical dans lequel un fluide dense en bas est surmonté d'un fluide moins dense au-dessus).

Un rôle important dans va être joué par les conditions aux limites : à l'endroit où le "milieu change", il faut écrire comment les grandeurs physiques ($u, v = \partial_t u, p, Q = Sv, \mathcal{P}$, etc.) sont reliés d'un côté à l'autre de l'interface.

De manière générale, on considère une onde incidente qui se propage dans un milieu 1 et vers la droite (caractérisé par une impédance Z_{1+} une célérité c_1 et une section de tuyau S_1). Le milieu 1 est à $x < 0$. En $x = 0$ se trouve l'interface vers le milieu 2 (caractérisé par une impédance Z_{2+} , une célérité c_2 et une section de tuyau S_2). La notation $Z_{\pm} = \pm \frac{1}{S} \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi S}}$ désigne l'impédance acoustique d'une onde progressive vers $\pm x$: par exemple Z_{1+} est l'impédance acoustique dans le milieu 1 d'une onde progressive vers la droite. On remarque que $Z_{1-} = -Z_{1+}$.

5.4.1 Plan de séparation de deux fluides

On considère un tuyau de section constante ($S_1 = S_2 = S$) mais rempli d'un fluide en $x < 0$ et d'un autre fluide en $x > 0$. Le plan $x = 0$ est l'interface entre les deux fluides. On envoie une onde progressive incidente depuis le milieu 1 et se propageant vers l'interface en $x = 0$. Lorsqu'elle arrive à l'interface, elle donne naissance à une onde transmise dans le milieu 2 et à une onde réfléchi dans le milieu 1. On appelle u_1 et u_2 les déplacements de tranche de fluide dans les milieux 1 et 2 et u_i, u_t, u_r les déplacements des ondes incidente, transmise et réfléchi. La quantité connue est $u_i(x, t)$ et on cherche à déterminer u_r et u_t .

Ecrivons les conditions aux limites en $x = 0$:

1. Les deux fluides restent en contact à tout instant (il n'y a pas de vide entre eux) et donc $u_1(0, t) = u_2(0, t)$ à tout instant. On a donc $u_i(0, t) + u_r(0, t) = u_t(0, t)$. Si on dérive par rapport au temps, on trouve que

$$v_i(0, t) + v_r(0, t) = v_t(0, t),$$

pour les vitesses de déplacement des tranches de fluide⁴. C'est la première relation importante.

2. D'après la loi de l'action et de la réaction, la force que le fluide à gauche de $x = 0$ exerce sur le fluide à droite est égale à moins la force que le fluide à droite exerce sur le fluide à gauche. Autrement dit $[P_0 + p_1(0, t)]S = [P_0 + p_2(0, t)]S$ à tout instant. Donc $p_1(0, t) = p_2(0, t)$ d'où

$$p_i(0, t) + p_r(0, t) = p_t(0, t),$$

qui est la deuxième relation importante.

On peut maintenant se servir de la relation entre surpression p et vitesse v pour une onde progressive donnée par l'impédance $p = Z_{\pm}Sv$ (par définition de l'impédance acoustique). Alors $p_i = Z_{1+}Sv_i$, $p_r = -Z_{1+}Sv_r$ et $p_t = Z_{2+}Sv_t$. En injectant dans la deuxième relation importante et en simplifiant par la section, on trouve que

$$Z_{1+}(v_i(0, t) - v_r(0, t)) = Z_{2+}v_t(0, t).$$

En utilisant cette troisième relation importante et la première encadrée, on peut exprimer les ondes transmises et réfléchies en fonction de l'onde incidente. On trouve que $v_t(0, t) = v_i(0, t)2Z_{1+}/(Z_{1+} + Z_{2+})$ et que $v_r(0, t) = v_i(0, t)(Z_{1+} - Z_{2+})/(Z_{1+} + Z_{2+})$. On appelle alors $t_v \equiv v_t(0, t)/v_i(0, t)$ le coefficient de transmission en amplitude pour la vitesse et $r_v \equiv v_r(0, t)/v_i(0, t)$ le coefficient de réflexion en amplitude pour la vitesse. On trouve que :

$$t_v = \frac{2Z_{1+}}{Z_{1+} + Z_{2+}} = \frac{2\rho_1c_1}{\rho_1c_1 + \rho_2c_2} \text{ et } r_v = \frac{Z_{1+} - Z_{2+}}{Z_{1+} + Z_{2+}} = \frac{\rho_1c_1 - \rho_2c_2}{\rho_1c_1 + \rho_2c_2}$$

où ρ_j est la masse volumique du fluide $j = 1, 2$ et c_j est la célérité des ondes dans le fluide $j = 1, 2$.

Le signe du coefficient de réflexion est important (alors que t_v est toujours positif). Par exemple, si l'impédance du milieu 2 est très grande devant celle du milieu 1, on trouve que $t_v \rightarrow 0^+$ et que $r_v \approx -1$ ce qui correspond à une **réflexion totale avec changement de signe de v** . Au contraire si $Z_{1+} \gg Z_{2+}$, on trouve que $t_v \approx 2$ et $r_v \approx 1$ qui correspond à une **réflexion totale sans changement de signe**. Si il y a égalité entre les deux impédances (on parle d'**adaptation d'impédance**), alors $r_v = 0$ et $t_v = 1$ ce qui correspond à une transmission totale (il n'y a pas du tout de réflexion). Pour un cas générique, il y a réflexion partielle (avec ou sans changement de signe) et transmission partielle.

