# POSTULATS DE LA MECANIQUE QUANTIQUE

http://www.toutestquantique.fr

# Postulat 1 : Description d'un système physique

A un instant $t_0$ fixé, l'état d'un système physique est défini par $|\varphi(t_0) > \epsilon\, \mathcal{E}$
$\mathcal{E}$ a la structure d'un espace vectoriel
D'où principe de superposition : $|\varphi_1 > \epsilon\, \mathcal{E}$ et $|\varphi_2 > \epsilon\, \mathcal{E}$ donc $|\varphi_1 > +|\varphi_2 > \epsilon\, \mathcal{E}$

# Postulat 2 : Description d'une grandeur physique

A toute grandeur physique mesurable $\mathcal{A}$ est associé un opérateur $\hat{A}$ hermitique agissant dans $\mathcal{E}$; cet opérateur est une observable

Remarque : une grandeur physique et un état sont différents

$$\hat{A} \quad \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix} \qquad\qquad |\varphi \quad > \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$$

# Postulat 3

La mesure d'une grandeur physique $\mathcal{A}$ ne peut donner comme résultat qu'une des valeurs propres de l'observable $\hat{A}$ (qui est un opérateur hermitique)

Conséquences :

- Une mesure de $\mathcal{A}$ donnera toujours une valeur réelle puisque $\hat{A}$ est hermitique
- Si le spectre de $\hat{A}$ est discret (nbre de val. prop. discret), les résultats de la mesure de $\mathcal{A}$ sont **quantifiés**
- Une des val. prop. signifie plusieurs résultats possibles pour la mesure : **probabiliste**
- Le résultat des mesures possibles est indépendant de l'état du système.

2 situations :

Spectre discret non dégénéré

$\hat{A}|u_n> = a_n|u_n>$

Base $\sum_n |u_n><u_n| \quad = 1$

Spectre discret dégénéré

$\hat{A}|u_n{}^i> = a_n|u_n{}^i>$

$\sum_n \sum_i |u_n{}^i><u_n{}^i| \quad = 1$

# Postulat 4

La probabilité avec laquelle on peut trouver $a_n$ comme résultat de la mesure de $\mathcal{A}$, noté $\mathcal{P}(an)$ , dépend de l'état du système physique $|\psi\ \ >$. L'état du système physique après la mesure est la projection normée de $|\psi\ \ >$ sur $|u_n >$

$|\psi > \ = \sum_i \sum_n c_n{}^i \ |u_n{}^i >$ normé

$< \psi|\psi > = 1$

<u>Spectre des valeurs propres discret et non dégénéré</u>

$|\psi > \ = \sum_n c_n \,|u_n >$ $\qquad \hat{A}|u_n > = a_n|u_n >$

$\mathcal{P}(a_n) = \left|< u_n|\psi > \ \ \right|^2$

$< u_n|\psi > \ \ = < u_n|\sum_m c_m u_m > = \sum_m c_m < u_n\,|u_m > = \sum_m c_m \delta_{nm} = cn$

$\mathcal{P}(a_n) = \left|< u_n|\psi > \ \ \right|^2 = |c_n|^2$

<u>Spectre des valeurs propres discret cas général</u> :

$\hat{A}|u_n{}^i > = a_n|u_n{}^i >$ et $|\psi > \ = \sum_i \sum_n c_n{}^i \ |u_n{}^i >$

$$\mathcal{P}(a_n) = \sum_{i=1}^{g_n} \left|< u_n{}^i|\psi > \ \ \right|^2 = \sum_i |c_n{}^i|^2$$

$\sum_{n=1}^N \ \mathcal{P}(a_n) = 1$ si $|\psi >$ normé

- Valeur moyenne de ces mesures :

$<\hat{A}>_{|\psi>} = <\psi|\hat{A}|\psi>$

$$|\psi> = \sum_n c_n |u_n>$$

$$\hat{A}|\psi> = \hat{A}\sum_n c_n |u_n> = \sum_n c_n \hat{A}|u_n> = \sum_n c_n a_n|u_n>$$

$$<\psi| = \sum_m \overline{c_m} < u_m|$$

$$<\psi|\hat{A}|\psi>$$

$$= \sum_m \overline{c_m} < u_m| \sum_n a_n c_n |u_n>$$

$$= \sum_n \sum_m \overline{c_m} a_n c_n < u_m|u_n> = \sum_n a_n |c_n|^2 = \sum_n a_n \mathcal{P}(a_n)$$

