



Université Paris Sud 11

École doctorale : ED 107

LABORATOIRE DE PHYSIQUE DES SOLIDES

Discipline : Physique Théorique

THÈSE DE DOCTORAT

par

François CRÉPIN

Phases désordonnées dans des gaz d'atomes froids  
de basse dimensionnalité

**Composition du jury :**

Rapporteurs	George BATROUNI Thierry GIAMARCHI	INLN (Nice) Université de Genève
Examineurs	Marc GABAY Sylvain CAPPONI Laurent SANCHEZ-PALENCIA	LPS (Orsay) LPT (Toulouse) LCFIO (Palaiseau)
Directeur de thèse	Pascal SIMON	LPS (Orsay)
Membre invité	Gergely ZÁRAND	Université de Budapest



## Résumé

Cette thèse aborde deux problèmes ayant trait à la physique des gaz quantiques de basse dimensionnalité. Le premier système étudié est un mélange unidimensionnel de bosons et de fermions sans spin soumis à un potentiel aléatoire. Nous commençons par écrire un Hamiltonien de basse énergie et abordons la question de la localisation du point de vue de l'accrochage des ondes de densité par un désordre faible. En utilisant le Groupe de Renormalisation et une méthode variationnelle dans l'espace des répliques, le diagramme de phase peut être tracé en fonctions de deux paramètres : la force des interactions Bose-Bose et Bose-Fermi. La position et les propriétés des phases dépendent d'un paramètre additionnel, le rapport des vitesses du son de chaque composante du gaz. Quelque soit la valeur de ce rapport nous trouvons trois phases, (i) une phase totalement délocalisée, le liquide de Luttinger à deux composantes, (ii) une phase totalement localisée où les deux composantes sont accrochées par le désordre et (iii) une phase intermédiaire où seuls les fermions sont localisés. Le deuxième système est un gaz de bosons de cur dur sur un réseau en échelle. Trois paramètres en contrôlent la physique : les amplitudes de saut transverse et longitudinale, et le remplissage. En utilisant plusieurs méthodes analytiques (théorie des perturbations, bosonisation et RG) nous proposons une interprétation de résultats numériques nouveaux obtenus par nos collaborateurs, notamment sur le paramètre de Luttinger du mode symétrique. Nous en déduisons un diagramme de phase en présence de désordre faible.

**Mots-clé :** atomes froids, basse dimension, désordre, corrélations fortes, bosons.

## Summary

In this thesis we study two distinct problems related to the physics of quantum gases in one dimension. After writing a low-energy Hamiltonian, we address the question of localization by considering the pinning of density waves by weak disorder. Using the Renormalization Group and a variational method in replica space, we find that the phase diagram is adequately plotted as a function of two parameters : the strength of Bose-Bose and Bose-Fermi interactions. The position and properties of the various phases depend on an additional third parameter, the ratio of the phonon velocities of each component of the gas. Whatever the value of this ratio, we identify – using the Renormalization Group and a variational calculation – three types of phases, (i) a fully delocalized phase, that is a two-component Luttinger, (ii) a fully localized phase where both components are pinned by disorder and (iii) an intermediate phase where fermions are localized and bosons are superfluid. The second system is a two-leg ladder lattice of hardcore bosons. Three parameters control the physics : transverse and longitudinal tunneling and the filling. Using several analytical methods (perturbation theory, bosonization, RG) we give an interpretation of new numerical results obtained by our collaborators, namely on the Luttinger parameter of the symmetric mode. We deduce a phase diagram for weak disorder.

**Keywords :** cold atoms, low dimension, disorder, strong correlations, bosons.

## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Jean-Paul Pouget et Dominique Chandesris, successivement directeur et directrice du Laboratoire de Physique des solides pour leur accueil chaleureux. Je remercie également l'ensemble des personnels administratifs du laboratoire avec qui j'ai été en interaction et qui ont rendu le déroulement de ma thèse si simple et agréable, en particulier Marie-France Cozic, Sylvie Falcinelli et Sophie Tourlet.

J'ai commencé à travailler avec Pascal Simon en avril 2008 lors de mon stage de Master 2, à Grenoble. Pendant les trois ans de thèse passés sous sa direction j'ai pu profiter de son enthousiasme et de sa générosité. Merci de m'avoir initié au monde des systèmes quantiques unidimensionnels, de m'avoir poussé à voyager et à présenter mes travaux. J'ai beaucoup appris de ces rencontres.

Mes remerciements les plus sincères vont à George Batrouni et Thierry Giamarchi qui ont tous les deux accepté la lourde tâche d'être les rapporteurs de ma thèse, malgré la chaleur du mois d'août. Leurs avis éclairés et leur bienveillance seront des outils précieux pour la suite, quelle qu'elle soit. J'ai la chance d'avoir pu côtoyer les membres du jury en diverses occasions. Gergely Zaránd tout d'abord, avec qui, par le truchement de Pascal, j'ai activement collaboré. Merci d'avoir mis avec moi les mains dans le camboui de la méthode des répliques, lors de mes quelques voyages à Budapest. Sylvain Capponi, qui a toujours manifesté un intérêt pour mon travail. Laurent Sanchez-Palencia, notre voisin du plateau de Saclay pour ses remarques toujours pertinentes. Enfin, Marc Gabay, mon collègue du LPS, que je remercie pour son accueil, sa constante gentillesse et sa disponibilité.

Que les membres du groupe Théo du LPS soient remerciés. À mes collègues permanents, Mark Goerbig pour tes conseils et ta bonne humeur, Jean-Noël Fuchs pour ton écoute et la patience avec laquelle tu enseignes la physique. Merci d'avoir relu le premier chapitre de ce manuscrit. Frédéric Piéchon, Gilles Montambaux, Anu Jagannathan, Ines Safi, Marcelo Rozenberg, Marcelo Civelli, Cristinan Bena, Luca de Medici, et Gilles Abramovici pour les moments partagés ensemble. À un ancien membre du groupe Théo, Nicolas Lafflorencie, mille mercis pour ton enthousiasme et ton amitié. Merci aussi à Guillaume Roux, mon collègue du LPTMS que l'ascension du plateau n'effraie jamais, pour cette collaboration et nos nombreuses discussions, présentes et, je l'espère, futures.

Un grand merci aux étudiants et Postdocs du labo et d'ailleurs. Nicolas Charpentier, mon cher co-bureau, pour son humour et sa curiosité, Jean-René Souquet, Doru Sticlet (puissions-nous finir ce projet, même à distance!), Yi Liu, Raphaël de Gail, Guangquan Wang, Emilio Winograd, Lih-King Lim, Yannis Laplace, Julien Basset, Edwin Kermarrec, Jean-Yves Chauleau, Clémence Lecoeur, Laëticia Bomble. Un merci tout particulier à Pierre Delplace et Laurie Saulnier pour leur amitié. Merci aux copains de Boston, des Houches et de Cargèse (un merci chaleureux à Elisabeth

Agoritsas, pour son enthousiasme).

Mon éducation scientifique s'est largement construite à l'ENS Lyon. Merci aux nombreux professeurs qui m'ont toujours encouragé dans cette voie. Un grand merci aux amis de l'ENS, ainsi qu'à leurs valeurs ajoutées ;-), Charles et Amélie, Martin et Camille, Pierre et Soumaya, Sylvain et Céline, Audrey et Arnaud, Marion et Jérôme, Gaëlle et Nicolas, Stéphanie, Claire et Jérôme. À Arnaud bien sûr, pour son amour de la physique et son amitié indéfectible. Aux copains de Rennes sans qui je ne serais rien : Thibaud, Stéphane et Hélène, François et Mathilde.

À Bruno et Marie-Christine, mes parents que j'aime tant, à mes grand-parents, où qu'ils soient, et à mes oncles, tantes et cousins. Je sais la rareté d'une famille comme vous. À mon frère Julien que j'admire tant. Enfin à ma Claire qui a su me trouver dans les méandres de l'espace-temps. Je t'aime de tout mon coeur.