On remarque qu'on peut également définir des coefficients r_p et t_p pour la réflexion et la transmission de la surpression. On trouve que

$$t_p = \frac{2Z_{2+}}{Z_{1+} + Z_{2+}} = \frac{Z_{2+}}{Z_{1+}}t_v \text{ et } r_p = \frac{Z_{2+} - Z_{1+}}{Z_{1+} + Z_{2+}} = -r_v$$

4. On peut aussi la voir comme résultant de la conservation du débit volumique $Q_1(0, t) = Q_2(0, t)$ où le débit volumique $Q = Sv = S\partial_t u$.

On définit également des coefficients de réflexion/transmission pour la puissance (moyennée sur une période, si le signal est périodique). Or $\mathcal{P}(x, t) = p(x, t)Sv(x, t)$ et la puissance acoustique (ou puissance moyennée) est $\mathcal{P}_a(x) \equiv \langle \mathcal{P}(x, t) \rangle = \langle p(x, t)Sv(x, t) \rangle$. Ces coefficients sont $R \equiv |\mathcal{P}_{a,r}/\mathcal{P}_{a,i}|$ et $T \equiv |\mathcal{P}_{a,t}/\mathcal{P}_{a,i}|$. En exprimant la surpression en fonction de la vitesse v grâce à l'impédance acoustique, on trouve que

$$R = r_v^2 = \left(\frac{Z_{1+} - Z_{2+}}{Z_{1+} + Z_{2+}} \right)^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{Z_{2+}}{Z_{1+}} t_v^2 = \frac{4Z_{1+}Z_{2+}}{(Z_{1+} + Z_{2+})^2}$$

On vérifie que $R + T = 1$ qui est la loi de conservation de l'énergie à l'interface. On vérifie qu'il y a bien deux types de réflexion totale : que $Z_{1+} \gg Z_{2+}$ ou que $Z_{1+} \ll Z_{2+}$, du moment que les deux impédances sont très différentes, on trouve que $R \approx 1$ et $T \approx 0$. De même si il y a adaptation d'impédance, on trouve que $R = 0$ et que $T = 1$.

5.4.2 Jonction de deux tuyaux de sections différentes

On considère un tuyau dont la section change brutalement en $x = 0$. Par exemple $S_1 < S_2$. Le tuyau est rempli d'un seul fluide de masse volumique ρ_0 et de célérité du son c . On envoie une onde progressive incidente depuis le milieu 1 et se propageant vers l'interface en $x = 0$ et on cherche les ondes réfléchiées et transmises.

Ecrivons les conditions aux limites en $x = 0$:

1. Il y a conservation de la matière au niveau du changement de section, ce qui se traduit par la conservation du débit volumique $Q = Sv$ soit $S_1v_1(0, t) = S_2v_2(0, t)$ à tout instant. On a donc

$$S_1[v_i(0, t) + v_r(0, t)] = S_2v_t(0, t).$$

C'est la première relation importante.

2. D'après la loi de l'action et de la réaction, la force que le fluide à gauche de $x = 0$ exerce sur le fluide à droite est égale à moins la force que le fluide à droite exerce sur le fluide à gauche. Autrement dit $[P_0 + p_1(0, t)]S_1 = [P_0 + p_2(0, t)]S_1$ à tout instant⁵. Donc $p_1(0, t) = p_2(0, t)$ d'où

$$p_i(0, t) + p_r(0, t) = p_t(0, t)$$

qui est la deuxième relation importante.

On peut maintenant se servir de la relation entre surpression p et vitesse v pour une onde progressive donnée par l'impédance $p = Z_{\pm}Sv$ (par définition de l'impédance acoustique). Alors $p_i = Z_{1+}Sv_i$, $p_r = -Z_{1+}Sv_r$ et $p_t = Z_{2+}Sv_t$. En injectant dans la deuxième relation importante et en simplifiant par la section, on trouve que

$$Z_{1+}S_1(v_i(0, t) - v_r(0, t)) = Z_{2+}S_2v_t(0, t).$$

5. C'est bien S_1 aussi dans le membre de droite et pas S_2 car on suppose que $S_1 < S_2$ et une partie de la force de pression de 2 ne s'exerce pas sur le fluide en 1 mais sur les parois du tuyau au niveau du changement de section.

En utilisant cette troisième relation importante et la première, on peut exprimer les ondes transmises et réfléchies en fonction de l'onde incidente. On trouve que $v_t(0, t) = v_i(0, t)2Z_{1+}S_1/[S_2(Z_{1+} + Z_{2+})]$ et que $v_r(0, t) = v_i(0, t)(Z_{1+} - Z_{2+})/(Z_{1+} + Z_{2+})$ et donc :

$$t_v = \frac{2Z_{1+}S_1}{(Z_{1+} + Z_{2+})S_2} = \frac{2S_1}{S_2 + S_1} \text{ et } r_v = \frac{Z_{1+} - Z_{2+}}{Z_{1+} + Z_{2+}} = \frac{S_2 - S_1}{S_2 + S_1}$$

où ρ_j est la masse volumique du fluide $j = 1, 2$ et c_j est la célérité des ondes dans le fluide $j = 1, 2$.

Si le tuyau est fermé en $x = 0$, on a $S_2 = 0 \ll S_1$ et donc $r_v = -1$ c'est une **réflexion totale avec changement de signe de v** . Au contraire, si le tuyau est ouvert, on a $S_2 \gg S_1$ (en effet la section S_2 est alors la section de la pièce dans laquelle nous faisons les expériences) et alors $r_v \approx 1$ qui est une **réflexion totale sans changement de signe**. Si il y a égalité entre les deux sections (ce qui correspond à un simple tuyau sans changement de section) on trouve évidemment que $r_v = 0$ et $t_v = 1$ ce qui correspond à une transmission totale (il n'y a pas du tout de réflexion).

