MOMENT CINETIQUE

Moment cinétique en mécanique classique :

Moment d'une force : $\overrightarrow{\Gamma_0} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$

Moment cinétique par rapport à un point A pour un point M:

$$\overrightarrow{L_A} = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{V}$$ (Moment de la quantité de mvt)

Moment cinétique par rapport à un point A pour un solide :

$$\overrightarrow{L_A} = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge mi\overrightarrow{v_i}$$ ($M\vec{V} = \sum_i m_i\overrightarrow{v_i}$ avec $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$)

Moment cinétique par rapport à au centre de Gravité G pour un solide :

$$\overrightarrow{L_G} = \sum_i \overrightarrow{GM_i} \wedge mi\overrightarrow{v_i}$$

Equation d'évolution :

$$\overrightarrow{L_A} = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge mi\overrightarrow{v_i}$$

$$\overrightarrow{\frac{dL_A}{dt}} = \sum_i \underbrace{\frac{d\overrightarrow{AM_i}}{dt}}_{=\overrightarrow{v_i}-\overrightarrow{v_A}} \wedge mi\overrightarrow{v_i} + \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge mi\underbrace{\overrightarrow{\frac{dv_i}{dt}}}_{=\overrightarrow{F_i}}$$

$$\overrightarrow{\frac{dL_A}{dt}} = \sum_i (\overrightarrow{v_i} - \overrightarrow{v_A}) \wedge m_i\overrightarrow{v_i} + \sum_i \overrightarrow{\Gamma_{Ai}}$$

$$\overrightarrow{\frac{dL_A}{dt}} = -\overrightarrow{v_A} \wedge \textstyle\sum_i \; m_i\overrightarrow{v_i} + \sum_i \; \overrightarrow{\Gamma_{Ai}} = \overrightarrow{v_A} \wedge M\vec{V} + \overrightarrow{\Gamma_A}$$

Terme 1 : =0 $\left\{ \begin{array}{l} \text{si A immobile} \\ \text{Si A=G} \end{array} \right.$

$\boxed{\rightarrow \overrightarrow{\frac{dL_A}{dt}} = \overrightarrow{\Gamma_A}}$ Théorème du moment cinétique en 1 pt fixe

$\boxed{\rightarrow \overrightarrow{\frac{dL_G}{dt}} = \overrightarrow{\Gamma_G}}$ Théorème du moment cinétique au CDM

Moment Cinétique intrinsèque et moment cinétique orbital :

$$\overrightarrow{L_A} = \sum_i \underbrace{\overrightarrow{AM_i}}_{= \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{GM_i}} \wedge mi\overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{AG} \wedge \underbrace{\sum_i mi\overrightarrow{v_i}}_{= Mv} + \sum_i \overrightarrow{GM_i} \wedge mi\overrightarrow{v_i}$$

$$\overrightarrow{L_A} = \underbrace{\overrightarrow{AG} \wedge M\vec{V}}_{\text{Moment Cinétique/A d'un pt matériel unique coincident avec G}} + \overrightarrow{L_G}$$

Théorème de Koenig pour le moment cinétique

Système soumis à une force centrale :

$$\overrightarrow{\frac{dL_A}{dt}} = \overrightarrow{\Gamma_A} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$$

A, pt fixe. Si force centrale F//AM

$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{F} = 0 \rightarrow \overrightarrow{L_A} = cste$$

Le résultat est valable aussi si F=0 (système isolé ou libre)

→ Le moment cinétique est une constante du mouvement dans un problème à force centrale

Observables associées au moment cinétique orbital

$$\vec{L} \rightarrow \hat{\vec{L}} \quad \begin{cases} \widehat{L_x} = \hat{Y}\widehat{P_z} - \hat{Z}\widehat{P_y} \\ \widehat{L_y} = \hat{Z}\widehat{P_x} - \hat{X}\widehat{P_z} \\ \widehat{L_z} = \hat{X}\widehat{P_y} - \hat{Y}\widehat{P_x} \end{cases}$$

$$\vec{r} \wedge \vec{p}$$

$$\vec{L} \rightarrow \widehat{L^2} = \widehat{L_x{}^2} + \widehat{L_y{}^2} + \widehat{L_z{}^2}$$

$$[\hat{X}, \widehat{P_x}] = i\hbar$$

$$[\hat{Y}, \widehat{P_y}] = i\hbar$$

$$[\hat{Z}, \widehat{P_z}] = i\hbar$$

$$[\hat{X}, \widehat{P_y}] = 0$$

$$[\hat{X}, \hat{Y}] = 0$$

$$[\widehat{P_x}, \widehat{P_y}] = 0$$

Règles de commutation des observables :

$$\left[\widehat{L_x},\widehat{L_y}\right] = \widehat{L_x}\widehat{L_y} - \widehat{L_y}\widehat{L_x} = (\hat{Y}\widehat{P_z} - \hat{Z}\widehat{P_y})(\hat{Z}\widehat{P_x} - \hat{X}\widehat{P_z}) - (\hat{Z}\widehat{P_x} - \hat{X}\widehat{P_z})(\hat{Y}\widehat{P_z} - \hat{Z}\widehat{P_y})$$