$\Delta A = <\hat{A}^2> - <\hat{A}>^2$

- Valeur moyenne de ces mesures :

Base discrète

$|u_n>$

$\hat{A}|u_n> = a_n|u_n>$

Etat du système :

$\mathcal{P}(a_n) = \left|< u_n|\psi> \right|^2$

Avec $\sum_{n=1}^{N} \mathcal{P}(a_n) = 1$

Base continue orthonormée :

$|x> \ \epsilon\ \varepsilon$

$\hat{x}|x> = x|x>$

$d\mathcal{P} = \left|< x|\psi> \right|^2 dx$

$|\psi> = \int \left|< x|\psi> \right|^2 dx = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx$

# Postulat 5

Si la mesure de la grandeur physique $\mathcal{A}$ sur le système dans l'état $|\psi>$ donne le résultat $a_n$, l'état du système après la mesure est la projection normée : $\frac{P_n|\psi>}{\sqrt{<\psi|P_n|\psi>}}$ de $|\psi>$ sur le sous espace propre associé à an

$P_n = \sum_{i=1}^{g_n} |u_n{}^i><u_n{}^i| = |u_n><u_n|$ si $a_n$ est non dégénéré

L'état du système aussitôt après la mesure est donc toujours un vecteur propre de $\hat{A}$ de valeur propre $a_n$. Pas n'importe quel vecteur propre :

$|\varphi>_{a_n} \neq |\psi>$ → <u>La mesure perturbe le système physique</u>

- Cas discret non dégénéré :

$P_n|\psi> = |u_n><u_n| \sum_m c_m |u_m> = \sum_m c_m|u_n> <u_n|u_m>$

$=c_n|u_n>$

- Cas discret dégénéré :

Même calcul $|\varphi>_{a_n} = \sum_{i=1} c_n{}^i \, |u_n{}^i>$

## Conséquence Postulat 5 :

→ La mesure perturbe le système physique
→ Après la mesure on est tjrs dans un état propre associé à la val. prop. $a_n$
→ Si on refait la mesure, on trouve $a_n$ avec certitude (réduction du paquet d'onde)

# Postulat 6 : Evolution de $|\varphi(t)>$

$$\boxed{i\hbar\frac{d|\varphi(t)>}{dt} = \widehat{H}|\varphi(t)>}$$

Remarques :

- Vient de Schrödinger dépendant du temps
- Energie totale → Opérateur hermitique nommé Hamiltonien
- H(t) si V(r,t)

**Conséquences du 6éme postulat** :

1) La norme se conserve :

$N = \sqrt{<\varphi|\varphi>}$

$i\hbar\frac{d|\varphi(t)>}{dt} = \widehat{H}|\varphi(t)>$ et $-i\hbar\frac{d<\varphi|}{dt} =<\varphi(t)|\widehat{H}$

$$\frac{d<\varphi(t)|\varphi(t)>}{dt} = \frac{d<\varphi(t)/}{dt}|\varphi(t)> + <\varphi(t)|\frac{d|\varphi(t)>}{dt}$$

$$= \frac{1}{-i\hbar}<\varphi(t)|\widehat{H}\Big|\varphi(t)> + \frac{1}{i\hbar}<\varphi(t)|\widehat{H}|\varphi(t)>$$