Les coefficients de réflexion/transmission pour la puissance acoustique sont alors

$$R = r_v^2 = \left(\frac{Z_{1+} - Z_{2+}}{Z_{1+} + Z_{2+}} \right)^2 \text{ et } T = \frac{4Z_{1+}Z_{2+}}{(Z_{1+} + Z_{2+})^2}$$

On a bien $R + T = 1$. On remarque qu'on a toujours $R = r_v^2$ mais que $T \neq t_v^2$ en général. Le plus simple est donc de calculer r_v d'en déduire $R = r_v^2$ et ensuite $T = 1 - R = 1 - r_v^2$.

Chapitre 6

Interférences et battements

- But de ce chapitre :
Dans ce chapitre nous allons introduire le phénomène d'interférences. Il s'agit d'un phénomène ondulatoire très important caractéristique d'une onde. Nous nous concentrerons sur les interférences spatiales et temporelles que l'on appelle plus communément battements. La diffraction ne sera que qualitativement abordée si le temps le permet.
- Lien avec cours de Mathématiques :
- Nombres complexes et trigonométrie (revoir le cours de Math de S1)

Sommaire

6.1	Introduction	47
6.1.1	Trous de Young	48
6.1.2	Battements	49
6.1.3	Diffraction	49
6.2	Mathématiques des interférences, principe de superposition et intensité= $ amplitude ^2$	50
6.3	Battements	50
6.4	Interférences	52
6.5	Diffraction	53
6.5.1	Explication qualitative de la diffraction	54
6.6	A retenir	54

6.1 Introduction

Dans ce cours, on propose une première approche des interférences. Elles seront approfondies dans plusieurs autres cours de physique (optique ondulatoire, électromagnétisme, mécanique quantique, etc.).

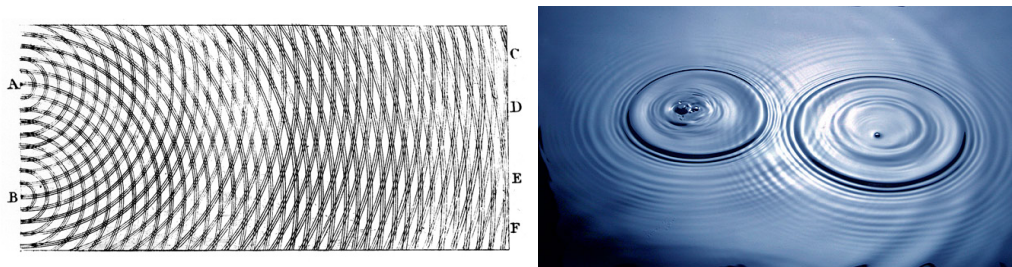


FIGURE 6.1 – A gauche : explication des interférences de la lumière par Thomas Young. A droite : interférence de deux sources d’ondes à la surface de l’eau.

De quoi s’agit-il ? Nous allons prendre trois exemples simples : les fentes de Young, les battements et la diffraction.

6.1.1 Trous de Young

Thomas Young fait une expérience fondamentale avec de la lumière en 1801. Il prend une source de lumière (dite source primaire) qu’il envoie sur un écran percé de deux trous. Ces deux trous constituent alors des sources secondaires. Il observe l’intensité lumineuse I sur un deuxième écran (sans trous) placé après le premier. L’intensité lumineuse I observée n’est pas simplement la somme $I_1 + I_2$ de l’intensité qu’il obtient en bouchant soit le trou numéro 2 (i.e. I_1) soit le trou numéro 1 (i.e. I_2). Autrement dit, l’intensité lorsque les deux trous sont ouverts n’est pas simplement la somme des intensités quand un seul trou est ouvert. Quand $I \neq I_1 + I_2$, on dit qu’il y a des **interférences**. En particulier à certains endroits du deuxième écran $I > I_1 + I_2$ (interférences **constructives**) alors qu’à d’autres $I < I_1 + I_2$ (interférences **destructives**).

Or Young (et ses contemporains) connaissait un tel phénomène d’interférences avec les ondes à la surface de l’eau (voir la figure). Il en conclut donc que les interférences sont une caractéristique des ondes et que la lumière est donc une onde. Il donne ainsi raison à Huygens (1678) contre Newton (1671) dont l’autorité avait imposée jusque là que la lumière était formée de particules¹.

Une remarque importante : une telle expérience ne se fait pas avec n’importe quelle source de lumière. Il faut de la lumière avec un minimum de cohérence (on essaiera de préciser ce dont il s’agit plus tard) : il faut que les deux sources soient à la même fréquence mais qu’en plus elles soient cohérentes. En bref : il est facile d’observer des interférences avec de la lumière exceptionnelle comme celle d’un laser, c’est plus difficile avec de la lumière ordinaire (celle du soleil ou d’une ampoule à incandescence).

1. L’histoire ne s’arrête pas là puisqu’en 1905, Einstein montre que la lumière a effectivement aussi des propriétés corpusculaires (notion des photons ou grains de lumière pour expliquer l’effet photoélectrique). La théorie quantique fera la synthèse en montrant que la lumière peut se comporter à la fois comme une onde ou comme une particule.