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
I.1	Contexte théorique et expérimental . . . . .	1
I.2	Plan de la thèse . . . . .	3
<b>II</b>	<b>Notions sur les gaz quantiques 1D</b>	<b>5</b>
II.1	Statistiques quantiques : différences entre bosons et fermions . . . . .	5
II.1.1	Notion de liquide quantique . . . . .	5
II.1.2	Distribution des états pour un gaz sans interactions . . . . .	7
II.1.2.1	Formalisme de la seconde quantification . . . . .	7
II.1.2.2	Ensemble grand-canonique . . . . .	8
II.1.2.3	Condensation de Bose-Einstein vs surface de Fermi . . . . .	9
II.1.2.4	Corrélations dans les gaz sans interactions . . . . .	11
II.1.3	Effet des interactions, spécificité du cas 1D . . . . .	14
II.1.3.1	Le cas des fermions . . . . .	14
II.1.3.2	Le cas des bosons . . . . .	18
II.2	Approche du fluide harmonique . . . . .	22
II.2.1	Représentation phase-densité . . . . .	22
II.2.2	Hamiltonien de basse énergie . . . . .	24
II.2.3	Fonctions de corrélation . . . . .	26
II.3	Cas d'un mélange Bose-Fermi unidimensionnel . . . . .	27
II.3.1	Modèle et paramètres microscopiques . . . . .	27
II.3.2	Hamiltonien de basse énergie . . . . .	30
II.3.3	Corrélations et diagramme de phase . . . . .	36
II.3.4	Effets de commensurabilité . . . . .	41
II.3.5	Conclusion du chapitre . . . . .	43
<b>III</b>	<b>Mélange Bose-Fermi dans un potentiel aléatoire</b>	<b>47</b>
III.1	Introduction : localisation dans les gaz 1D . . . . .	47
III.2	Désordre et interactions fortes : accrochage de l'onde de densité . . . . .	49
III.2.1	Transition d'accrochage dans un réseau propre . . . . .	49
III.2.2	Transition d'accrochage dans un potentiel aléatoire . . . . .	53
III.2.2.1	Argument variationnel : approche à la Fukuyama-Suzumura . . . . .	55
III.2.2.2	RG : approche à la Giamarchi et Schulz . . . . .	57
III.3	Mélange Bose-Fermi dans un potentiel aléatoire . . . . .	59

III.3.1	Dérivation du Hamiltonien de basse énergie . . . . .	59
III.3.2	Application des arguments de Fukuyama et Suzumura au cas du mélange . . . . .	61
III.3.3	RG en deux étapes . . . . .	63
III.3.3.1	Dérivation des équations du flot du RG . . . . .	63
III.3.3.2	Analyse du flot ; diagramme des phases préliminaire . . . . .	68
III.3.4	Approche variationnelle dans l'espace des répliques . . . . .	71
III.3.4.1	Introduction et dérivation des équations auto- cohérentes . . . . .	71
III.3.4.2	Brisure à une marche de la symétrie des répliques (cas où $v_f > v_b$ ) . . . . .	75
III.3.4.3	Brisure à deux marches de la symétrie des répliques (cas où $v_f > v_b$ ) . . . . .	77
III.3.4.4	Étude du cas particulier $v_b > v_f$ , inversion de la bri- sure de symétrie . . . . .	80
III.4	Observables expérimentales . . . . .	83
III.4.1	Calcul de quelques fonctions de corrélation . . . . .	83
III.4.1.1	Corrélations de densité . . . . .	83
III.4.1.2	Corrélations superfluides . . . . .	86
III.4.2	Diagramme de phase pour un mélange $^{87}\text{Rb}$ - $^{40}\text{K}$ et observables expérimentales . . . . .	87
III.4.2.1	Paramètres expérimentaux pour le diagramme de phase . . . . .	87
III.4.2.2	Facteur de structure vs. mesures de temps de vol . . . . .	88
III.5	Conclusion . . . . .	93
<b>IV</b>	<b>Bosons de cœur dur sur deux chaînes couplées</b>	<b>97</b>
IV.1	Introduction . . . . .	97
IV.2	Résultats analytiques pour les bosons de cœur dur . . . . .	100
IV.2.1	Préliminaires : solution exacte pour les fermions libres . . . . .	100
IV.2.2	Limite de couplage fort . . . . .	101
IV.2.2.1	Gap au demi-remplissage . . . . .	101
IV.2.2.2	Modèle effectif pour les densités incommensurables . . . . .	102
IV.2.3	Chaînes faiblement couplées : bosonisation . . . . .	103
IV.2.4	Comparaison avec les échelles de spin 1/2 . . . . .	107
IV.3	Résumé des résultats numériques . . . . .	109
IV.3.1	Phase isolant de Mott sur barreaux . . . . .	109
IV.3.2	Phase liquide de Luttinger . . . . .	114
IV.4	Cas limites pour le liquide de Luttinger : résultats analytiques . . . . .	115
IV.4.1	Limite diluée pour le gaz de bosons . . . . .	116
IV.4.2	Isolant dopé : limite des barreaux forts . . . . .	117
IV.4.3	Limite de couplage faible : asymétrie de $K_s$ . . . . .	119
IV.4.4	Vitesse du son . . . . .	120

IV.5 Discussions . . . . .	121
IV.5.1 Diagramme des phases . . . . .	121
IV.5.2 Effets du désordre . . . . .	123
IV.5.2.1 Désordre faible . . . . .	123
IV.5.2.2 Désordre fini et transition SF-BG . . . . .	124
IV.5.3 Conséquences expérimentales . . . . .	125
IV.6 Conclusions . . . . .	126
<b>Conclusion</b>	<b>129</b>
<b>Annexes</b>	<b>130</b>
<b>A Méthodes variationnelles</b>	<b>131</b>
A.1 Méthode variationnelle gaussienne pour le modèle de sine-Gordon . . .	131
A.2 Méthode variationnelle gaussienne dans l'espace des répliques . . . . .	133
A.3 Solution 1RSB . . . . .	137
A.4 Solution 2RSB . . . . .	140
<b>B Échelles de bosons de coeur dur dans la limite <math>t_{\perp} \gg t</math></b>	<b>143</b>
B.1 Gap au demi-remplissage . . . . .	143
B.2 Modèle effectif . . . . .	145
B.3 Calcul de $K_s$ et $v_c$ dans la limite de couplage fort . . . . .	147
<b>Bibliographie</b>	<b>149</b>



# Chapitre I

## Introduction

### I.1 Contexte théorique et expérimental

Depuis l'observation de la transition superfluide-isolant de Mott pour des atomes de  $^{87}\text{Rb}$  dans un réseau optique cubique tridimensionnel [1], les gaz d'atomes ultra-froids ont été largement utilisés pour sonder la physique de systèmes fortement corrélés [2]. Un réseau optique est typiquement créé en superposant plusieurs paires de laser contra-propageant, dans des directions orthogonales les unes aux autres. L'amplitude du réseau est directement contrôlée par l'intensité des lasers de chaque paire et il est facile de moduler l'amplitude tunnel entre sites, dans chacune des directions. De ce fait, plusieurs équipes se sont tournées vers la réalisation de réseaux de tubes quasi-unidimensionnels [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12] permettant, par exemple, d'étudier les effets si particuliers des interactions dans les systèmes de basse dimensionnalité. Le régime 1D peut aussi être atteint grâce à des pièges magnétiques fortement anisotropes [13, 14, 15], des pièges hybrides opto-magnétiques [16], ou des puces à atomes (*atom chips*) [17, 18]. D'une manière générale, les expériences d'atomes froids développées au cours des dix dernières années ont ouvert un nouveau pan de la physique de la matière condensée, aux côtés de, la pourtant déjà très riche, physique des solides. Cependant, les liens entre théorie et expériences dans ces deux champs de recherche sont parfois assez différents. En physique du solide, l'observation expérimentale est souvent à la base de l'élaboration de théories permettant d'en rendre compte. Hormis l'utilisation de méthodes de calcul *ab initio*, le raisonnement théorique consiste la plupart du temps à chercher le modèle minimal – généralement sous la forme d'un Hamiltonien – décrivant de manière la plus complète la physique déduite des observations expérimentales. L'étude du Hamiltonien peut par ailleurs se révéler extrêmement complexe – comme c'est le cas du Hamiltonien de Hubbard utilisé pour décrire la physique des cuprates [19] – et même parfois conduire à la prédiction de phénomènes nouveaux ensuite vérifiée expérimentalement – comme dans le cas du modèle d'Anderson pour la conduction des électrons dans un réseau désordonné [20]. Au contraire, dans le domaine des atomes ultra-froids, la versatilité des montages expérimentaux et la grande contrôlabilité des paramètres extérieurs (nombre et nature des atomes, géométrie du piège, interactions) [2] invitent à considérer ces systèmes comme de véritables simulateurs quantiques, permettant de réaliser un Hamiltonien donné et,

par exemple, de caractériser le diagramme de phases qui lui est associé. Bien sûr la validation d'une telle démarche nécessite des efforts expérimentaux et théoriques – bien souvent numériques – conjoints. La transition superfluide-isolant dans le modèle de Bose-Hubbard a été comparée de manière extrêmement précise à des simulations Monte-Carlo quantique [21]. Celles-ci prennent en compte le maximum de paramètres expérimentaux – comme le confinement harmonique par exemple, pouvant limiter la comparaison directe au modèle de Bose-Hubbard – et ont permis d'ajuster certains paramètres expérimentaux difficilement contrôlables, comme l'entropie par particule, directement liée à la température effective au sein du piège.

Cette complémentarité se retrouve au niveau de l'étude des systèmes quantiques unidimensionnels. En physique du solide, de nombreux phénomènes peuvent être modélisés par des modèles unidimensionnels ou quasi-unidimensionnels. Citons à ce titre les canaux de bords de l'effet Hall quantique [22, 23, 24, 25], les nanotubes de carbone [26], les matériaux organiques quasi-1D [27], ou les échelles de spin [28, 29, 30, 31] qui sont dans certaines conditions de température dans le régime 1D. Typiquement, les références [29, 30, 31] mettent en œuvre un grand nombre de méthodes théoriques – bosonisation, ansatz de Bethe, théorie de champ moyen, DMRG, Monte-Carlo quantique – pour déduire le diagramme de phase de ces échelles de spin en fonction de la température et du champ magnétique, décrire les transitions entre régimes 3D et 1D et expliquer les mesures de facteur de structure de spin. Dans la physique des atomes froids, une expérience récente [12] a testé de manière spectaculaire la physique du Hamiltonien de sine-Gordon [32], en soumettant un gaz de bosons – des atomes de  $^{133}\text{Cs}$  – piégé dans des tube quasi-1D, à un potentiel périodique longitudinal, commensurable avec la densité. Pour des interactions répulsives suffisamment fortes (elles sont augmentées à l'aide d'une résonance de Feshbach), un potentiel périodique d'intensité arbitrairement faible peut accrocher l'onde de densité atomique et stabiliser une phase isolant de Mott. La ligne critique entre les phases superfluide et isolante est très bien décrite par le modèle de sine-Gordon [33], validant par ailleurs l'approche du fluide harmonique [34, 35, 36] appliquée dans ce cas au gaz de bosons 1D.