$<\varphi|\varphi>$=cste

b) Evolution de la fonction d'onde en t

$$\boxed{\begin{array}{l}\hat{H}|\varphi_n(t)> \ = E_n|\varphi_n(t)> \\ |\psi_{(t)}> = \sum_n c_n(t)|\varphi_n> \ \text{ et } \mathbf{c_n(t)?}\end{array}}$$

$$i\hbar\frac{d|\psi(t)>}{dt} = \hat{H}|\psi(t)>$$

$$\hat{H}\sum_n c_n(t)\Bigg|\varphi_n> = i\hbar\frac{d\sum_n c_n(t)|\varphi_n>}{dt}$$

$$\sum_n c_n(t)\hat{H}\Bigg|\varphi_n> = i\hbar\frac{\sum_n dc_n(t)}{dt}|\varphi_n>$$

$$\sum_n c_n(t)E_n\Bigg|\varphi_n> = i\hbar\frac{\sum_n dc_n(t)}{dt}|\varphi_n>$$

$$c_n(t)E_n = i\hbar\frac{dc_n(t)}{dt}$$

$$\frac{dc_n(t)}{c_n(t)} = \frac{E_n dt}{i\hbar} = -i\frac{E_n dt}{\hbar}$$

$$c_n(t) = c_n e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}}$$

$$\boxed{\psi_{(t)}> = \sum_n c_n e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}}|\varphi_n>}$$

## c) Théorème d'Ehrenfest

$$\langle \hat{A}(t) \rangle_{|\psi(t)\rangle} = \langle \psi(t) | \hat{A}(t) | \psi(t) \rangle$$

(°) attention ne pas confondre COHEN p.229 $\langle A \rangle$ moy sur un ensemble de mesure à un instant $t$, avec des moyennes ds le temps.

(°°) si le ket $|\psi\rangle$ n'est pas normé, la formule serait $\langle \hat{A} \rangle = \dfrac{\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$

$\langle \hat{A} \rangle_{(t)}$ 3 raisons de dépendre de $t$ $\begin{cases} \text{ket } |\psi(t)\rangle \\ \text{bra } \langle \psi(t)| \\ \hat{A}(t) \end{cases}$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle_{(t)} = \frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \, \hat{A}(t) | \psi(t) \rangle + \langle \psi(t) | \frac{d\hat{A}}{dt} | \psi(t) \rangle + \langle \psi(t) | \, \hat{A} \, \frac{d}{dt} | \psi(t) \rangle$$

$$\hat{H} |\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \quad \xrightarrow[\text{hermitique}]{\text{conjugué}} \quad \langle \psi(t) | \hat{H} = -i\hbar \frac{d}{dt} \langle \psi(t) |$$

$$\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \frac{\hat{H}}{i\hbar} |\psi(t)\rangle \qquad \hat{H}^+ = \hat{H} \qquad \frac{d}{dt} \langle \psi(t) | = \frac{1}{-i\hbar} \langle \psi |$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle_{(t)} = \frac{1}{-i\hbar} \langle \psi(t) | \hat{H} \hat{A} | \psi(t) \rangle + \left\langle \frac{d\hat{A}}{dt} \right\rangle_{(t)} + \frac{1}{i\hbar} \langle \psi(t) | \hat{A} \hat{H} | \psi(t) \rangle$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle_{(t)} = \left\langle \frac{d\hat{A}(t)}{dt} \right\rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle \psi(t) | [\hat{A}, \hat{H}] | \psi(t) \rangle$$ cas général

si $\hat{A}(\cancel{t}) \longrightarrow \left\langle \dfrac{d\hat{A}}{dt} \right\rangle = 0$

donc la valeur moyenne, ds le temps, d'une observable $\hat{A}$ qui ne dépend pas explicitement du temps :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle_{(t)} = \frac{1}{i\hbar} \langle \psi(t) | [\hat{A}, \hat{H}] | \psi(t) \rangle}$$

① $\hat{A} = \hat{1}$ $\quad [\hat{H}, \hat{1}] = 0$ evident

$\langle \hat{A} \rangle_{(t)} = \langle \Psi | \hat{1} | \Psi \rangle = \langle \Psi | \Psi \rangle$ c'est la norme de $|\Psi\rangle$.