6.1.2 Battements

Faisons vibrer simultanément deux diapasons de fréquence légèrement différentes (on fait l'expérience dans l'amphi ou en salle de TP). On entend une seule note (en gros à la fréquence moyenne des deux diapasons) mais dont l'intensité oscille lentement au cours du temps. La période de ces **battements** est inversement proportionnelle à la différence de fréquence des deux diapasons. Quand les battements deviennent de plus en plus lents et disparaissent c'est que les deux diapasons sont accordés et vibrent à la même fréquence. Là aussi, l'intensité totale I n'est pas égale à la somme des intensités $I_1 + I_2$ des diapasons qu'on joue séparément (les battements ne sont entendus que lorsque les deux diapasons sont joués simultanément).

On peut dire des battements qu'il s'agit d'interférences dans le temps alors que le terme d'interférences (tout court) désigne en général les interférences dans l'espace.

6.1.3 Diffraction

Depuis le salon de son appartement, à travers la vitre et lorsqu'il fait nuit, une lumière intense et lointaine émise depuis une haute tour (un immeuble) parvient à la fenêtre. En fermant les rideaux (il s'agit en fait de voilages fins avec un maillage très serré, presque invisible à l'oeil nu), on peut observer la chose suivante (cf. la figure). Il s'agit d'une sorte



FIGURE 6.2 – Diffraction de la lumière à travers un voileage.

de croix de lumière à travers le rideau (alors qu'en l'absence de rideau j'observe plutôt une "étoile"). Si je fais tourner le voileage autour d'un axe perpendiculaire au voileage et qui relie la source lointaine et mon oeil, je vois que la croix de lumière tourne également. L'interprétation est qu'il s'agit de la figure produite par le passage de la lumière dans un petit trou du voileage.

La diffraction est un phénomène d'interférences dans l'espace. On pourrait donc simplement l'appeler interférences. Mais, pour une raison historique, quand le nombre de sources secondaires en jeu est très grand, on parle de diffraction. S'il y a seulement deux sources secondaires (ou un nombre fini et petit) on parle en général d'interférences (tout court). Dans le cas du passage de la lumière dans un petit trou, on verra que l'interprétation physique consiste à regarder de près ce qui se passe dans le trou et à considérer chaque point du trou² touché par une onde provenant de la source primaire comme une mini-

2. Il y en a donc une infinité continue, un continuum.

source secondaire. La figure de diffraction résultent de l'interférence de toutes ces sources secondaires. Ceci est formalisé dans le principe d'Huygens-Fresnel.

6.2 Mathématiques des interférences, principe de superposition et intensité= $|$ amplitude $|^2$

On considère une onde scalaire dans un espace tridimensionnel $u(\mathbf{r}, t)$ et qui obéit à une équation d'onde linéaire.

1. L'intensité d'une onde est proportionnelle à son amplitude au carré :

$$I = \langle u(\mathbf{r}, t)^2 \rangle_T$$

Pour une onde sinusoïdale (générale) $u(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}) \cos(\omega t - \phi(\mathbf{r}))$ la moyenne du carré donne $I(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})^2/2$

2. Principe de superposition : si deux sources envoient des ondes qui arrivent en un point \mathbf{r} à l'instant t , la vibration est

$$u(\mathbf{r}, t) = u_1(\mathbf{r}, t) + u_2(\mathbf{r}, t)$$

Ceci est valable pour une équation d'onde linéaire.

3. En utilisant les deux points précédents, on voit que l'intensité d'une onde qui est la superposition de deux ondes est $I = \langle (u_1 + u_2)^2 \rangle_T = \langle u_1^2 \rangle_T + \langle u_2^2 \rangle_T + 2\langle u_1 u_2 \rangle_T$. Donc si on appelle $I_1 = \langle u_1^2 \rangle_T$ et idem pour I_2 , on a :

$$I = I_1 + I_2 + 2\langle u_1 u_2 \rangle_T$$

Le dernier terme est le terme d'interférences. S'il est non-nul, on dit qu'il y a des interférences car $I \neq I_1 + I_2$.

6.3 Battements

On va se placer dans le cas le plus simple pour faire l'étude théorique des battements. Prenons deux diapasons de fréquences proches mais différentes (par exemple $\nu_1 = 440 \text{ Hz} \sim \nu_2 = 443 \text{ Hz}$ et donc $|\nu_1 - \nu_2| = 3 \text{ Hz}$). Plaçons nous à égale distance des deux diapasons, et faisons les émettre du son à la même intensité. On suppose une géométrie unidimensionnelle (les deux diapasons et l'oreille sont alignés sur un axe, les deux diapasons sont l'un à côté de l'autre à gauche de l'oreille). Les ondes émises par les deux diapasons sont $u_1(x, t) = A \cos(k_1 x - \omega_1 t + \phi_1)$ et $u_2(x, t) = A \cos(k_2 x - \omega_2 t + \phi_2)$ avec $k_j = \omega_j/c$ et ϕ_j deux déphasages. On appelle $x = 0$ la position de notre oreille : l'onde reçue lorsque les deux diapasons jouent simultanément est $u(0, t) = u_1(0, t) + u_2(0, t)$. Or $\cos p + \cos q = 2 \cos[(p+q)/2] \cos[(p-q)/2]$. On peut donc réécrire $u(0, t) = 2A \cos[\frac{\delta\omega t}{2} - \frac{\delta\phi}{2}] \cos[\bar{\omega} t + \bar{\phi}]$ où la barre signifie la moyenne