$$=\hat{Y}\widehat{P_z}\hat{Z}\widehat{P_x} - \cancel{\hat{Y}\widehat{P_z}\hat{X}\widehat{P_z}} - \cancel{\hat{Z}\widehat{P_y}\hat{Z}\widehat{P_x}} + \hat{Z}\widehat{P_y}\hat{X}\widehat{P_z} - \hat{Z}\widehat{P_x}\hat{Y}\widehat{P_z} + \cancel{\hat{Z}\widehat{P_x}\hat{Z}\widehat{P_y}} + \cancel{\hat{X}\widehat{P_z}\hat{Y}\widehat{P_z}} - \hat{X}\widehat{P_z}\hat{Z}\widehat{P_y} =$$

$$=\hat{Y}\widehat{P_x}(\widehat{P_z}\hat{Z} - \hat{Z}\widehat{P_z}) + \hat{X}\widehat{P_y}(\hat{Z}\widehat{P_z} - \hat{Z}\widehat{P_z}) = \hat{Y}\widehat{P_x}[\widehat{P_z},\widehat{Z}] + \hat{X}\widehat{P_y}[\hat{Z},\widehat{P_z}]$$

$$=\hat{Y}\widehat{P_x}(-i\,\hbar) + i\hbar\hat{X}\widehat{P_y} = i\,\hbar[\hat{X}\widehat{P_y} - \hat{Y}\widehat{P_x} = i\hbar\widehat{L_z}$$

$$\left[\widehat{L_x},\widehat{L_y}\right] = i\hbar\widehat{L_z}$$

$$\left[\widehat{L_y},\widehat{L_z}\right] = i\hbar\widehat{L_x}$$

$$\left[\widehat{L_z},\widehat{L_x}\right] = i\hbar\widehat{L_y}$$

$\widehat{L_x}, \widehat{L_y}, \widehat{L_z}$ ne commutent pas entre elles → On ne pourra pas mesurer simultanément les 3 observables.

$$\vec{\hat{L}} \wedge \vec{\hat{L}} = i\hbar\,\vec{\hat{L}}$$

$$\left[\widehat{L_x}, \widehat{L^2}\right] = [\widehat{Lx}, \widehat{L_x}^2 + \widehat{L_y}^2 + \widehat{L_z}^2] = \left[\widehat{L_x}, \widehat{L_y}^2\right] + [\widehat{Lx}, \widehat{L_z}^2] =$$

A savoir : [A,BC]=[A,B]C+B[A,C]

$$\left[\widehat{L_x}, \widehat{L_y}^2\right] = \underbrace{\left[\widehat{L_x}, \widehat{L_y}\right]}_{i\hbar\widehat{L_z}}\widehat{L_y} + \widehat{L_y}\underbrace{[\widehat{Lx}, \widehat{L_y}]}_{i\hbar\widehat{L_z}} = i\hbar(\widehat{L_z}\widehat{L_y}+\widehat{L_y}\widehat{L_z})$$

$$\left[\widehat{L_x}, \widehat{L_z}^2\right] = \underbrace{\left[\widehat{L_x}, \widehat{L_z}\right]}_{-i\hbar\widehat{L_y}}\widehat{L_z} + \widehat{L_z}\underbrace{[\widehat{Lx}, \widehat{L_z}]}_{-i\hbar\widehat{L_y}} = -i\hbar(\widehat{L_y}\widehat{L_z}+\widehat{L_z}\widehat{L_y})$$

$$\left[\widehat{L_x}, \widehat{L^2}\right] = 0$$

$$\left[\widehat{L_x}, \widehat{L^2}\right] = \left[\widehat{L_y}, \widehat{L^2}\right] = \left[\widehat{L_z}, \widehat{L^2}\right] = 0$$

$$\left[\widehat{L^2}, \widehat{L_i}\right] = 0$$

Théorie générale du moment cinétique:

Toute observable vectorielle $\hat{J}$ telle que

$$\widehat{\vec{J}} \wedge \widehat{\vec{J}} = i\hbar \widehat{\vec{J}}$$

Représente nécessairement une grandeur moment cinétique

$$[\widehat{J}_x, \widehat{J}_y] = i\hbar \widehat{J}_z$$

$$[\widehat{J}_y, \widehat{J}_z] = i\hbar \widehat{J}_x$$

$$[\widehat{J}_z, \widehat{J}_x] = i\hbar \widehat{J}_y$$

$$[\widehat{J}^2, \widehat{J}_i] = 0$$

On choisit :

$$[\widehat{J}^2, \widehat{J}_z] = 0$$ On donne un rôle particulier à z

Ils ont pour vecteurs propres communs $|j, m>$

J^2 et J_z ont pour vecteurs propres communs $|j, m>$

j associé à la val. prop. de J^2
m associé à la valeur propre de Jz

L'unité du moment cinétique peut être ħ :

$$[\hbar] = energie * T = ML^2T^{-2}T = ML^2T^{-1}$$

$$[J] = rmv = LMLT^{-1} = ML^2T^{-1}$$

Donc on pose :

$$\hat{J}^2|j, m> = j(j+1)\hbar^2\,|j, m>$$
$$\widehat{J_z}\;|j, m> = \mathrm{m}\hbar|j, m>$$

Point de départ : j et m réels et j>0 (évident car v.p. de J^2>0) et sans dimension

Connaître j et m est très important car on veut répondre aux questions :
- si, on effectue une mesure du carré de J, quelle valeur trouve t-on?
- La norme de J étant fixée, soit j connu, quels sont les résultats de la mesure de jz?