Plusieurs expériences récentes ont illustré quelques aspects de la physique des gaz quantiques soumis à un potentiel extérieur aléatoire, et, notamment, à une dimension [16, 37, 38, 39]. La motivation pour l'étude de tels systèmes trouve son origine dans l'article théorique d'Anderson [20] sur la conduction des électrons libres dans un cristal désordonné et prédisant, outre l'absence de diffusion, la localisation exponentielle des fonctions d'onde. Dans l'expérience de l'Institut d'Optique [16], c'est la localisation d'une onde de matière – c'est-à-dire la décroissance exponentielle de la fonction d'onde macroscopique d'un condensat de Bose-Einstein (BEC) de  $^{87}\text{Rb}$  – par un potentiel aléatoire créé par la figure de speckle d'un laser qui a été observée. L'expérience de Florence [37] simule le modèle de Aubry-André [40] en soumettant un BEC de

$^{87}\text{Rb}$  à un réseau optique bichromatique, formé par la superposition de deux réseaux 1D de longueurs d'onde incommensurables, et simulant un potentiel désordonné (la longueur de corrélation du désordre est néanmoins infinie). Ce modèle présente une transition entre une phase superfluide et une phase localisée lorsque l'intensité du réseau secondaire dépasse une valeur critique [41, 42]. Un point crucial dans la physique des systèmes quantiques désordonnés est la prise en compte des interactions. Présente depuis les travaux originaux d'Anderson, cette question demeure un sujet de recherche actuel, en physique mésoscopique [43], et dans la physique des atomes froids, comme le montrent de nombreux travaux théoriques récents, par exemple dans le cas unidimensionnel [44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51]. Expérimentalement, citons deux expériences adressant cette question, à 1D, pour des bosons avec interactions répulsives [39, 38], dans un réseau bichromatique. La première [39] se concentre sur le cas des interactions faiblement répulsives. Celles-ci sont en compétition avec la localisation par le potentiel désordonné en tendant à favoriser la superfluidité (dans ce cas précis par le rétablissement de la cohérence de phase grâce à la superposition de plus en plus grande des états localisés à mesure que les interactions sont augmentées). Une transition entre une phase localisée et une phase délocalisée est observée pour une valeur critique des interactions. La deuxième expérience [38] étudie plutôt la limite des interactions fortes, et se rapproche en ce sens d'une simulation du modèle de Bose-Hubbard désordonné [52]. Par des mesures de temps de vol et de spectroscopie de Bragg, les auteurs sont en mesure de caractériser trois phases : une phase superfluide, une phase isolant de Mott et une phase ne présentant ni cohérence de phase ni pic caractéristique autour de l'énergie d'interaction sur site  $U$ , dans le spectre de Bragg, qu'il est tentant d'identifier à la phase *verre de Bose* (Bose glass). Cette phase est une phase localisée – la fonction de Green à une particule décroît exponentiellement – pour des bosons interagissant plutôt fortement. Elle est sans gap dans son spectre d'excitations et compressible [52], comme semblent le confirmer plusieurs simulations numériques [53, 54, 55, 56]. Dans la limite de désordre faible et pour des interactions suffisamment fortes, cette transition a été prédite de manière générale par Giamarchi et Schulz [57] et peut être vue comme une transition d'accrochage de l'onde de densité par un potentiel extérieur aléatoire.

## I.2 Plan de la thèse

Cette thèse retrace l'étude théorique de deux modèles trouvant une résonance particulière dans le contexte très stimulant de la physique des atomes ultra-froids. Le premier modèle décrit un mélange unidimensionnel de deux espèces d'atomes (typiquement un mélange Bose-Fermi) soumis à un potentiel aléatoire. Le deuxième est un modèle, quasi-unidimensionnel, d'échelle de bosons de cœur dur. Les deux modèles sont 1D ou quasi 1D et une partie de l'étude consiste à souligner les différences entre bosons et fermions à une dimension, dans différentes situations –

une géométrie particulière, comme dans le cas de l'échelle, ou l'ajout de désordre. Le plan de la thèse est le suivant :

- Le chapitre II est un chapitre largement introductif, illustrant les spécificités de la basse dimensionnalité et introduisant le concept de fluide harmonique pour les liquides quantiques 1D en interaction. Le concept de liquide de Luttinger est décrit en détail et l'accent est mis sur l'universalité de cette description, pour une classe assez large de modèles. Nous passons ensuite en revue les résultats théoriques – analytiques et numériques – récents sur les mélanges Bose-Fermi unidimensionnels et, aussi, quelques unes des instabilités du liquide de Luttinger à deux composantes. Nous insistons sur la dérivation du Hamiltonien microscopique 1D à partir des données expérimentales typiques de certaines expériences sur les mélanges.
- Le chapitre III est quant à lui consacré à l'étude du premier modèle évoqué ci-dessus : un mélange Bose-Fermi 1D, soumis à un potentiel aléatoire. Après un bref rappel sur la localisation dans les gaz 1D (section III.1), l'étude est menée sous l'angle de l'accrochage des ondes de densité par le désordre. Dans cette optique, nous rappelons brièvement les méthodes (calcul variationnel et groupe de renormalisation) permettant de décrire la transition d'accrochage dans un réseau propre (section III.2.1) et dans un potentiel aléatoire (section III.2.2). Pour établir le diagramme de phase du mélange Bose-Fermi désordonné nous utilisons à la fois le groupe de renormalisation (le calcul est détaillé en III.3.3.1) et la méthode variationnelle dans l'espace des répliques (section III.3.4). Cette étude utilise les méthodes développées en [57] et [58] en mettant en évidence pour ce système une physique assez riche, résumée dans la section III.4, où sont présentés un diagramme des phases dans le cas d'un mélange  $^{87}\text{Rb}$  -  $^{40}\text{K}$  se voulant réaliste, ainsi que certaines observables permettant de distinguer entre les phases localisées et la phase superfluide. Les principaux résultats de ce chapitre ont été publiés dans [59].
- Dans le chapitre IV est présentée l'étude d'un gaz de bosons de cœur dur sur une échelle. La physique de ce modèle est contrôlée par seulement deux paramètres, l'amplitude de saut transverse couplant les deux chaînes et la densité de bosons. Bien que ce système ait été largement étudié par le passé, notamment dans l'optique des échelles de spin  $1/2$ , nous en proposons une étude assez détaillée, se basant sur de nouveaux résultats numériques (par exemple pour le paramètre de Luttinger du mode symétrique) obtenus par nos collaborateurs ainsi que sur quelques arguments analytiques nouveaux. La combinaison de ces différentes approches (numérique et analytique) permet de jeter un regard neuf sur la physique de des échelles de bosons de cœur dur, de revisiter les effets du désordre faible (étudiés auparavant dans [60, 61]), et d'envisager quelques conséquences pour les expériences d'atomes froids (un gaz de bosons ayant été piégé récemment dans un réseau en échelle [62]). Les résultats de ce chapitre apparaissent dans [63].

# Chapitre II

## Notions sur la physique des gaz quantiques unidimensionnels

### II.1 Statistiques quantiques : différences entre bosons et fermions

#### II.1.1 Notion de liquide quantique

Dans ce chapitre nous nous proposons de rappeler quelques unes des caractéristiques principales des systèmes unidimensionnels de particules quantiques en interaction, en mettant en évidence les spécificités dues à la basse dimensionnalité et en introduisant les outils mathématiques nécessaires à leur description. Pour ce faire, et en guise d'introduction à ce chapitre, il convient de rappeler tout d'abord quelques propriétés des liquides quantiques, en dimension  $d \in \mathbb{N}^*$  quelconque. Un liquide quantique est un système composé d'un grand nombre de particules et dont l'étude nécessite de prendre en compte à la fois les effets de la mécanique quantique et de la statistique [64, 65, 66]. Les effets de la statistique quantique se feront typiquement sentir si la longueur d'onde de de Broglie  $\lambda$  est au moins aussi grande que la distance typique entre particule, soit

$$\rho\lambda^d \geq 1. \tag{II.1}$$

Pour un gaz de densité  $\rho$  de particules de masse  $m$  à l'équilibre thermique,

$$\lambda = \left( \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T} \right)^{1/2} \tag{II.2}$$

est la longueur d'onde de de Broglie thermique et cette condition équivaut ainsi à

$$k_B T \leq \rho^{2/d} \hbar^2 / m = k_B T_{\text{deg}}, \tag{II.3}$$

où  $T_{\text{deg}}$  est, par définition, la température de dégénérescence. Notons que ce critère est rempli pour les électrons d'un métal à température ambiante en raison de leur très faible masse. Au contraire, des températures extrêmement basses sont nécessaires

pour atteindre le régime quantique dans l’Hélium ou les gaz alcalins piégés optiquement [64]. Notons aussi qu’à une température donnée, le régime de statistique quantique sera plus facilement atteint pour des gaz denses (la température de dégénérescence étant alors plus haute).