($\bar{\omega} \equiv (\omega_1 + \omega_2)/2$) et le delta la différence ($\delta\omega \equiv \omega_1 - \omega_2$). La vibration $u(0, t)$ contient une oscillation rapide (celle à $\bar{\omega}/2\pi = 441.5 \text{ Hz} \sim 440 \text{ Hz}$) et une oscillation lente (celle à $(\delta\omega/2)/2\pi = 1.5 \text{ Hz}$). On peut donc voir cette vibration comme étant une sinusoïde à 440 Hz (appelée la porteuse) dont l'amplitude est modulée dans le temps (appelée la modulation ou l'enveloppe) :

$$u(0, t) = A_{env}(t) \cos[\bar{\omega}t + \bar{\phi}] \text{ où } A_{env}(t) \equiv 2A \cos\left[\frac{\delta\omega t}{2} - \frac{\delta\phi}{2}\right]$$

On obtient l'intensité par $I = \langle u(0, t)^2 \rangle_T$ où la moyenne sur la période est celle sur la période de l'oscillation rapide soit $T = 2\pi/\bar{\omega}$. C'est là le point crucial : l'oscillation à 440 Hz est trop rapide pour être suivie par l'oreille mais pas celle à 1.5 Hz³. Ainsi, on ne moyenne que sur l'oscillation rapide et pas sur l'oscillation lente, d'où

$$I = \langle A_{env}(t)^2 \cos^2[\bar{\omega}t + \bar{\phi}] \rangle_T \approx A_{env}(t)^2 \langle \cos^2[\bar{\omega}t + \bar{\phi}] \rangle_T = \frac{1}{2} A_{env}(t)^2$$

Finalement, on trouve que

$$I(t) \approx 2A^2 \cos^2\left[\frac{\delta\omega t}{2} - \frac{\delta\phi}{2}\right] = A^2(1 + \cos[\delta\omega t - \delta\phi])$$

où $I_0 \equiv I_1 + I_2 = A^2$ est l'intensité qu'on obtiendrait en l'absence d'interférences. L'intensité est donc une fonction lentement oscillante du temps. On remarque que $I(t) \neq I_1 + I_2 = I_0$: il y a donc des interférences. Le terme d'interférences est donc $I - (I_1 + I_2) = I_0 \cos[\delta\omega t - \delta\phi]$ c'est justement celui qui oscille dans le temps. On a aussi $I_{max} = 2I_0$ et $I_{min} = 0$. La fréquence des battements est $|\delta\omega/2\pi| = |\nu_1 - \nu_2|$. Autrement dit, la période des battements (en intensité) est l'inverse de la différence de fréquence

$$T_{batt} = 1/|\nu_1 - \nu_2|.$$

Application à l'accord d'un instrument à corde avec un diapason : Tant que la note de l'instrument de musique a une fréquence différente de celle du diapason on entend des battements quand l'instrument et le diapason sont joués simultanément. Si les deux fréquences se rapprochent les battements deviennent de plus en plus lents. Quand les battements disparaissent c'est que l'instrument est accordé et vibre à la même fréquence que le diapason.

Généralisation au cas $I_1 \neq I_2$.

En résumé : battements = interférences dans le temps. Les deux sources doivent avoir des fréquences proches mais différentes.

3. En effet, l'oreille entend un son à 440 Hz mais ne résout pas les 440 oscillations par seconde. Par contre, elle est capable de suivre de lente oscillations de l'intensité $< 10 \text{ Hz}$.

6.4 Interférences

Nous traitons ici la lumière comme une onde scalaire $u(\mathbf{r}, t)$ dans un espace tridimensionnel, où le champ u est une sorte de champ électrique scalaire. L'équation de Maxwell devient alors l'équation d'onde de d'Alembert 3D où $c \approx 3.10^8$ m/s est la vitesse de la lumière. En réalité, la lumière est une onde vectorielle et le champ électrique est un vecteur $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. Dans cette approximation, on néglige donc la polarisation.

Revenons sur l'expérience des trous de Young. Une source primaire S de lumière (supposée être monochromatique, i.e. émettant des ondes sinusoïdales à une seule fréquence) éclaire un écran percé de deux trous. Cet écran est le plan xy i.e. à $z = 0$ et son centre est le point $O = (0, 0, 0)$. Les deux trous sont en $x = \pm d/2, y = 0, z = 0$ où d est la distance entre les deux trous. Dans ce problème on imagine que les trous sont petits et on n'étudie pas vraiment ce qui se passe au niveau de chaque trou⁴. Les deux trous S_1 (en $x = d/2$) et S_2 (en $x = -d/2$) se comportent comme des sources secondaires de même fréquence et de même phase. Ainsi au niveau des deux sources secondaires $u_1(S_1, t) = A \cos(\omega t)$ et $u_2(S_2, t) = A \cos(\omega t)$. On veut maintenant connaître le champ u en un point $M = (x, y, D)$ de l'écran de détection. Cet écran est parallèle à l'écran percé mais situé en $z = D$ avec $D \gg d$. On appelle $J = (0, 0, D)$ le centre de cet écran. A cause du principe de superposition, on sait que $u(M, t) = u_1(M, t) + u_2(M, t)$ autrement dit le champ en M est la somme du champ en M provenant de la source S_1 et du champ en M provenant de la source S_2 . Comme les sources S_1 et S_2 se comportent comme des sources ponctuelles (si les trous percés dans l'écran sont petits), elles émettent des ondes sphériques à la même fréquence que la source primaire. On rappelle qu'une onde sinusoïdale sphérique dont la source est en $\mathbf{r} = 0$ s'écrit $u(\mathbf{r}, t) = u_0 \cos(kr - \omega t + \phi)/r$ où $k = \omega/c$ est la norme du vecteur d'onde : l'amplitude d'une telle onde u_0/r varie comme l'inverse de la distance à la source. Ainsi $u_1(M, t) = A_1 \cos(\omega t - kd_1)$ avec $A_1 \propto 1/d_1$ où d_1 est la distance S_1M et de même pour $u_2(M, t)$. Si on appelle $\varphi_1(M, t) \equiv \omega t - kd_1$ la phase de u_1 , on a alors $u_j(M, t) = A_j \cos \varphi_j$ avec $j = 1, 2$. Donc $u(M, t) = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2$. Il n'est pas facile de transformer cette somme de cosinus car les deux amplitudes A_1 et A_2 sont différentes. Mais en réalité ce qui nous intéresse est $u(M, t)^2$ qui intervient dans le calcul de l'intensité I au point M . Or $u^2 = A_1^2 \cos^2 \varphi_1 + A_2^2 \cos^2 \varphi_2 + 2A_1A_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2$ dont on peut transformer le terme croisé par l'identité $2 \cos a \times \cos b = \cos(a + b) \cos(a - b)$. Alors $u(M, t)^2 = A_1^2 \cos^2 \varphi_1(M, t) + A_2^2 \cos^2 \varphi_2(M, t) + A_1A_2[\cos(2\omega t - k(d_1 + d_2)) + \cos(k(d_2 - d_1))]$. Pour calculer l'intensité $I(M) \equiv \langle u(M, t)^2 \rangle_T$, il ne reste plus qu'à prendre la moyenne temporelle sur une période $T = 2\pi/\omega$. Or on sait que $\langle \cos^2(\omega t + \text{constante}) \rangle_T = 1/2$ et que $\langle \cos(2\omega t + \text{constante}) \rangle_T = 0$ donc :