Si J^2 connu (j connu) et si J_z connu (m connu),
→ J_x et J_y, ne pourront pas être connu de façon précise car $[J_x, J_z] \neq 0$
→ $|j, m>$ ne sont pas vecteurs propres de J_x et J_y

On introduit les opérateurs non hermitiques :

$$\widehat{J_+} = \widehat{J_x} + i\widehat{J_y} \qquad \widehat{J_-} = \widehat{J_x} - i\widehat{J_y}$$

On admet donc :

$$\hat{J}^2|j, m> = j(j+1)\hbar^2\,|j, m>$$
$$\widehat{J_z}\ |j, m> = \mathrm{m}\hbar|j, m>$$

j est entier ou ½ entier ($\geq$0) : j=0, ½, 1, 3/2, 2…
m est de même nature que j, entier si j entier ½ entier si j ½ entier et tq
$-j \leq m \leq j$ **variant par pas de 1**
Soit j donné → (2j+1) valeurs de m
Soit j donné → (2j+1) vect. $|j, m>$ différents

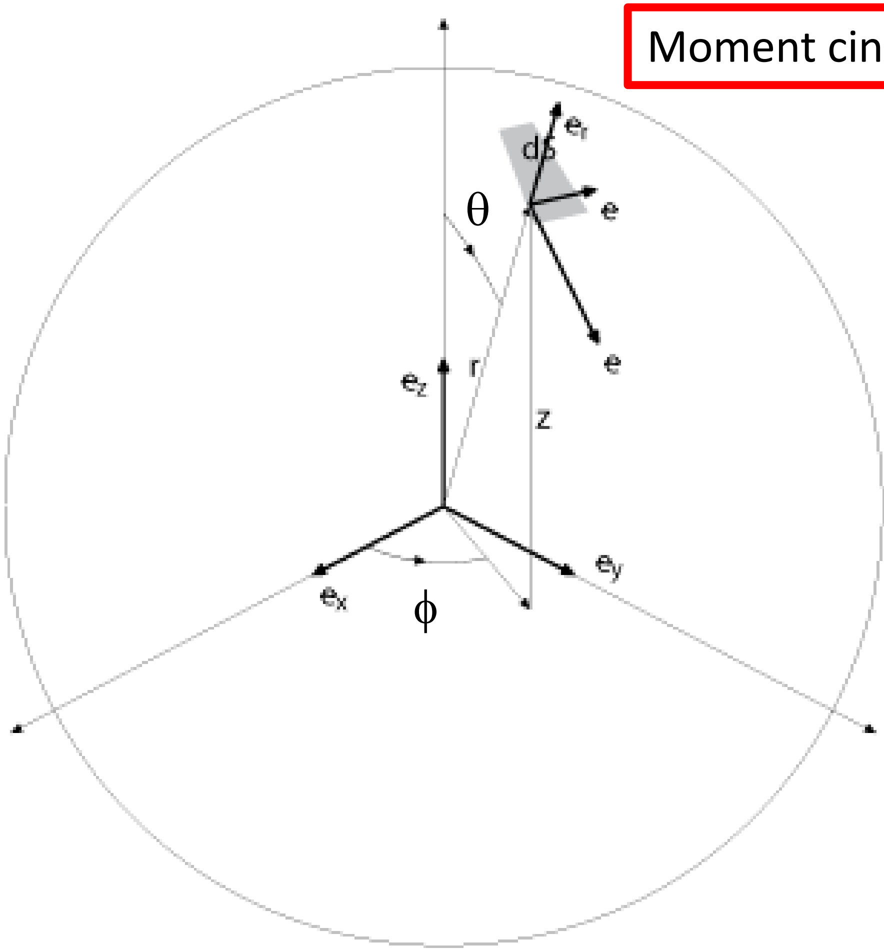
Ex. : j=1 m=-1, 0, 1
J=3/2 m=-3/2, -1/2, ½, 3/2 (ne pas mettre 0 ici)

$$\widehat{J_+} = \widehat{J_x} + i\widehat{J_y} \qquad \widehat{J_x} = \frac{1}{2}(\widehat{J_+} + \widehat{J_-})$$

$$\widehat{J_-} = \widehat{J_x} - i\widehat{J_y} \qquad \widehat{J_y} = \frac{1}{2i}(\widehat{J_+} - \widehat{J_-})$$

$$\widehat{J_\pm} \, \Big| j, m > = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} \, | j, m \pm 1 >$$

Moment cinétique orbital



<u>Exemple</u> : rotation de la molécule de OH
<u>Système de coordonnées</u> : sphériques

$$\begin{cases} x = \mathrm{r}\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$tg\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$
$$tg\phi = \frac{y}{x}$$

$$\vec{\hat{L}} = \vec{r}\wedge\vec{p}$$

$$\widehat{L_z} = (\vec{r}\wedge\vec{p})_z = \hat{x}\widehat{p_y} - \hat{y}\widehat{p_x} = x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right) - y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \ldots$$

A mettre en sphérique, calcul long… Le résultat :

$$\widehat{L_z} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$$

Ne dépend que de ϕ.