$\frac{d}{dt} \langle \Psi | \Psi \rangle = 0 \longrightarrow \langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle = c^{te} = 1$

la norme se conserve au cours du temps

# EXERCICES

## I) Systèmes à 2 niveaux

$\hat{H}|E_1> = E_1|E_1>$
$\hat{H}|E_2> = E_2|E_2>$

$<E_1|E_1> = <E_2|E_2> = 1$

1) $|\psi> \quad = \alpha \quad |E_1> + \beta \quad |E_2>$ avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ par normalisation

$|\psi'> \quad = \alpha' \quad |E_1> + \beta' \quad |E_2>$
$<\psi'| = \alpha' \quad <E_1| + \beta' \quad <E_2|$
$<\psi'|\psi> = 0$ d'où $\overline{\alpha}'\alpha + \overline{\beta}'\beta = 0$

2) $|\psi_->$ est normé. Il n'est pas état propre de H car nous ne pouvons écrire :
$\hat{H}|\psi_-> = E_-|\psi_->$
On a : $\hat{H}(\frac{1}{\sqrt{2}}|E_1> -|E_2>) = \frac{1}{\sqrt{2}}E_1|E_1>$ - $\frac{1}{\sqrt{2}}E_2|E_2> \neq$ E$(|E_1> -|E_2>)$
Il est état propre si E1=E2

3) Sol. 1 :

$$< \hat{H} > =< \psi_- | H | \psi_- >$$
$$\hat{H} | \psi_- > = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{H} | E_1 > - \hat{H} | E_2 >) = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_1 | E_1 > - E_2 | E_2 >)$$
$$< \psi_- | H | \psi_- > = \frac{1}{\sqrt{2}} (< E_1 | - < E_2 |) \frac{1}{\sqrt{2}} (E_1 | E_1 > - E_2 | E_2 >)$$

$$< \hat{H} > = 1/2(E_1 + E_2)$$

Sol. 2 : Potulat sur la mesure

$$< \hat{H} > = \mathcal{P}(E_1)E_1 + \mathcal{P}(E_2)E_2$$
$$\mathcal{P}(E_1) = | < E_1 | \psi_- > |^2 = \frac{1}{2}$$
$$\mathcal{P}(E_2) = | < E_2 | \psi_- > |^2 = \frac{1}{2}$$
$$< \hat{H} > = 1/2(E_1 + E_2)$$

Sol. 3 : Sous forme matricielle

$$< \psi_- \Big| H | \psi_- > = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}\right) = 1/2(E_1 + E_2)$$

$\Delta H^2 =< \hat{H}^2 > - < \hat{H} >^2 \rightarrow \frac{1}{2} | E_1 - E_2 | = \Delta H$

$\mathrm{C}ar$ :

$< \hat{H}^2 > = \frac{1}{2}(E_1^2 - E_2^2)$

$H(|\psi_- >) \quad = H(\frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_1 >-\frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_2 >) = \frac{E_1}{\sqrt{2}}|\psi_1 > - \frac{E_2}{\sqrt{2}}|\psi_2 >$

$$HH(|\psi_- >) \quad = \frac{{E_1}^2}{\sqrt{2}}|\psi_1 > - \frac{{E_2}^2}{\sqrt{2}}|\psi_2 >$$

$$< \psi_-|HH(|\psi_- >) \quad = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}<\psi_1\right| - \frac{1}{\sqrt{2}} < \psi_2\left|\right)\left(\frac{{E_1}^2}{\sqrt{2}}\right|\psi_1 > - \frac{{E_2}^2}{\sqrt{2}}\left|\psi_2 >\right)$$

$=\frac{1}{2}E_1^2 < \psi_1|\psi_1 > +\frac{1}{2}E_2^2 < \psi_2|\psi_2 > + ( < \psi_1|\psi_2 > = 0)$

# III) Postulat sur la mesure / Evolution d'un système physique

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \begin{array}{c} |u_1> \; |u_2> \; |u_3> \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\hbar\omega_0$ → $|u_1>$
$2\hbar\omega_0$ (dégénéré 2x)→ $|u_2>$ ou $|u_3>$ (ou toute autre combinaison linéaire)

$$\hat{A} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Recherche valeurs propres : $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ $\lambda^2 - 1 = 0 \rightarrow -\lambda = \pm 1$ (donc v.p. ±a)

D'après l'exercice précédent :

$a$ → $|u_1>$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}(|u_2> + |u_3>)$

$-a$ → $\frac{1}{\sqrt{2}}(|u_2> - |u_3>)$

$$\hat{B} = b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Recherche valeurs propres : $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ $\qquad \lambda^2 - 1 = 0 \ \rightarrow -\lambda = \pm 1$ (donc v.p. ±a)