$$I(M) = \frac{1}{2}A_1(M)^2 + \frac{1}{2}A_2(M)^2 + A_1(M)A_2(M) \cos \delta\varphi(M)$$

où le dernier terme est un terme croisé ou terme d'interférences et qui dépend de la différence de phase $\delta\varphi(M) \equiv \varphi_2(M, t) - \varphi_1(M, t) = k(d_2 - d_1)$. Si on appelle $I_1 = A_1^2/2$

4. Cette question sera abordée dans la section suivante sur la diffraction.

l'intensité au point M si seul le trou 1 était ouvert (et idem pour I_2), on a $I =$ ou encore :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M)I_2(M)} \cos \delta\varphi(M) = I_0(M) [1 + C(M) \cos \delta\varphi(M)]$$

où $I_0(M) \equiv I_1(M) + I_2(M)$ est l'intensité qui serait observée en M en l'absence d'interférences et $C(M) \equiv 2\sqrt{I_1I_2}/I_0$ est le contraste (des interférences). Ce dernier est compris entre 0 et 1. On voit aussi que l'intensité maximale $I_{max} = I_0[1 + C]$ est obtenue quand la différence de phase est nulle (interférences constructives, franges brillantes) et que l'intensité minimale $I_{min} = I_0[1 - C]$ (interférences destructives, franges sombres) est obtenue quand les deux sources envoient des ondes en opposition de phase ($\delta\varphi = \pi$). Le contraste s'écrit aussi $C = (I_{max} - I_{min})/(I_{max} + I_{min})$.

On va maintenant se placer dans l'approximation où l'écran d'observation est loin des deux sources secondaires $D \gg d$ et où on ne cherche à décrire que ce qui se passe dans le voisinage du point J centre de l'écran d'observation, i.e. $D \gg x, y$. Alors $I_1(M) \approx I_1(J) = I_1$ et $I_2(M) \approx I_2(J) = I_2$ sont des constantes car $d_1 \approx D \approx d_2$ à l'ordre le plus bas en $(x, y, d)/D$. De plus $I_1 = I_2 = I_0/2$ à cette approximation et le contraste des interférences sera donc maximal $C = 1$. Par contre à cet ordre $\delta\varphi = k(d_2 - d_1) \approx 0$ et il faut aller à l'ordre suivant. On trouve d_1 en calculant la norme du vecteur $S_1\vec{M} = (x - d/2, y, D)$ soit $d_1 = \sqrt{(x - d/2)^2 + y^2 + D^2}$. De même $d_2 = \sqrt{(x + d/2)^2 + y^2 + D^2}$. En utilisant le développement limité $\sqrt{1 + \epsilon} \approx 1 + \epsilon/2$, on trouve que $d_2 - d_1 \approx xd/D$. Finalement, l'intensité au point M est

$$I(x, y, D) \approx I_0 \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{xd}{\lambda D}\right) \right]$$

avec $k = 2\pi/\lambda$. A priori, ce devrait être une fonction de x et de y mais dans le cadre de notre approximation ($D \gg d, x, y$), c'est uniquement une fonction de x . Autrement dit les franges brillantes – dont l'équation est $\cos(2\pi \frac{xd}{\lambda D}) = 1$ – sont des lignes parallèles à la direction y et de $x = n \times \lambda D/d$ où n est un entier. L'écart entre deux franges brillantes est appelé l'interfrange et vaut $i = \lambda D/d$. Les franges sombres correspondent à $\cos(2\pi \frac{xd}{\lambda D}) = -1$.

Le point essentiel est de comprendre que ce qui importe pour les interférences est la différence de phase $\delta\varphi$ entre les deux chemins qui vont de la source primaire au point d'observation sur le deuxième écran. Si les deux phases sont identiques, ou si elles diffèrent d'un multiple entier de 2π , alors les ondes issues des deux sources secondaires arrivent en phase et s'additionnent donnant lieu à une grande intensité. Au contraire si les deux phases diffèrent de π (modulo 2π), les deux ondes arrivent en opposition de phase et l'onde résultante est nulle donnant un zéro d'intensité.