L^2, L_x, L_y, L_z ne dépendent que de θ et ϕ et pas de r

$\hat{L}^2|l,m> = l(l+1)\hbar^2\,|l,m>$
$\widehat{L_z}\;|l,m> = \mathrm{m}\hbar|l,m>$

- Les kets, $|l,m>$ sont vecteurs propres communs à L^2 et Lz
- Le nbre quantique l, repère la valeur propre l(l+1) $\hbar^2$ de L^2
- m repère le nbre quantique associé à la valeur propre m$\hbar$ de L_z

On souhaite repasser aux fonctions d'onde : $<\vec{r}|\varphi\;\; > = \psi(\vec{r})$
Ici on a : $<r,\theta,\phi|l,m\;\; > = \psi_l{}^m(r,\theta,\phi)$
L^2, L_z,L_x,L_+… ne dépendent que de θ,ϕ :
$<\theta,\phi|l,m\;\; > = Y_l{}^m(\theta,\phi)$: ces fonctions s'appellent des <u>harmoniques sphériques</u>

$$\hat{L}^2 Y_l{}^m(\theta,\phi) = l(l+1)\hbar^2 Y_l{}^m(\theta,\phi)$$

$$\widehat{L_z}\;Y_l{}^m(\theta,\phi) = \mathrm{m}\hbar Y_l{}^m(\theta,\phi)$$

l et m sont des entiers ? :

$$\widehat{L_z}\ Y_l^m(\theta,\phi) = \mathrm{m}\hbar Y_l^m(\theta,\phi)$$
$$-i\hbar\frac{\partial Y_l^m(\theta,\phi)}{\partial\phi} = m\hbar Y_l^m(\theta,\phi)$$
$$\frac{\partial Y_l^m(\theta,\phi)}{Y_l^m(\theta,\phi)} = im\partial\phi$$

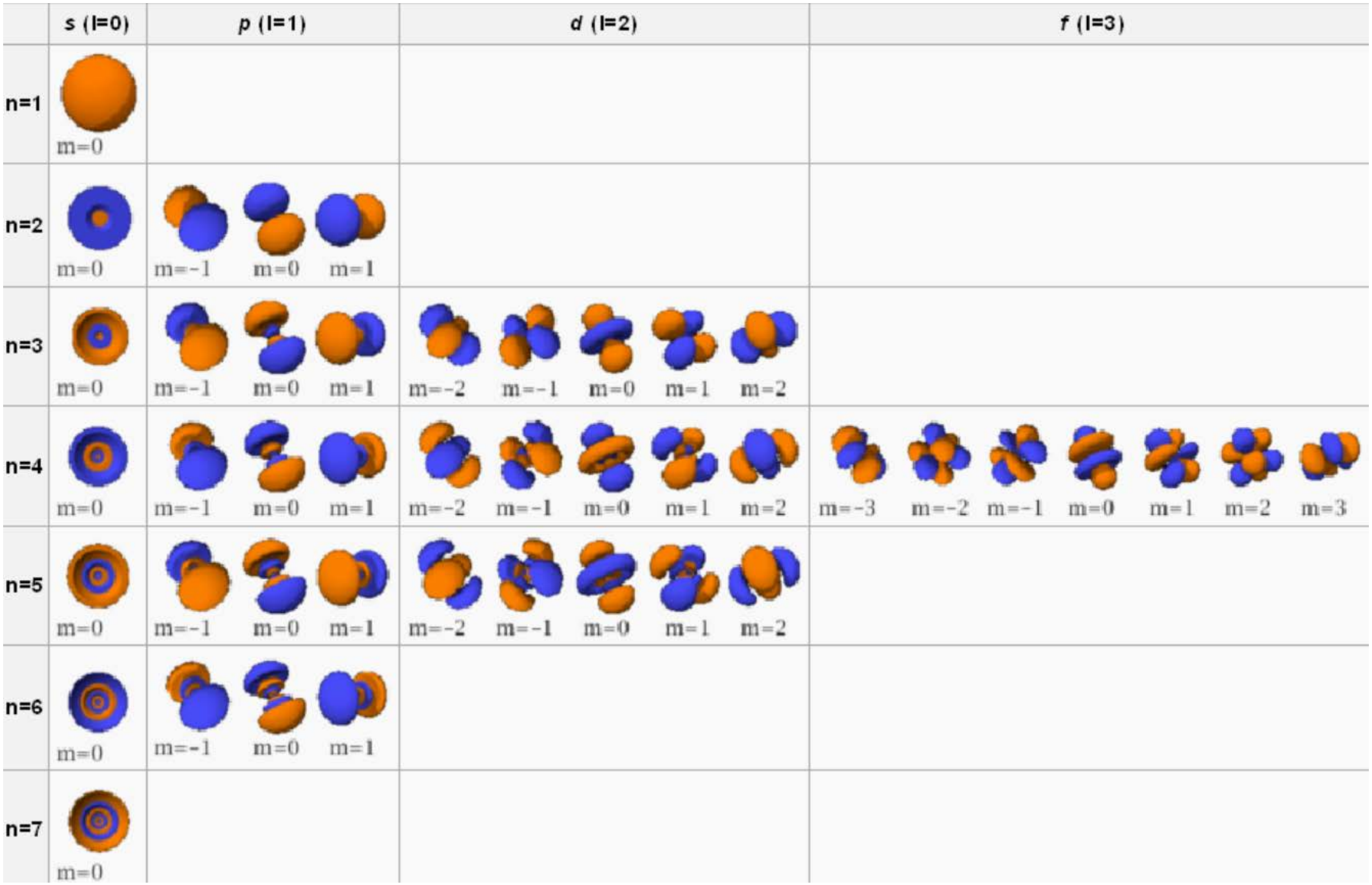
$$Y_l^m(\theta,\phi) = \mathrm{cste} * e^{im\phi} = F_l^m(\theta)e^{im\phi}$$