Les effets de la statistique sont très différents pour des particules classiques et des particules quantiques. Les propriétés statistiques de particules classiques sont déterminées par la distribution de Maxwell-Boltzmann, reposant sur l’hypothèse que toutes les particules sont distinguables, même si elles sont identiques. Cette hypothèse étant rendue caduque par le principe d’incertitude de Heisenberg, les particules dans le régime quantique sont en pratique indistinguables et les effets statistiques dévient largement de ceux prédits par la distribution de Maxwell-Boltzmann. Afin de ressentir les effets statistiques, et en quelque sorte tester leur indistinguabilité, les particules doivent pouvoir échanger leurs positions. On s’attend donc à ce que la dimensionnalité du système soit un facteur déterminant dans l’expression des effets dus à la statistique. Par exemple à une dimension, la dynamique des particules est confinée à une direction et l’échange de particules n’est pas possible, sauf à considérer certains modèles bien particuliers.<sup>1</sup> Néanmoins, quelque soit la dimension, il apparaît que la forme de la fonction d’onde d’un système à plusieurs particules est fortement contrainte par le caractère indistinguishable des particules. Considérons par exemple deux particules identiques, décrites par la fonction d’onde  $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)$ . Si elles sont indistinguishables alors la probabilité de les trouver aux positions  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  à l’instant  $t$  doit être invariante sous l’échange des deux particules, soit  $|\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)|^2 = |\Psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, t)|^2$ . Ainsi,  $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t)$  et  $\Psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, t)$  sont égales, à un facteur de phase  $e^{i\alpha}$  près. À trois dimensions, un échange supplémentaire des deux particules est équivalent à la transformation identité [64], imposant à  $\alpha$  d’être un multiple entier de  $\pi$ . La fonction d’onde est alors symétrique ( $\alpha = 0$ ) ou antisymétrique ( $\alpha = \pi$ ) sous l’échange de deux particules, et les particules sont des bosons ou des fermions, respectivement<sup>2</sup>. Cette approche dans l’espace réel de la statistique quantique peut être étendue à n’importe quel espace de Hilbert, dans le sens où tout état à  $N$  particules, décomposé sur une base d’états à une particule, est soit totalement symétrique, soit totalement antisymétrique sous l’échange de tout couple de particules. Par conséquent, les fermions obéissent au principe d’exclusion de Pauli, c’est-à-dire que deux fermions identiques ne peuvent occuper le même état quantique, alors que plusieurs bosons – voire même un nombre macroscopique d’entre eux – peuvent occuper un état quantique donné.

---

1. Un modèle sur réseau avec sauts aux deuxièmes voisins par exemple, ou un modèle quasi-unidimensionnel comme l’échelle à deux montants du chapitre IV, permettent aux particules de tester leur statistique.

2. En dimension plus petite que trois cette restriction sur la valeur de  $\alpha$  ne s’applique pas, et les excitations élémentaires d’un système peuvent avoir des statistiques plus exotiques

## II.1.2 Distribution des états pour un gaz sans interactions

### II.1.2.1 Formalisme de la seconde quantification : quelques rappels utiles

Dans ce paragraphe nous introduisons brièvement quelques concepts utiles pour la suite, où le formalisme de la seconde quantification sera largement utilisé. Nous n'avons pas la prétention de donner ici une justification détaillée de la méthode, mais simplement de fixer des notations. Nous renvoyons le lecteur aux nombreux excellents livres traitant du sujet, e.g. [67, 64].

Considérons le Hamiltonien suivant, en dimension  $d$  quelconque,

$$H = \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) \right] \psi(\mathbf{r}) \quad (\text{II.4})$$

où  $\psi^\dagger(\mathbf{r})$  et  $\psi(\mathbf{r})$  sont respectivement les opérateurs de création et d'annihilation d'une particule au point  $\mathbf{r}$ . En fonction de la statistique, ces deux opérateurs vérifient les relations de commutations suivantes,

$$[\psi(\mathbf{r}), \psi(\mathbf{r}')] = 0 \quad \text{et} \quad [\psi(\mathbf{r}), \psi^\dagger(\mathbf{r}')] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (\text{II.5})$$

pour des bosons, et

$$\{\psi(\mathbf{r}), \psi(\mathbf{r}')\} = 0 \quad \text{et} \quad \{\psi(\mathbf{r}), \psi^\dagger(\mathbf{r}')\} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{II.6})$$

pour des fermions, les accolades désignant l'anticommutateur. Ces opérateurs peuvent être décomposés sur toute base d'états à une particule. Par exemple, dans le cas de l'espace homogène le Hamiltonien du système est invariant par translation et le vecteur d'onde<sup>3</sup>  $\mathbf{k}$  est un bon nombre quantique. Si de plus le système est placé dans une boîte de taille  $L^d$ , avec, par exemple, des conditions aux limites périodiques, on peut alors écrire :

$$\psi^\dagger(\mathbf{r}) = \frac{1}{L^d} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} a_{\mathbf{k}}^\dagger, \quad (\text{II.7})$$

où  $a_{\mathbf{k}}^\dagger$  désigne l'opérateur création d'une particule – bosons ou fermions – d'impulsion  $\mathbf{k}$ , les impulsions étant quantifiées, selon  $\mathbf{k} = 2\pi/L(n_x, n_y, n_z)$  avec  $n_x, n_y, n_z$  des entiers. Dans cette nouvelle base, le Hamiltonien se réécrit simplement :

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}, \quad (\text{II.8})$$

avec  $\varepsilon(\mathbf{k}) = \hbar^2 k^2 / (2m)$ . Ainsi l'énergie du système s'obtient en comptant le nombre de particules dans chaque état à une particule. La distribution sur les états à une particule dépend de la statistique et sa détermination est l'objet du prochain paragraphe.

---

3. On utilisera indifféremment les mots vecteur d'onde et impulsion pour désigner  $\mathbf{k}$ , la véritable impulsion s'écrivant  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$

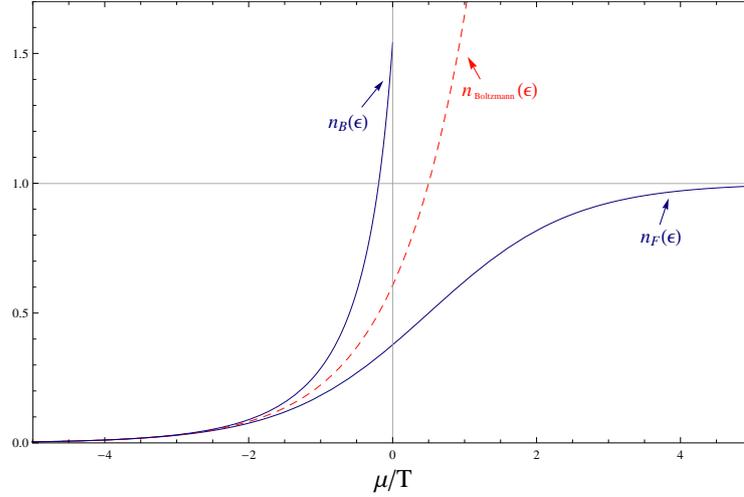


FIGURE II.1: Nombre d'occupation à  $T$  fixée, pour le niveau d'énergie  $\varepsilon = 0.5k_B T$ , en fonction du potentiel chimique. Pour des potentiels chimiques très négatifs (limite de grande dilution), les distributions fermionique et bosonique sont bien approximées par la distribution de Maxwell-Boltzmann décrivant des particules classiques. Les effets quantiques se font sentir pour  $\mu$  proche de zéro pour les bosons (où le nombre d'occupation est maximal) et à très grand  $\mu$  positif pour les fermions où le nombre d'occupation tend vers 1.

### II.1.2.2 Ensemble grand-canonique

Pour un gaz de particules libres la distribution sur les états à une particule découle alors de la statistique considérée [64], bosonique ou fermionique. Considérons  $N$  particules identiques<sup>4</sup> décrites par le Hamiltonien (II.8). On cherche typiquement à calculer  $\langle n_{\mathbf{k}} \rangle = \langle a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \rangle$ , le nombre moyen de particules dans l'état d'impulsion  $\mathbf{k}$ . En supposant que le gaz a une énergie fixée  $E$ , on peut en théorie calculer ce nombre d'occupation, moyenné sur tous les micro-états à  $N$  particules et d'égales probabilités. En pratique il est commode de laisser fluctuer le nombre total de particules ainsi que l'énergie, en imposant des conditions uniquement sur leur moyenne respective<sup>5</sup>,

$$N = \sum_{\mathbf{k}} \langle n_{\mathbf{k}} \rangle, \quad (\text{II.9})$$

$$E = \sum_{\mathbf{k}} \langle n_{\mathbf{k}} \rangle \varepsilon_{\mathbf{k}}. \quad (\text{II.10})$$

4. On ne considère qu'une seule espèce de particules, boson ou fermion.

5. Ce qui revient à passer de l'ensemble microcanonique où  $E, N, V$  sont fixées à l'ensemble grand-canonique où  $T, \mu, V$  sont fixées.