6.5 Diffraction

LA DIFFRACTION SERA ABORDÉE EN DÉTAIL DANS LE COURS D'ELECTROMAGNETISME

Le phénomène de diffraction se produit quand une onde rencontre un obstacle (e.g. un trou dans un écran) de taille d comparable ou plus petite que la longueur d'onde λ . Il a été décrit en détail pour la première fois pour la lumière par Grimaldi vers 1660. Naïvement, une onde plane qu'on force à passer dans un trou circulaire de diamètre d dans un écran devrait ressortir comme une onde plane mais donc la surface d'onde n'a plus comme section que $\pi(d/2)^2$. Ceci est vrai si la longueur d'onde est très petite devant la taille du trou, soit $\lambda \ll d$. Dans ce cas là, on dit qu'il n'y a pas de diffraction. Mais quand la taille du trou et la longueur d'onde deviennent comparables ($\lambda \sim d$ ou $\lambda > d$), on observe que le faisceau devient divergent et n'est plus une onde plane mais plutôt une onde sphérique inscrite dans un cône d'angle au sommet θ_0 où $\boxed{\sin \theta_0 = \lambda/d}$. On dit que l'onde a été diffractée. Quand $\lambda \ll d$, $\sin \theta_0 \approx \theta_0$ et on voit que l'ouverture angulaire du faisceau est $\theta_0 \approx \lambda/d$ (demi-angle au sommet).

6.5.1 Explication qualitative de la diffraction

Huygens (1690) a postulé que chaque point atteint par une onde se comporte comme une source secondaire ponctuelle qui émet des ondelettes sphériques. Le phénomène de diffraction peut être compris à partir du principe d'Huygens. La diffraction d'une onde par une fente dans un écran résulte de l'interférence de toutes les sources secondaires contenues dans la fente (il y en a une infinité). La différence de phase entre les ondelettes émises par les deux extrémités de la fente est environ $\delta\varphi \approx kd \sin \theta$ si θ est la direction d'observation, k la norme du vecteur d'onde de l'onde incidente et d la largeur de la fente. On devine qu'il y aura des interférences constructives entre toutes les ondes issues des sources secondaires quand $\delta\varphi \sim n2\pi$ où n est un entier (et destructives quand $\delta\varphi \sim (n + 1/2)2\pi$). Il y a une tâche centrale brillante (interférences constructives en $\theta = 0$ correspondant à $n = 0$). Sa largeur est environ donnée par la distance angulaire entre les deux premières interférences destructives en $\theta = \pm\theta_0$ où $\delta\varphi \sim \pm\pi$ soit $kd \sin \theta_0 \sim \pi$. On trouve donc que $\sin \theta_0 \sim \lambda/(2d)$. Le résultat correct est en fait que $\sin \theta_0 = \lambda/d$.

6.6 A retenir

Les ingrédients nécessaires à l'observation d'interférences spatiales sont :

1. Deux sources d'ondes de même fréquence et cohérentes (i.e. de relation de phase bien définie, qui ne fluctuent pas dans le temps)
2. Le principe de superposition : à la position du détecteur, l'onde est $u = u_1 + u_2$
3. L'intensité est $I(\mathbf{r}) = \langle u(\mathbf{r}, t)^2 \rangle_T = A(\mathbf{r})^2/2$ où la deuxième égalité suppose que $u(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}) \cos[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \mp \omega t + \phi]$

Conclusion

7.1 Résumé : ce que nous avons appris, ce que nous devons retenir

Ce cours avait pour objectif d'initier les étudiants aux phénomènes ondulatoires en se concentrant sur les ondes acoustiques et élastiques qui ont la particularité d'être des ondes scalaires. Néanmoins, cela nous a permis d'établir les conditions d'applicabilité de l'équation de d'Alembert, son origine microscopique, d'étudier la réflexion et transmission d'une onde, le transport d'énergie, etc., autant de phénomènes dont la portée est générale. La suite du cours portera sur les ondes électromagnétiques qui sont des ondes vectorielles.

7.2 Sujets non-traités : ouvertures

- ondes évanescentes
- polarisation
- ondes dans un milieu désordonné
- ondes non-linéaires, interactions, solitons, etc.
- absorption des ondes
- réfraction des ondes (lois de Snell-Descartes, etc.)
- ondes de choc
- ondes à la surface d'un liquide

Repères historiques sur les ondes

On liste de manière chronologique quelques grands noms et découvertes de la physique des ondes.

- **Pythagore (vers -580 à -495)** : musique des cordes vibrantes, proportions harmoniques (i.e. la fréquence du mode fondamental est inversement proportionnelle à la longueur de la corde).
- Idées, concepts, non mathématiques sur les ondes avant le 17^{ème} siècle et les lumières? (chez les Grecs, les Romains, les Arabes notamment en optique, Archimède, de Vinci, Galilée??).
- **Marin Mersenne (1588-1648)** mesure la vitesse du son dans l'air et trouve $\sim 300 - 400$ m/s (vers 1636).
- **Robert Boyle (1627-1691)** : en 1660, il montre que le son ne se propage pas dans le vide grâce à l'utilisation d'une des premières pompes à vide.
- **Francesco Grimaldi** : il observe, décrit précisément et nomme le phénomène de diffraction de la lumière par une fente. Ses travaux sont publiés en 1665 après sa mort.
- **Isaac Newton (1643-1727)** : lumière=particule (idée vers 1670-1672, écrite dans le livre Opticks de 1704); son=onde de surpression, expression de la vitesse du son (1687 dans les Principia, 2^{ème} livre, proposition 59).
- **Christian Huygens (1629-1695)** : lumière=onde (théorie ondulatoire de la lumière 1678 et livre Traité de la lumière en 1690). Idées des sources ponctuelles secondaires (principe d'Huygens, 1690). **Robert Hooke (1635-1703)** avait émis l'idée en 1665 que la lumière était une vibration de haute fréquence qui se propage.
- **Jean le Rond d'Alembert (1717-1783)** : équation d'onde pour la corde vibrante (1747).
- **Daniel Bernoulli (1700-1782)** : idée de l'analyse harmonique pour le mouvement général d'une corde vibrante fixée à ses deux extrémités (1753).
- **Thomas Young (1773-1829)** : expérience d'interférences avec la lumière (1801, expérience dite des trous de Young) et comparaison avec les interférences d'ondes à la surface de l'eau.
- **Joseph Fourier (1768-1830)** : équation de diffusion de la chaleur (1811). Séries de