La fonction $Y_l^m(\theta,\phi)$ ne doit pas changer de valeur si ϕ change en $\phi+2\pi$

$$Y_l^m(\theta,0) = Y_l^m(\theta,2\pi)\ \forall\theta \rightarrow\ e^{im0} = e^{im2\pi}$$
$\rightarrow 1 = e^{im2\pi}$ d'où m doit être un entier

Or $-l \leq m \leq l$ d'où l est entier positif ou nul
Si l est donné → (2l+1) valeurs de m entier

Ex. en chimie : l=0 « s » m=0
l=1 p m=-1,0,1
l=2 d m=-2, -1, 0, 1, 2



s (l=0)
p (l=1)
d (l=2)
f (l=3)
n=1
m=0
n=2
m=0
m=-1 m=0 m=1
n=3
m=0
m=-1 m=0 m=1
m=-2 m=-1 m=0 m=1 m=2
n=4
m=0
m=-1 m=0 m=1
m=-2 m=-1 m=0 m=1 m=2
m=-3 m=-2 m=-1 m=0 m=1 m=2 m=3
n=5
m=0
m=-1 m=0 m=1
m=-2 m=-1 m=0 m=1 m=2
n=6
m=0
m=-1 m=0 m=1
n=7
m=0

3)

$$v_1{}^2 = r_1{}^2(\dot{\theta}^2 + sin\theta^2\dot{\phi}^2)$$
$$v_2{}^2 = r_2{}^2(\dot{\theta}^2 + sin\theta^2\dot{\phi}^2)$$
$$E_c = \frac{1}{2}m_1v_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2v_2{}^2 = \frac{1}{2}(m_1r_1{}^2 + m_2r_2{}^2)(\dot{\theta}^2 + sin\theta^2\dot{\phi}^2)$$

Or $(m_1r_1{}^2 + m_2r_2{}^2) = m_1\frac{m_2{}^2}{(m_1+m_1)^2}r_0{}^2 + m_2\frac{m_1{}^2}{(m_1+m_1)^2}r_0{}^2 = \frac{m_1m_2}{(m_1+m_1)}r_0{}^2 = \mu r_0{}^2$

$$\vec{L} = \vec{r_1} \wedge m_1\vec{v_1} + \vec{r_2} \wedge m_2\vec{v_2}$$

$$\vec{r_1} \wedge \vec{v_1} = r_1\vec{u_r} \wedge m_1(r_1\dot{\theta}\vec{u_\theta} + r_1 sin\theta\dot{\phi}\vec{u_\phi}) = m_1r_1{}^2\vec{u_r} \wedge \left(\dot{\theta}\vec{u_\theta} + sin\theta\dot{\phi}\vec{u_\phi}\right)$$
$$= m_1r_1{}^2\left(\dot{\theta}\vec{u_r} \wedge \vec{u_\theta} + sin\theta\dot{\phi}\vec{u_r} \wedge \vec{u_\phi}\right) = m_1r_1{}^2\left(\dot{\theta}\vec{u_\phi} - sin\theta\dot{\phi}\vec{u_\theta}\right)$$

$$\vec{L} = (m_1r_1{}^2 + m_2r_2{}^2)\left(\dot{\theta}\vec{u_\phi} - sin\theta\dot{\phi}\vec{u_\theta}\right) = \mu r_0{}^2\left(\dot{\theta}\vec{u_\phi} - sin\theta\dot{\phi}\vec{u_\theta}\right)$$
$$\rightarrow L^2 = \mu r_0{}^2\left(\dot{\theta}^2 + sin^2\theta\dot{\phi}^2\right)$$

D'où $E_c = \frac{L^2}{2\mu r_0{}^2}$

$$E_{rot} = \frac{L^2}{2\mu {r_0}^2}$$

a) Equation de Schrodinger indépendante du t :

$$\hat{H} \quad {Y_l}^m(\theta,\phi) = E{Y_l}^m(\theta,\phi)$$

$$\hat{H} \quad {Y_l}^m(\theta,\phi) = \frac{L^2}{2\mu {r_0}^2}{Y_l}^m(\theta,\phi) = \frac{l(l+1)\hbar^2}{\underbrace{2\mu {r_0}^2}_{E_{rot}}}{Y_l}^m(\theta,\phi)$$

b) Les fonction propres de H sont les fonctions propres de L^2

$$\widehat{L^2} \; {Y_l}^m(\theta,\phi) = l(l+1)\hbar^2{Y_l}^m(\theta,\phi)$$

Un niveau donné ayant une énergie E_{rot} donnée qui est fonction de l.