On en déduit, pour chaque statistique, la distribution moyenne des particules  $\langle n_{\mathbf{k}} \rangle$  :

$$\langle n_{\mathbf{k}} \rangle = [e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1]^{-1} = n_B(\varepsilon) \quad \text{pour des bosons,} \quad (\text{II.11})$$

$$\langle n_{\mathbf{k}} \rangle = [e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} + 1]^{-1} = n_F(\varepsilon) \quad \text{pour des fermions.} \quad (\text{II.12})$$

La température  $T = 1/(k_B\beta)$  et le potentiel chimique  $\mu$  sont fixés par les conditions (II.9) et (II.10). Pour le gaz parfait, à température fixée et pour un niveau d'énergie donné,  $n_B$  et  $n_F$  sont deux fonctions croissantes de  $\mu$ .  $n_B$  n'est définie que pour des potentiels chimiques négatifs alors que  $n_F$  est définie pour tout  $\mu$  réel. Pour les deux distributions, le nombre total de particules  $N$  est une fonction croissante de  $\mu$ . Toujours à  $T$  fixée, pour un nombre de particules  $N$  très petit on a  $|\mu| \gg k_B T$  et [68]

$$n_{F,B} \simeq e^{-\beta(\varepsilon - \mu)}. \quad (\text{II.13})$$

Dans la limite diluée, les effets quantiques deviennent négligeables et on retrouve la statistique de Boltzmann. Pour un gaz placé dans une boîte de volume  $L^d$  et en supposant  $L \gg \lambda$ , la longueur d'onde de de Broglie thermique, afin d'approximer le spectre d'énergie par un continuum, on trouve en effet  $N \simeq e^{\beta\mu} \int_0^\infty d\varepsilon g(\varepsilon) e^{-\beta\varepsilon}$  soit

$$\rho \simeq \lambda^{-d} e^{\beta\mu}, \quad (\text{II.14})$$

avec  $g(\varepsilon) = \frac{d}{2} \frac{L^d}{\Gamma(d/2+1)} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{d/2} \varepsilon^{d/2-1}$  la densité d'états pour une boîte de dimension  $d$ . La limite diluée étant caractérisée par  $\beta|\mu| \gg 1$ , d'après l'équation (II.1) celle-ci correspond bien à la limite classique. Les effets quantiques se feront sentir dans des régimes de concentrations élevées, c'est à dire  $\mu \gg k_B T$  pour les fermions et  $|\mu| \ll k_B T$  pour les bosons [68] (voir Fig. II.1).

### II.1.2.3 Condensation de Bose-Einstein vs surface de Fermi

Pour les bosons il est commode de définir la fugacité  $z = e^{\beta\mu}$  variant entre 0 et 1, et s'approchant de 1 pour des concentrations élevées ( $\mu \rightarrow 0^-$ ). En séparant le nombre d'occupation de l'état fondamental<sup>6</sup>, le nombre total de particules s'écrit [68]

$$N = \frac{z}{1-z} + \sum_{j \neq 0} \frac{z}{e^{\beta\varepsilon_j} - z}. \quad (\text{II.15})$$

On pose aussi

$$N_0(z) = \frac{z}{1-z} \quad (\text{II.16})$$

---

6. On pose  $\varepsilon_0 = 0$

le nombre de particules dans l'état fondamental et

$$N'(\mu, T) = \sum_{j \neq 0} \frac{z}{e^{\beta \varepsilon_j} - z} \quad (\text{II.17})$$

le nombre de particules dans les états excités. Il apparait alors que  $N_0(z)$  devient arbitrairement grand lorsque  $z$  approche 1, alors que  $N'$  ne peut dépasser une valeur maximale  $N'_{\max}(T) = N'(0, T)$  dépendant de la température. Si cette valeur est finie alors une fois la limite  $N'_{\max} = N$  atteinte, toute particule supplémentaire vient *se condenser* dans l'état fondamental. C'est ce phénomène que l'on nomme *condensation de Bose-Einstein*.

Si maintenant on fait varier la température en fixant le nombre de particules  $N$  alors il existe une température critique  $T_c$  telle que pour toute température  $T < T_c$ ,  $N'_{\max}(T) < N$ . Pour un potentiel chimique raisonnablement proche de 0,  $N' \simeq N'_{\max}$  et les états excités sont saturés. Un nombre  $N_0 = N - N'(T)$  de particules occupe alors l'état fondamental. Bien sûr  $N'_{\max}(T)$  décroît avec la température et pour  $T \ll T_c$ , un nombre macroscopique de particules  $N_0 \simeq N$ , occupent l'état fondamental.

La condensation de Bose-Einstein ne peut avoir lieu que si le nombre maximal de particules dans les états excités  $N'_{\max}$  est fini. En faisant l'hypothèse d'un spectre continu, la somme dans  $N'_{\max}$  peut être remplacée par une intégrale,

$$N'_{\max} = \int_0^\infty \frac{g(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\beta \varepsilon} - 1}. \quad (\text{II.18})$$

Encore une fois, pour une boîte de dimension  $L^d$ ,  $g(\varepsilon) = \frac{d}{2} \frac{L^d}{\Gamma(d/2+1)} \left( \frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{d/2} \varepsilon^{d/2-1}$ . En dimension trois l'intégrale converge et

$$N'_{\max} \simeq \zeta(3/2) \left( \frac{L}{\lambda} \right)^3, \quad (\text{II.19})$$

définissant la température critique selon

$$\rho = \zeta(3/2) \left( \frac{mk_B T_c}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2}. \quad (\text{II.20})$$

Pour  $d < 3$  l'intégrale présente une divergence infrarouge et la physique est *dominée par les modes de grande longueur d'onde*. En dimension 1 on peut approximer  $N'_{\max}$  en développant la distribution de Bose-Einstein aux petits  $k$  et il vient

$$N'_{\max} \simeq \frac{\pi}{3} \left( \frac{L}{\lambda} \right)^2, \quad (\text{II.21})$$

ce qui donnerait une température critique définie par

$$\rho = \frac{\pi}{3} \left( \frac{mk_B T_c}{2\pi\hbar^2} \right) L. \quad (\text{II.22})$$

Contrairement à la température critique en dimension 3, celle-ci tend vers 0 à la limite thermodynamique,  $N, V \rightarrow \infty$  en gardant  $\rho = N/V$  finie. À une dimension, dans une boîte homogène, *et à la limite thermodynamique*, il n'y a pas de condensation de Bose-Einstein. La situation est différente dans un piège harmonique où la densité d'état va plutôt comme  $\rho(\varepsilon) \sim \varepsilon^{d-1}$ , autorisant la condensation de Bose-Einstein même à deux dimensions [69]. Il faut noter qu'à 1D, un confinement harmonique est suffisant pour induire un crossover assez franc vers une *occupation macroscopique* de l'état fondamental pour des températures plus petites que

$$k_B T_c = \hbar \omega \frac{N}{\ln 2N}, \quad (\text{II.23})$$

où  $\omega$  est la fréquence du piège harmonique et  $N$  le nombre de particules [70, 69]. En effet, pourvu qu'on ne prenne pas la limite thermodynamique usuelle – dans ce cas,  $N \rightarrow \infty$  et  $\hbar \omega N$  fini –  $T_c$  reste non nulle.

La distribution des particules bosoniques est donc marquée par une forte occupation de l'état fondamental dans le régime dégénéré, avec une transition de phase ou un crossover vers la condensation de Bose-Einstein dans certaines conditions de dimensionnalité et de température. Au contraire, pour des fermions,  $\langle n_{\mathbf{k}} \rangle \rightarrow \Theta(\mu - \varepsilon_{\mathbf{k}})$  à température nulle, avec  $\Theta$  la fonction marche de Heaviside, et de fait

$$N = \sum_{\mathbf{k}} \Theta(\mu - \varepsilon_{\mathbf{k}}). \quad (\text{II.24})$$

Ainsi, à température nulle, les états quantiques sont remplis un à un par les fermions. L'énergie du dernier état occupé, appelée énergie de Fermi  $E_F$ , est égale à la valeur du potentiel chimique. Cet empilement dans l'espace des états est bien sûr une conséquence du principe d'exclusion de Pauli. Pour des températures non-nulles mais faibles,  $k_B T \ll \mu$ , la distribution des états pour les fermions s'étale autour du niveau de Fermi, sur une bande d'énergies de largeur typique  $k_B T$ . La physique de basse énergie est alors contrôlée majoritairement par les états proches du niveau de Fermi. En particulier, le potentiel chimique étant l'échelle d'énergie la plus grande, la longueur d'onde de de Broglie est dans ce cas confondue avec la longueur d'onde de Fermi,  $\lambda_F \sim \left( \frac{\hbar}{2m\mu} \right)^{-1/2}$ .