D’après l’exercice précédent :

$a \rightarrow |u_3> \text{ et } \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1> + |u_2>)$

$-a \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1> - |u_2>)$

$$|\varphi(0)>=\frac{1}{\sqrt{2}}|u_1>+\frac{1}{2}|u_2>+\frac{1}{2}|u_3>$$

A)) Mesure à t=0, on mesure l'énergie → On trouve donc les val. prop. de H

1) $|\varphi(0)>$ est-il normé ? :

$$<\varphi(0)|\varphi(0)>=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$$

Comme combinaison d'états propres de H, $\varphi(0)$ n'est pas un état propre de H :

$$\hat{H}|\varphi(0)>=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{H}|u_1>+\hat{H}|u_2>+\hat{H}|u_3>\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\hbar\omega_0\,|u1>+\frac{2\hbar\omega_0}{2}|u_2>+\frac{2\hbar\omega_0}{2}|u_3>$$

$$=\hbar\omega_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u_1>+|u_2>+|u_3>\right)\neq\hbar\omega_0\frac{1}{\sqrt{2}}|u_1>+\frac{1}{2}|u_2>+\frac{1}{2}|u_3>$$

2) a) On trouve le système avec l'énergie :

$*$ $\hbar\omega_0$ avec la probabilité

$\mathcal{P}(\hbar\omega_0)=\frac{|<u_1|\varphi(0)>|^2}{<\varphi(0)|\varphi(0)>}=|<u_1|\varphi(0)>|^2=1/2$

$*$ $2\hbar\omega_0$ avec la probabilité

$\mathcal{P}(2\hbar\omega_0)=\sum_i|<u_1{}^i|\varphi(0)>|^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1/2$

Ou $\mathcal{P}(2\hbar\omega_0)=1-\mathcal{P}(\hbar\omega_0)=1/2$

b) On trouve le système immédiatement après la mesure dans l'état :

$$|\chi>_{an} = \frac{P_n|\varphi>}{\sqrt{<\varphi|P_n|\varphi>}} = \sum_{i=1}^{g_n} |u_n{}^i><u_n{}^i|\varphi> = |un>$$

$$|\chi>_{\hbar\omega_0} = |u_1>$$

$$|\chi>_{2\hbar\omega_0} = |u_2><u_n{}^i\Big|u_2> + |u_3><u_n{}^i\Big|u_3> = \frac{1}{2}|u_2> + \frac{1}{2}|u_3>$$

À normer → $|\chi>_{2\hbar\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_2> + |u_3>)$

c) La valeur moyenne de H vaut :

* $<\hat{H}> = \hbar\omega_0\mathcal{P}(\hbar\omega_0) + 2\hbar\omega_0\mathcal{P}(\hbar\omega_0) = \frac{3}{2}(\hbar\omega_0)$

* $<\hat{H}> = <\varphi\big|\hat{H}\big|\varphi> =$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(<u_1| + <u_2| + <u_3|)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hbar\omega_0\,\Big|u_1>\right) + \frac{1}{2} * 2\hbar\omega_0\Big|u_2> + \frac{1}{2} * 2\hbar\omega_0\Big|u_3>\right)\Big) = \frac{3}{2}(\hbar\omega_0)$$

* $<\hat{H}> = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} = \frac{3}{2}(\hbar\omega_0)$

3) Soit l'opérateur A : (rappel)

$$\hat{A} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Recherche valeurs propres : $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ $\lambda^2 - 1 = 0 \rightarrow -\lambda = \pm 1$ (donc v.p. ±a)

D'après l'exercice précédent :

$a \rightarrow |u_1>$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}(|u_2> + |u_3>)$

$-a \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_2> - |u_3>)$

a) a avec la proba $\mathcal{P}(a)$ et –a proba $\mathcal{P}(-a)$

$\mathcal{P}(-a) = |\frac{1}{\sqrt{2}}(<u_2| - <u_3|)\varphi(0)>|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}(<u_2| - <u_3|)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right|u_1> + \frac{1}{2}\left|u_2> + \frac{1}{2}|u_3>)\right|^2 = 0$