Pour l donné, il existe (2l+1) valeurs de m donc (2l+1) valeurs de ${Y_l}^m(\theta,\phi)$: niveaux l (2l+1) fois dégénéré

c) On pose $B = \frac{\hbar^2}{2\mu {r_0}^2}$

*5 — l=2 E_2=6B

*3 — l=1 E_1=2B

*1 — l=0 E_0=0

$$\mu = \frac{m_H m_{Cl}}{m_H + m_{Cl}} = 1.616\ 10^{-27}\,Kg$$

$$B = 20{,}28\ 10^{-23} J = 13.10-4\ eV$$

E_1=26 10^{-4} eV

E_2=78 10^{-4} eV

d) Transition possible l→ l+1 par rayonnement électromagnétique

$E_0 \longrightarrow E_1 \quad \frac{hc}{\lambda} = 2B = 40{,}56\ 10-23\ J$ → λ=489µm

$E_1 \longrightarrow E_2 \quad \frac{hc}{\lambda} = 4B$ → λ=244µm

$E = E_{e} \,_{-} \,_{+} Ev_{ib} + E_{rot}$

Avec $E \gg E_{e} + \gg Evib + \gg Erot$

Atome H
13.6eV : UV

Conférer OH
$\hbar\omega = 0.268eV$
λ=4.7μm
IR proche

IR lointain (26. 10−4 eV) ou microonde

Spin et moment magnétique

1) <u>Matrice de Pauli</u>

$S=1/2$ $\qquad [S^2,S_z]=0$

Vect. Prop. $|s\ m_s>=|\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}>=$

$$\begin{cases} \left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}> = |+>_z = |+> \right. \\ \left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}> = |->_z = |-> \right. \end{cases}$$

$$\hat{S}^2|s,ms> = s(s+1)\hbar^2\,|s,mS>$$

$$\widehat{S_z}\ |s,ms> = \mathrm{m_S}\hbar|s,ms>$$

$$\widehat{S_z} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Val. prop. $\frac{\hbar}{2} \rightarrow |+>$

Val. prop. - $\frac{\hbar}{2} \rightarrow |->$

$\widehat{S_x} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Val. prop. $\frac{\hbar}{2} \rightarrow \left|+>_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+> + |->)\right.$

Val. prop. - $\frac{\hbar}{2} \rightarrow \left|->_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+> - |->)\right.$

$\widehat{S_y} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

Val. prop. $\frac{\hbar}{2} \rightarrow \left|+>_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+> + i|->)\right.$

Val. prop. - $\frac{\hbar}{2} \rightarrow \left||->_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+> - i|->)\right.$

2) <u>Mesure en t=0</u>

Etat du système physique $\left|\psi(0) > = |+> = |+>_z\right.$

a) $\left|+>= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+>_x + |->_x)\right.$

b) On mesure S_x → les résultats possibles sont $\pm\frac{\hbar}{2}$

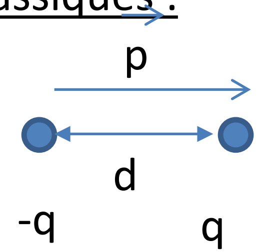
$\frac{\hbar}{2}$ → $\mathcal{P}\left(\frac{\hbar}{2}\right) = |<+|_x\psi(0)>|^2 = |\frac{1}{\sqrt{2}} <+|_x(|+>_x + |->_x)>|^2 = 1/2$

$-\frac{\hbar}{2}$ → $\mathcal{P}\left(-\frac{\hbar}{2}\right) = |(<-|_x\psi(0)>|^2 = 1/2 = 1 - \mathcal{P}\left(\frac{\hbar}{2}\right)$

Spin et moment magnétique

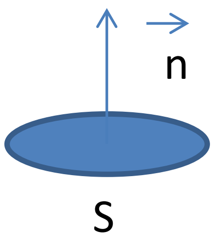
<u>Moment cinétique et moment magnétique classiques :</u>

a) - Dipôle électrique : image classique



$$E_{int} = -\vec{p}.\vec{E}$$

- Dipôle Magnétique



$$\vec{\mu} = iS\vec{n}$$

$$E_{int} = -\vec{\mu}.\vec{B}$$

$$|L| = rmv$$

$$|\mu| = iS = \frac{ev}{2\pi r}\pi r^2 = \frac{evr}{2}$$

dq/dt=e/(2πr/v)

$$\left|\frac{\mu}{L}\right| = \frac{evr}{2rmv} = \frac{e}{2m}$$

$$\boxed{\vec{\mu} \sim \frac{-e}{2m}\vec{L}}$$

<u>Magnéton de Bohr</u>

$$\mu_B = \frac{-e\hbar}{2m} = -9{,}27.10^{-24}\ J/T$$

Pour le spin :

$$\mu_S = \frac{-2e}{2m}\vec{S}$$

$$\mu_S = \frac{-2e}{2m}\overrightarrow{S_z} = \frac{-2e}{2m}m_s\,\hbar$$

Si on a pour le spin de l'électron $m_s=\pm 1/2$ alors :

$$\mu_S = \frac{-2e}{2m}\left(\pm\frac{1}{2}\hbar\right) = \pm\mu_B$$

Le magnéton de Bohr est donc l'unité de moment magnétique pour le spin de l'électron.

$$\boxed{\vec{M} = -gJ\,\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{J}}$$