#### II.1.2.4 Corrélations dans les gaz sans interactions

De nombreuses informations peuvent être extraites des corrélations de densité du système [68]. Considérons les deux fonctions suivantes,

$$g_1(\mathbf{r}) = \langle \psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(0) \rangle, \quad (\text{II.25})$$

$$g_2(\mathbf{r}) = \langle \rho(\mathbf{r})\rho(0) \rangle. \quad (\text{II.26})$$

La première fonction,  $g_1$ , parfois appelée matrice densité à une particule, est le recouvrement entre l'amplitude de probabilité de trouver une particule à l'origine et celle de trouver la même particule au point  $\mathbf{r}$ , moyenné sur le comportement de toutes les autres particules du système. La deuxième fonction,  $g_2$ , renseigne quant à elle sur les corrélations de densité du système. Pour un système de particules libres – et plus généralement pour tout Hamiltonien quadratique – ces deux fonctions sont liées par le théorème de Wick selon :

$$g_2(\mathbf{r}) = g_1(0)^2 \pm g_1(\mathbf{r})^2, \quad (\text{II.27})$$

où le signe  $+$  est pour les bosons et le signe  $-$  pour les fermions. Pour un gaz dans le régime non dégénéré –  $\mu < 0$  et  $|\mu| \gg k_B T$  – dans une boîte homogène,  $g_1(\mathbf{r}) = L^{-d} \sum_{\mathbf{k}} \langle n_{\mathbf{k}} \rangle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ ,  $\langle n_{\mathbf{k}} \rangle \simeq e^{\beta\mu} e^{-\beta\varepsilon_{\mathbf{k}}}$ , soit

$$g_1(\mathbf{r}) \simeq \rho e^{-2\pi r^2/\lambda^2}, \quad (\text{II.28})$$

pour des fermions ou des bosons. On retrouve le comportement gaussien typique des gaz classiques. Pour des bosons dans le régime dégénéré, le comportement de  $g_1$  et  $g_2$  varie fortement en présence d'un condensat ou non. À 3 dimensions, dans le régime dégénéré, un condensat existe toujours et on doit séparer la contribution du niveau fondamental dans  $g_1$ . On écrit alors,  $g_1(\mathbf{r}) = N_0/L^d + \bar{g}_1(\mathbf{r})$  avec  $\bar{g}_1(\mathbf{r}) = L^{-d} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \langle n_{\mathbf{k}} \rangle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ . On peut facilement montrer que les états excités interfèrent destructivement à grande distance, faisant de  $\bar{g}_1$  une fonction décroissante à l'infini [68]. Il vient donc

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g_1(\mathbf{r}) = \rho_0, \quad (\text{II.29})$$

la densité de particules dans l'état fondamental. Noter que l'équation (II.29) est souvent considérée comme une définition possible de la condensation de Bose-Einstein. Le système est dans un état BEC, à la limite thermodynamique, si la matrice densité à une particule tend vers une constante à grande distance<sup>7</sup>. À une dimension au contraire il n'y a pas de condensat dans le régime dégénéré et les corrélations sont dominées par les modes de grande longueur d'onde – c'est à dire de basse énergie, la densité d'états allant comme  $\varepsilon^{-1/2}$ . On peut approximer la distribution des états comme  $\langle n_{\mathbf{k}} \rangle \simeq [\hbar^2 k^2 / (2m) + |\mu|]^{-1}$  et on trouve [68]

$$g_1(x) \simeq \rho e^{-x/\ell_c}, \quad (\text{II.30})$$

où  $\ell_c = \rho \lambda^2 / (2\pi)$  est la longueur de cohérence, diminuant comme  $1/T$  lorsque la température augmente (cf. équation (II.2)). La matrice densité à une particule tend alors vers 0 à l'infini, signature de l'absence d'ordre à longue portée pour un gaz

---

7. On parle aussi d'ordre *hors-diagonale* à longue portée. Voir la référence [64]

de bosons 1D sans interactions à température non nulle<sup>8</sup>. Pour les fermions dans le régime dégénéré le comportement des fonctions de corrélations est radicalement différent, comme peut le laisser supposer l'analyse du paragraphe précédent et dépend finalement assez peu de la dimension. C'est la surface de Fermi qui contrôle les corrélations, quelque soit la dimension. À température nulle on trouve, à 1D,

$$g_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-k_F}^{k_F} dk e^{ikx} = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(k_F x)}{x}, \quad (\text{II.31})$$

et

$$g_2(x) = \frac{k_F^2}{\pi^2} - \frac{1}{2\pi^2 x^2} + \frac{\cos(2k_F x)}{2\pi x^2}. \quad (\text{II.32})$$

Notez bien que  $k_F/\pi = \rho$ . Pour des fermions sans interactions à température nulle, les corrélations décroissent algébriquement vers 0 à l'infini. En anticipant sur la prochaine section, on parlera dans ce cas de *quasi-ordre à longue portée*. Les oscillations rendent compte du fait que ce sont les modes proches de la surface de Fermi qui dominent la physique dans le régime dégénéré. Dans l'expression de  $g_2$  on identifie le deuxième terme à la contribution des modes de petites longueur d'onde et le troisième aux modes autour de la longueur d'onde de Fermi. À température non nulle dans le régime dégénéré  $\mu \gg k_B T$ , les effets quantiques se feront sentir à des distances grandes devant  $\lambda_F$  et la physique est dominée par les modes proches du niveau de Fermi. À une dimension on peut alors linéariser le spectre autour des points de Fermi  $\pm k_F$ , en posant  $k = \pm k_F + p$  et en calculant les intégrales à l'ordre le plus bas [71]. Il reste à calculer

$$g_1(x) = e^{ik_F x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{ipx}}{1 + e^{-v_F \beta p}} + e^{-ik_F x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{-ipx}}{1 + e^{-v_F \beta p}}, \quad (\text{II.33})$$

avec  $v_F = \hbar k_F/m$ , la vitesse de Fermi. On trouve finalement

$$g_1(x) = \frac{1}{\beta v_F} \frac{i \sin[k_F x]}{\sin[-ix/(\beta v_F)]}. \quad (\text{II.34})$$

On identifie un crossover entre la décroissance algébrique de l'expression (II.31) pour des distances petites devant la longueur thermique  $v_F \beta$  et une décroissance exponentielle aux distances grandes devant  $v_F \beta$ . À température non-nulle, le quasi-ordre à longue portée est détruit et on retrouve une décroissance exponentielle des corrélations.

Ainsi, une étude simple de quelques propriétés thermodynamiques des gaz quantiques sans interactions et de leurs corrélations permet de mettre en évidence les

---

<sup>8</sup>. À température nulle tous les bosons occupent l'état fondamental, même à 1D, et la question des corrélations est peu intéressante.

grandes différences entre les statistiques fermionique et bosonique. Pour les bosons sans interactions, la physique est largement dominée par les modes de grandes longueur d'onde, ayant comme principal effet d'empêcher la condensation de Bose-Einstein en basse dimension. Au contraire pour les fermions, la physique est dominée par les modes au voisinage de la surface de Fermi, une conséquence du principe d'exclusion de Pauli, avec comme signature principale une décroissance algébrique des fonctions de corrélations à température nulle. Ces quelques concepts de base étant posés, nous pouvons maintenant envisager l'effet des interactions au travers de la thermodynamique et des fonctions de corrélations.

### II.1.3 Effet des interactions, spécificité du cas 1D

#### II.1.3.1 Le cas des fermions

En dimension 2 et 3, un système de fermions en interactions est, sauf cas particuliers, très bien décrit par la théorie de Landau du liquide de Fermi [66]. Celle-ci repose sur le principe de continuité adiabatique entre les états excités d'un gaz en interaction et les états excités, bien connus, du gaz parfait. Cette description ne repose pas sur un calcul perturbatif et est aussi valide pour des interactions très fortes entre particules. Sans rentrer dans les détails de la théorie de Landau ni en donner une justification microscopique, nous rappelons ici les quelques idées-forces nécessaires à la compréhension des spécificités du cas unidimensionnel.

Considérons le Hamiltonien de fermions en interactions suivant,

$$H = \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu \right] \psi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi^\dagger(\mathbf{r}') V_{\text{int}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}), \quad (\text{II.35})$$

On a ici fixé le nombre total moyen de particules dans l'état fondamental, en incluant le potentiel chimique. Le Hamiltonien étant invariant par translation on peut le récrire dans la base des impulsions – en utilisant par exemple (II.7) – selon