$\mathcal{P}(a)$=1-$\mathcal{P}(-a)$=1

En fait $|\varphi(0)> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1> + \frac{1}{\sqrt{2}}|u_2> + \frac{1}{\sqrt{2}}|u_3>)$ est une combinaison linéaire d'états propres associés à la même valeur propre a, c'est donc un état propre de A. Donc la probabilité de trouver la valeur propre associée (a) est de 1.

b) Le vecteur état après la mesure est le vecteur propre $|\varphi(0)>$

c) $< \hat{A} >_{t\,=\,0} = a$

B)) Mesure à un instant t quelconque :

D'après le cours :

$$|\varphi_{(t)} > = \sum_n \ c_n e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} |\varphi_n > \ = \frac{1}{\sqrt{2}} \ \ e^{-i\frac{\hbar\omega_0 t}{\hbar}} |u_1 > + (e^{-i\frac{2\hbar\omega_0 t}{\hbar}})(\frac{1}{2}|u_2 > + \frac{1}{2}|u_3 >)$$

$|\varphi_{(t)} >$ est toujours normé car : $\sum \ |c_n e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}}|^2 = \sum_n \ {c_n}^2 = 1$ si $|\varphi_{(0)} >$ est normé

D'après le théorème <u>d'Ehrenfest :</u>

$$\frac{d}{dt} < \hat{A} > = \frac{i}{\hbar} < [\hat{H}, \hat{A}] >$$

Si $\hat{A}$ ne dépend pas de t et en prenant $\hat{A}=\hat{I}$

$< \hat{A} > = < \varphi(t)|\hat{A}|\varphi(t) > = < \varphi(t)|\varphi(t) >$

$[\hat{H}, \hat{A}] = 0$

$$\frac{d}{dt} < \varphi(t)|\varphi(t) > = 0$$

Donc la norme de φ(t) est constante

2) Mesure de l'énergie :

* $\hbar\omega_0$ avec la probabilité $\mathcal{P}(\hbar\omega_0) = \frac{|<u_1|\varphi(t)>|2}{<\varphi(t)|\varphi(t)>}$ =

$$\frac{| < u_1|\varphi(t) > |2}{< \varphi(t)|\varphi(t) >} = | < u_1|\varphi(t) > |^2 = |< u_1| \frac{1}{\sqrt{2}} \; e^{-i\frac{\hbar\omega_0 t}{\hbar}}|u_1 > |^2 = 1/2$$

La probabilité reste inchangée. Le théorème d'Ehrenfest est vérifié :

Si $\hat{A}$ ne dépend pas de t et en prenant $\hat{A}$=$\widehat{H}$

$< \widehat{H} >$ = $< \hat{A}(t) >$

$\left[\widehat{H},\widehat{H}\right] = 0$

$\frac{d}{dt} < \widehat{H} >= 0$ donc

$< \widehat{H} >$=cste

Donc l'énergie est une constante du mouvement.

3) Mesure de A

* $< \hat{A} > = < \varphi(t)\middle|\hat{A}\middle|\varphi(t) >$=a ($\varphi(t)$ est vect. prop de A avec « a » comme v.p.)

* Théorème d'Ehrenfest :

$\left[\widehat{H},\hat{A}\right] = 0$ car les deux opérateurs ont des vecteurs propres communs

$\rightarrow \frac{d}{dt} < \hat{A} >= 0 \rightarrow < \hat{A} > = cste \rightarrow < \hat{A} >_{t} =< \hat{A} >_{t\,=\,0} = a$

3) Mesure de B

$$< \hat{B} > = b(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{+i\omega_0 t} \quad 1/2 e^{+2i\omega_0 t} \quad 1/2 e^{+2i\omega_0 t}) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega_0 t} \\ \frac{1}{2} e^{-2i\omega_0 t} \\ \frac{1}{2} e^{-2i\omega_0 t} \end{pmatrix} =$$

$$= b(\frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-i\omega_0 t} + \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{+i\omega_0 t} + 1/4) = b(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\omega_o t) + 1/4)$$

Évident car $\left[\hat{H}, \hat{B}\right] \neq 0$