Moment cinétique total

Dépend de la particule et du moment cinétique : facteur de Landé

Facteur de Landé :

$$g_J = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}$$

Il vaut 2 pour l ’électron

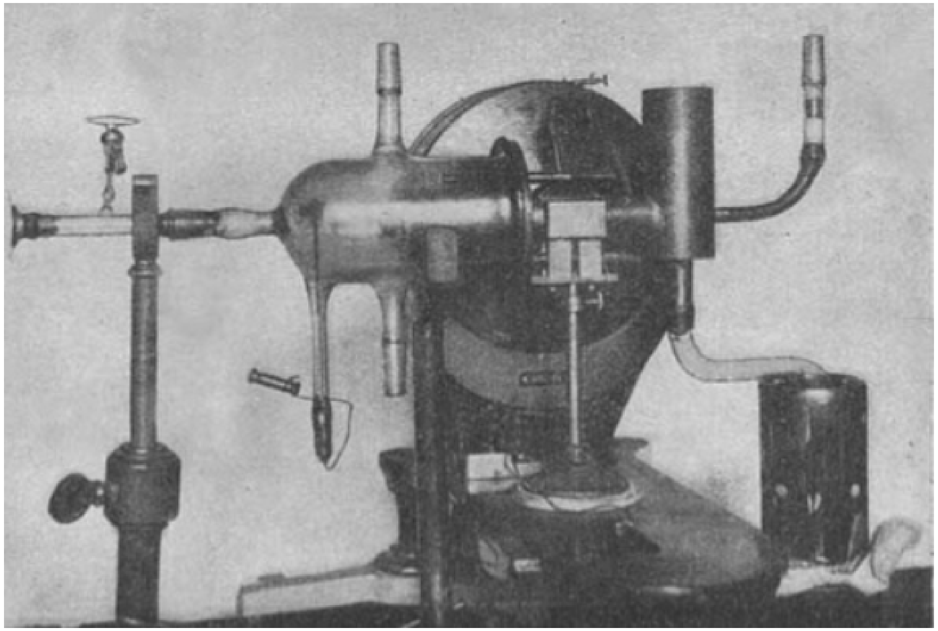
3) <u>Mesure en présence d'un champ magnétique</u>

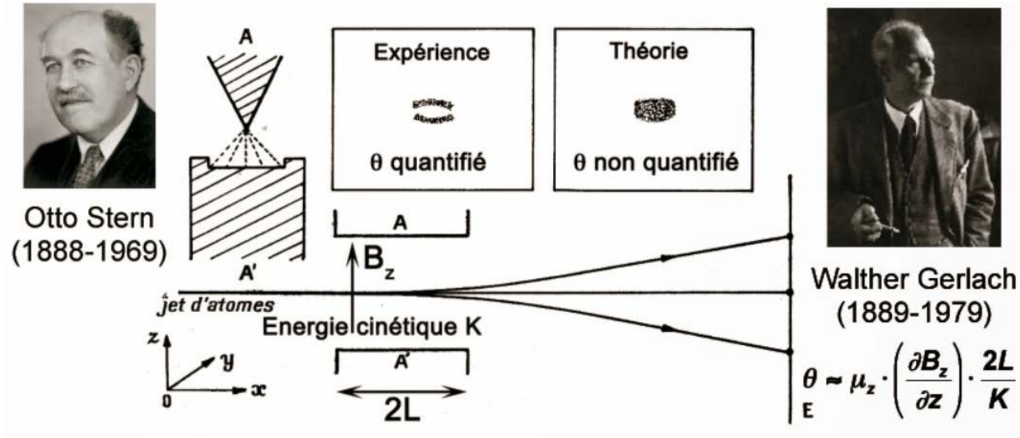
Spin de l'électron : expérience de Stern et Gerlach (1921)
Atomes neutres paramagnétiques dans un champ B inhomogène :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p$$
$$E_p = -\vec{M}.\vec{B}$$
$$F_z = -\frac{dE_p}{dz}$$

1 jet d'atome d'Ag (1e$^-$ célibataire l=0) donc uniquement le spin et donc M_z lié au spin :

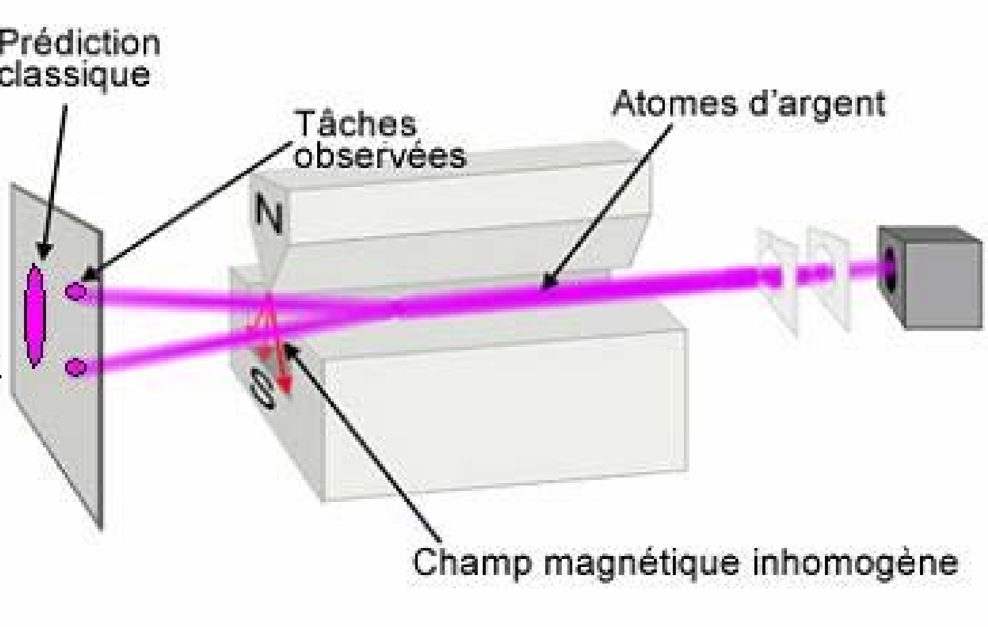
$$\widehat{M_z} = \gamma\widehat{S}_z$$
$$\widehat{\mu_z} = -2\frac{\mu_B}{\hbar}\widehat{S}_z$$