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} V_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'}. \quad (\text{II.36})$$

où  $V_{\mathbf{q}}$  désigne la transformée de Fourier du potentiel d'interaction et  $\xi_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu$ . Pour des fermions libres à température nulle, l'état fondamental est la mer de Fermi. Les excitations élémentaires correspondent soit à l'ajout d'une particule ( $p$ ) en sus de la mer de Fermi, soit à la création d'un trou ( $h$ ) dans la mer de Fermi, soit à la création d'une paire particule-trou ( $ph$ ). Ces états excités ont la forme :

$$|(p), \mathbf{k}\rangle_0 = c_{\mathbf{k}}^\dagger |FS\rangle \quad (\text{II.37})$$

$$|(h), -\mathbf{k}\rangle_0 = c_{\mathbf{k}} |FS\rangle \quad (\text{II.38})$$

$$|(ph), \mathbf{k}; \mathbf{k}'\rangle_0 = c_{\mathbf{k}}^\dagger c_{\mathbf{k}'} |FS\rangle, \quad (\text{II.39})$$

où  $|FS\rangle = \prod_{|\mathbf{k}| < k_F} c_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$  désigne la mer de Fermi. Les excitations correspondant à la création d'une particule ou d'un trou ont une impulsion et une énergie bien définies. C'est ce type d'excitations que Landau appelle de manière générale, quasi-particules. Les excitations particule-trou, en dimension  $d \geq 2$ , présentent au contraire un continuum d'énergie, pour une impulsion  $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$  donnée, et ne sont pas en ce sens de bonnes quasi-particules. Pour le gaz de fermions en interactions on s'intéresse alors aux états excités ayant une forme similaire à (II.37) et (II.38), c'est-à-dire

$$|(p), \mathbf{k}\rangle = c_{\mathbf{k}}^\dagger |G\rangle \quad (\text{II.40})$$

$$|(h), -\mathbf{k}\rangle = c_{\mathbf{k}} |G\rangle \quad (\text{II.41})$$

$$(\text{II.42})$$

où  $|G\rangle$  désigne l'état fondamental du système avec interactions, et on cherche à quelles conditions ces états peuvent constituer de bonnes quasi-particules, avec une impulsion et une énergie bien définies. Imaginons que l'on puisse, partant du Hamiltonien (II.36), éteindre progressivement les interactions au cours du temps. Cette opération est décrite par le Hamiltonien suivant :

$$H_\gamma = H_0 + e^{-\gamma t} H_{\text{int}}, \quad (\text{II.43})$$

où  $H_0$  désigne la partie libre, quadratique, de (II.36) et  $H_{\text{int}}$  les interactions. L'hypothèse de Landau est qu'il existe un intervalle de taux de variation  $\gamma$  dans lequel on peut relier adiabatiquement les états excités du système en interactions aux états excités du système libre. Si cette correspondance un-à-un existe, alors la physique du système est bien décrite par des quasi-particules et des quasi-trous définis par (II.40) et (II.41), et qui, à l'équilibre, sont distribuées selon la distribution de Fermi-Dirac [66, 67]. Du point de vue microscopique, ces quasi-particules sont des fermions habillés par les fluctuations de densité qu'ils causent dans leur voisinage, du fait des interactions. Il faut remarquer que si on peut en général associer à la quasi-particule  $|(p), \mathbf{k}\rangle$  une énergie typique,  $\xi_{\mathbf{k}}$ , cet état n'est cependant pas un état propre du Hamiltonien avec interactions. Les quasi-particules ont un temps de vie  $\tau_{\mathbf{k}}$  fini au-delà duquel elles se décomposent en d'autres quasi-particules et quasi-trous. La fenêtre d'adiabaticité correspond alors à un taux de variation petit devant l'énergie  $\xi_{\mathbf{k}}$  d'une quasi-particule, et grand devant son temps de vie  $\tau_{\mathbf{k}}$  [67],

$$\tau_{\mathbf{k}}^{-1} \ll \gamma \ll \xi_{\mathbf{k}} \quad (\text{II.44})$$

Le temps de vie est relié au taux de diffusion  $\Gamma$  entre quasi-particules que l'on peut calculer via la règle d'or de Fermi. Pour un processus de diffusion correspondant à l'exemple de la figure II.2, on a :

$$\Gamma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{k}'-\mathbf{q}; \mathbf{k}, \mathbf{k}'} \propto |\langle \mathbf{k} + \mathbf{q}, \mathbf{k}' - \mathbf{q} | V_{\mathbf{q}} | \mathbf{k}, \mathbf{k}' \rangle|^2 \delta(\xi_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k}'} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}). \quad (\text{II.45})$$

L'élément de matrice impose les contraintes sur les impulsions dues au principe de Pauli. On s'intéresse à la diffusion d'une particule d'impulsion  $\mathbf{k}$  et d'énergie  $\xi_{\mathbf{k}} > 0$ ,

au dessus de la mer de Fermi, avec une autre particule d'impulsion  $\mathbf{k}'$  et d'énergie  $\xi_{\mathbf{k}'}$ , vers l'état final composé de deux particules d'impulsions  $\mathbf{k} + \mathbf{q}$  et  $\mathbf{k}' - \mathbf{q}$  et d'énergie  $\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}$  et  $\xi_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}$ , respectivement. Le moment total est conservé, et, si on considère l'état fondamental, le partenaire de diffusion doit être sous la surface de Fermi, avec  $\xi_{\mathbf{k}'} < 0$ . Le principe de Pauli, impose que les particules diffusées occupent des états en dehors de la mer de Fermi, soit  $\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} > 0$  et  $\xi_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}} > 0$ . Enfin la conservation de l'énergie impose que  $|\xi_{\mathbf{k}'}|$  et  $\xi_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}$ , soient comprises entre 0 et  $\xi_{\mathbf{k}}$ . La taille maximale de l'espace des phases disponible pour la diffusion est donnée par deux coquilles d'épaisseur  $\xi_{\mathbf{k}}$  au-dessus en en-dessous de la surface de Fermi, ce qui donne une borne supérieure pour l'inverse du temps de vie,  $\tau_{\mathbf{k}}^{-1} \leq A\xi_{\mathbf{k}}^2$ . La condition d'adiabaticité devient

$$A\xi_{\mathbf{k}}^2 \ll \gamma \ll \xi_{\mathbf{k}} \quad (\text{II.46})$$

et est d'autant mieux vérifiée que les quasi-particules sont proches de la surface de Fermi<sup>9</sup>. À température non-nulle, les quasi-particules sont localisées sur une tranche d'énergie de largeur  $k_B T$  au voisinage de la surface de Fermi, et on a  $\tau \sim 1/T^2$ .

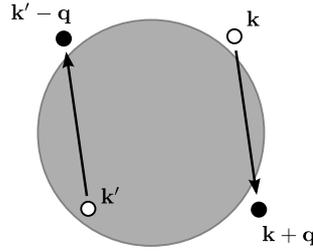


FIGURE II.2: *Processus de diffusion, ici pour  $d = 2$ , au voisinage de la surface de Fermi.*

La théorie de Fermi a ceci de remarquable qu'elle nous apprend que les propriétés d'un gaz de Fermi en interactions sont similaires à celles du gaz sans interactions, à suffisamment basses températures. Les quasi-particules presque libres remplacent les fermions libres et les propriétés thermodynamiques ne sont que marginalement affectées.

À une dimension en revanche, la théorie du liquide de Fermi s'effondre et ne peut servir à décrire un système en interaction. La principale raison est que le calcul du temps de vie à partir de la règle d'or de Fermi conduit à  $\tau_{\mathbf{k}}$  de l'ordre de  $\xi_{\mathbf{k}}$  [67]. À une dimension, les quasi-particules ne sont pas bien définies, au sens où l'élargissement en énergie est toujours de l'ordre de l'énergie moyenne, et ce même dans le voisinage immédiat des points de Fermi. La condition (II.44) n'est jamais vérifiée. De manière heuristique on peut lier ce temps de vie extrêmement court au confinement des fermions à 1D. Le mouvement d'une particule entraîne nécessairement, de proche en

9.  $A \sim |V^2|g(\epsilon_F)^3/L^3$ , avec  $|V^2|$  l'amplitude typique des interactions et  $g(\epsilon_F)$  la densité d'état au niveau de Fermi.

proche, le mouvement de tous les autres particules du système. Toute excitation à une particule se décompose en fluctuations de la densité, c'est-à-dire en excitations particule-trou [67, 36].

Néanmoins on peut montrer que ces excitations particule-trou jouent, à une dimension, un rôle similaire à celui des quasi-particules fermioniques du liquide de Fermi, car elles ont un temps de vie qui diverge au voisinage des points de Fermi. Pour le voir il suffit de rappeler la forme du spectre d'excitations particule-trou. Une telle excitation consiste à prendre une particule d'impulsion  $\mathbf{k}$  sous la surface de Fermi et à l'amener au dessus de la surface de Fermi en lui imprimant une impulsion  $\mathbf{q}$  supplémentaire. Les conditions suivantes doivent être réalisées,

$$|\mathbf{k}| < k_F, \tag{II.47}$$

$$|\mathbf{k} + \mathbf{q}| > k_F, \tag{II.48}$$

et l'énergie de la paire particule-trou, dans le cas d'une boîte homogène, est

$$E_k(q) = \frac{\hbar^2(\mathbf{k} + \mathbf{q})^2}{2m} - \frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m}. \tag{II.49}$$

En dimension  $d > 1$  on peut créer une paire particule-trou d'énergie arbitrairement proche de 0 pour un vecteur  $\mathbf{q}$  tel que  $0 \leq q \leq 2k_F$  en jouant sur les angles pour créer une particule aussi près que nécessaire de la surface de Fermi. On a donc un continuum d'énergies accessibles. À 1D, la surface de Fermi est réduite à deux points et on ne peut créer une paire d'énergie nulle qu'autour d'eux, c'est à dire pour  $q = 0$  et  $q = 2k_F$ , comme le montre la figure II.3.