Fourrier (décomposition d'un signal périodique en une somme de fonctions harmoniques) en 1822.

- **Pierre-Simon de Laplace (1749-1827)** : correction de la formule de Newton pour la vitesse du son avec la compressibilité isentropique (1816).
- **Augustin-Jean Fresnel (1788-1827)** : extension de la théorie ondulatoire de la lumière, formulation mathématique du principe d'Huygens-Fresnel (1818). Polarisation de la lumière (avec Th. Young suite aux expériences de Malus de 1808).
- **John Scott Russell** : observation d'un soliton (onde solitaire à la surface de l'eau dans un canal en 1834 aussi appelée mascaret).
- **Samuel Morse et Charles Wheatstone** : télégraphie électrique (avec fil) en 1838.
- **Christian Doppler** : effet Doppler (changement de fréquence lié au mouvement relatif entre émetteur et récepteur d'ondes) découvert en 1842. Aussi **Hippolyte Fizeau** en 1848. Ce dernier mesure très précisément la vitesse de la lumière en 1849.
- **Gabriel Lamé** : livre de 1852 contenant l'équation des ondes élastiques dans un solide en volume (ondes sismiques par exemple). Est-ce le premier? Pour les ondes de surface d'un solide : onde de Rayleigh (1885) et onde de Love (1911).
- **James Clerk Maxwell** : lumière=onde électromagnétique (théorie 1864). Equations de l'électromagnétisme basées sur les travaux de Faraday, Ampère, etc.
- **A.G. Bell** : invention du téléphone (1876).
- **Ernst Mach** : onde de choc (supersonique) en 1877. Nombre de Mach = vitesse de déplacement du projectile/vitesse du son.
- **Lord Rayleigh (J.W. Strutt 1842-1919)** : traité d'acoustique (The Theory of sound 1877-1878). Ondes sismiques de surface=ondes de Rayleigh (1885). Notion de vitesse de groupe. Onde de choc.
- **Oliver Heaviside** : équations d'onde d'une ligne de transmission (i.e. un guide d'ondes électromagnétiques, équations du télégraphiste) en 1885.
- **Heinrich Rudolf Hertz** : découverte expérimentale des ondes électromagnétiques (15 mars 1888). Puis communication radio/télégraphie sans fil par G. Marconi (1895) et C.F. Braun.
- **Lord Kelvin (William Thomson)** : ondes dans le sillage d'un bateau (1891).
- **Wilhelm Roentgen (1845-1923)** : découverte des rayons X en 1895. Puis diffraction des rayons X par un cristal (von Laue et les Bragg vers 1912-1915).
- **Albert Einstein** : dualité onde-particule pour la lumière (photon) pour expliquer l'effet photo-électrique (1905). Équations de la relativité générale (1916), prédiction des ondes gravitationnelles.
- **Paul Langevin (1872-1946)** : étude des ultrasons et mise au point du sonar (écholocation) vers 1914-1918.
- **Louis de Broglie** : ondes de matière (onde associée à un électron par exemple), longueur d'onde $\lambda = h/p$ (1924). Equation de Schrödinger = équation d'onde des ondes de matière, équation fondamentale de la mécanique quantique (1926). Puis expérience de **Davisson et Germer** de diffraction d'un faisceau d'électrons par un cristal (1927) ; aussi G.P. Thomson. Dualité onde-particule (et la métaphore du cylindre).
- **Robert Watson-Watt** : invention du radar (radio detection and ranging) en 1935.

- **P. Cerenkov** : émission de lumière par un projectile se déplaçant à une vitesse plus grande que celle de la lumière dans un matériau (effet Cerenkov, 1940). Similaire à une onde de choc lumineuse
- **Léon Brillouin** : Ondes dans un milieu périodique (zones de Brillouin), suite aux travaux de **Félix Bloch** sur les bandes d'énergie (1928).
- **P.W. Anderson** : localisation (forte) des ondes dans un milieu désordonné (1958).
- **Charles Townes** invente le maser à ammoniaque en 1956. Peu après c'est le laser à rubis par **Thomas Maiman** (1960).
- **LIGO** : Détection en 2015 des ondes gravitationnelles par l'expérience LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory).

Bibliographie

- [1] F.S. Crawford, Ondes, (cours de physique de Berkeley, volume 3, 1965).
- [2] R.P. Feynman, Mécanique, volume 1 du cours de physique de Feynman (InterEdition, 1964). Surtout les chapitres 47 à 51 et 29-30.
- [3] W.C. Elmore et M.A. Heald, Physics of waves (Dover ed., 1969).
- [4] "Ondes et Vibrations" de Etienne Gravier édition Ellipses