$S_z = \hbar/2$

$S_z = -\hbar/2$



$\hat{S}_z = \mathrm{m_s}\hbar$

Nbre de valeurs de $\mathrm{m_s}$=2s+1

(ici 2 pour s=1/2)


Hochverehrter Herr Bohr, anbei die Fortsetzung unserer Arbeit (vergl. Zeitschr. f. Physik VIII. Seite 110. 1921.): Den experimentellen Nachweis der Richtungsquantelung.
Silber. ohne Magnet-Feld
mit Feld
30 40 50 60
1,0 mm
Wir gratulieren zur Bestätigung Ihrer Theorie! Mit hochachtungsvolle Grüssen
Ihr ergebenster Walther Gerlach
Ffm. 8/2.22

Pour un électron : $\vec{M} = -2\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{S}$

Sous champ magnétique B//By

E$= -\vec{M}.\vec{B} = -\vec{\mu}.\vec{B}$

$$\boxed{E = -(-2\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{S}.\vec{B}) = 2\frac{\mu_B}{\hbar}B_0 S_y = \hat{H}}$$

a) Etat du système physique état propre de H? $|\psi(0)> = |+> \ = |+>_z$

Non car c'est un état propre de S_z et pas de S_y

b) Vecteurs propres de H sont ceux de Sy $|+>_y$ et $|->_y$

$$\hat{H}|+>_y = 2\frac{\mu_B}{\hbar}B_0\,\hat{S}_y|+>_y = 2\frac{\mu_B}{\hbar}B_0\,\frac{\hbar}{2}|+>_y = B_0\mu_B\ |+>_y$$

$$\hat{H}|->_y = -B_0\mu_B\ |->_y$$

c) $|\psi(t)>=?$

$$|\psi(0)> \quad = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+>_{y} + |->_{y})$$

C'est développé sur la base des vecteurs propres de H

$$|\psi_{(t)}> = \sum_{n} c_n e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} \Big| \varphi_n > = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\frac{B_0\mu_B t}{\hbar}}|+>_{y} + e^{i\frac{B_0\mu_B t}{\hbar}}|->_{y}\right)$$

d) On mesure S_y

$$\frac{\hbar}{2} \qquad \rightarrow \mathcal{P}\left(\frac{\hbar}{2}\right) = |<+|_y\psi(t)>|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}} <+\Big|_y\left(e^{-i\frac{B_0\mu_B t}{\hbar}}|+>_{y} + e^{i\frac{B_0\mu_B t}{\hbar}}|->_{y}\right)\right|^2=1/2$$

$$-\frac{\hbar}{2} \qquad \rightarrow \mathcal{P}\left(-\frac{\hbar}{2}\right) = |(<-|_y\psi(0)>|^2=1/2=1-\mathcal{P}\left(\frac{\hbar}{2}\right)$$

On mesure S_z

$$\frac{\hbar}{2} \rightarrow \mathcal{P}\left(\frac{\hbar}{2}\right) = |<+|\psi(t)>|^2 = \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(<+\Big|_y + <-|_y\right)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\frac{B_0\mu_B t}{\hbar}}|+>_{y} + e^{i\frac{B_0\mu_B t}{\hbar}}|->_{y}\right)\right|^2$$

$$=\left|1/2\left(e^{-i\frac{B_0\mu_B t}{\hbar}}+e^{i\frac{B_0\mu_B t}{\hbar}}\right)\right|^2 = \cos^2\frac{B_0\mu_B t}{\hbar}$$

$$-\frac{\hbar}{2} \rightarrow \mathcal{P}\left(-\frac{\hbar}{2}\right) = |(<-|_y\psi(0)>|^2=1-\mathcal{P}\left(\frac{\hbar}{2}\right)$$

On peut mesurer avec certitude S_z si :

$$\cos^2 \frac{B_0 \mu_B t}{\hbar} = 1$$

$$\frac{B_0 \mu_B t}{\hbar} = n\pi$$

$$t = \frac{n\pi\hbar}{B_0 \mu_B} = n\frac{h}{2B_0 \mu_B}$$

$\left[\widehat{S}^2, \widehat{S}_z\right] = 0$ vect. propr. $|s, mS >$

$\hat{S}^2|s, ms > = s(s+1)\hbar^2\,|s, mS >$

$\widehat{S}_z\;|s, ms > = \mathrm{m_S}\hbar|s, ms >$

$$|s, ms > \quad \begin{cases} \left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2} >\right. \\ \left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2} >\right. \end{cases}$$