L'avantage est qu'autour de ces points, les excitations particule-trou ont à la fois un moment,  $q$ , et une énergie bien définie. En effet, l'énergie moyenne est donnée par :

$$E(q) = v_F q, \tag{II.50}$$

et la dispersion moyenne par,

$$\Delta E(q) = q^2/m. \tag{II.51}$$

Près de  $q = 0$ , la dispersion de l'excitation décroît vers 0 beaucoup plus vite que son énergie moyenne. On a donc une excitation dont le temps de vie diverge au voisinage de la surface de Fermi. Au sens de Landau, les quasi-particules à 1D sont donc les excitations particule-trou au voisinage des points de Fermi. Puisqu'elles font intervenir deux fermions, elles sont de natures bosoniques. Pour prendre en compte les interactions, plusieurs stratégies sont possibles. On peut construire une théorie des perturbations, à partir des fermions libres dont on aura linéarisé le spectre autour de la surface de Fermi. Une approche, plus fructueuse par bien des aspects, consiste à récrire le Hamiltonien à l'aide des quasi-particules que sont les excitations particule-trou. Cette approche connue sous le nom de *bosonisation*, permet d'obtenir la théorie

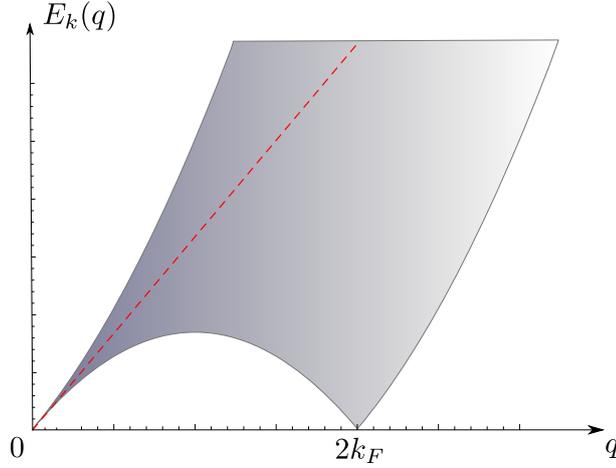


FIGURE II.3: *Spectre d'excitations particule-trou à une dimension. La surface de Fermi est réduite à deux points et on ne peut créer des paires particule-trou d'énergie arbitrairement faible qu'autour de  $q = 0$  et  $q = 2k_F$ . Autour de  $q = 0$ , l'écart quadratique moyen autour de l'énergie moyenne (l'inverse du temps de vie) de l'excitation va comme  $q^2$ , donnant vie à une quasi-particule bien définie.*

de basse énergie de n'importe quel système de fermions à basse dimension et d'en extraire de nombreuses propriétés et notamment les corrélations à longue distance. Cette théorie de basse énergie, dite du *liquide de Luttinger* [34] remplace la théorie du liquide de Fermi à basse dimension. Comme nous le verrons par la suite, c'est la théorie universelle pour toute une classe de système unidimensionnels en interactions, fermions ou bosons.

### II.1.3.2 Le cas des bosons

Comme nous l'avons rappelé dans le paragraphe II.1.2, l'occupation des états d'un gaz de Bose dégénéré dépend largement de la dimension et du potentiel extérieur. Il en va de même pour l'effet des interactions. Dans ce paragraphe, on rappelle brièvement quelques propriétés d'un gaz de Bose en interactions en présence d'un condensat, avant d'étudier son analogue à une dimension.

#### a) Approche de champ moyen

Il n'existe pas a priori d'argument général permettant de démontrer l'existence d'un condensat pour un système quelconque de bosons en interaction. En revanche il existe un théorème en dimension  $d \leq 2$ , affirmant qu'à la limite thermodynamique, aucun condensat ne peut se former à l'équilibre et à température finie dans l'espace libre [64]. Ce théorème, dit de Hohenberg-Mermin-Wagner [72, 73], est valable en présence ou non d'interactions, et quelque soit le signe des interactions à courte

portée éventuelles, confirmant et dépassant les résultats énoncés dans la partie II.1.2 pour le gaz de bosons libres. La raison est qu'il n'y peut pas y avoir d'ordre à longue portée, ici au sens de l'équation (II.29), à température finie en dimension 2, et même à température nulle en dimension 1, à cause des fluctuations thermiques et quantiques de grande longueur d'onde<sup>10</sup>. À trois dimensions – ou à 2D et  $T = 0$  – aucun théorème n'empêche a priori la formation d'un condensat en présence d'interactions et expérimentalement elle a été observée dans plusieurs systèmes<sup>11</sup>.

Comme dans le cas des fermions, la théorie du *liquide de Bose* [66] doit rendre compte à la fois des modifications du fondamental par les interactions et de la nature des excitations. Une première approche, très efficace, consiste à bâtir une théorie de champ moyen, en supposant l'existence d'un condensat. C'est l'approche développée par Bogoliubov, partant du Hamiltonien d'interactions dans l'espace libre,

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_0(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} V_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'}. \quad (\text{II.52})$$

L'approximation de Bogoliubov [74], consiste à séparer l'état fondamental d'impulsions  $\mathbf{k} = 0$ , que l'on suppose occupé par un nombre macroscopique  $N_0 \simeq N$  de particules, et à remplacer les opérateurs création et annihilation  $a_0^\dagger$  et  $a_0$  par un nombre,  $\sqrt{N_0}$ . En effet les fluctuations du nombre d'occupation du fondamental étant négligeables devant  $N_0$ , on peut considérer que ces deux opérateurs commutent. Une fois ce remplacement fait, il est possible de diagonaliser le Hamiltonien, et les quasi-particules libres ainsi obtenues ont le spectre suivant,

$$\varepsilon(\mathbf{q}) = \sqrt{\varepsilon_0(\mathbf{q})(\varepsilon_0(\mathbf{q}) + 2\rho g)}, \quad (\text{II.53})$$

pour une interaction entre particules  $g$  ponctuelle (c'est-à-dire ici  $V_{\mathbf{q}} = g$  quelque soit  $\mathbf{q}$ ). Dans la limite  $g \rightarrow 0$ , le spectre est linéaire et caractéristique d'excitations sonores. Les quasi-particules de Bogoliubov sont les modes de phonons du condensat. Cette approche dans l'espace des impulsions, n'est pas forcément adaptée au cas d'un potentiel de confinement inhomogène, où il est plus commode de travailler dans l'espace réel. Dans ce cas, une autre approche de champ moyen consiste à remplacer  $\psi(\mathbf{r}, t)$ , par la fonction du condensat  $\psi_0(\mathbf{r}, t)$  dans l'équation du mouvement. On obtient alors l'équation de Gross-Pitaevskii dont la solution permet par exemple de décrire le profil de densité du condensat dans un piège harmonique. La prise en compte des fluctuations de densité autour du condensat permet de décrire les excitations<sup>12</sup>. Bien sûr toutes ces approches s'effondrent à une dimension, à cause des fluctuations de grande longueur d'onde. Il existe cependant une autre approche, élaborée par

---

10. Un exemple de l'importance des modes infrarouges en dimension 1 est donné à l'équation (II.22)

11. Par diffusion de neutrons dans l'Helium 4, et par des mesures de temps de vol dans les gaz alcalins.

12. On obtient alors les équations de Bogoliubov-de Gennes.

Popov [75], permettant de décrire un gaz de bosons 1D dans la limite d'interactions faibles. Pour ce faire, il est nécessaire d'adopter une approche hydrodynamique en séparant les fluctuations de la phase et les fluctuations de densité. On écrit donc

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\rho(\mathbf{r}, t)} e^{-i\theta(\mathbf{r}, t)}, \quad (\text{II.54})$$

où  $\rho(\mathbf{r}, t) = \psi^\dagger(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t)$  est la densité locale et  $\theta(\mathbf{r}, t)$  la phase quantique. L'approche de Popov, basée sur les méthodes de l'intégrale fonctionnelle, permet en intégrant progressivement les modes ultra-violet – dans l'esprit du groupe de Renormalisation – d'établir par exemple la forme de la matrice densité à une particule définie en (II.25). En particulier, pour des interactions ponctuelles assez faibles, Popov trouve à température nulle [75, 35]

$$g_1(x) = \rho \left( \frac{1.037\xi}{x} \right)^\alpha, \quad (\text{II.55})$$

où  $\xi = \sqrt{mg\rho_0}$  est la longueur de cicatrisation [69] et  $\alpha = \sqrt{mg/\rho_0}/(2\pi)$  dépend de la force des interactions. Ce résultat remarquable nous indique qu'à une dimension l'ordre à longue portée est détruit par les interactions provoquant des fluctuations de la phase à grande distance. Néanmoins l'ordre n'est pas détruit exponentiellement,  $g_1(x)$  décroissant algébriquement. On parle alors de quasi-ordre à longue portée. Ce résultat est à rapprocher de celui obtenu pour les fermions libres en (II.31). À une dimension, bosons et fermions sont en fait décrits par une même théorie de basse énergie, la théorie du liquide de Luttinger, introduite pour les fermions au paragraphe précédent et caractérisée par une décroissance algébrique des corrélations à longue portée. Avant de décrire en détail cette théorie, nous nous attardons sur un dernier exemple illustrant la difficulté d'identifier de manière précise les effets de la statistique à une dimension.

### b) Modèle de Lieb-Liniger ; cas des interactions de cœur dur

Le modèle de Lieb-Liniger est un modèle de bosons dans le continu avec des interactions ponctuelles et répulsives ( $g \geq 0$ ),

$$H = \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu \right] \psi(\mathbf{r}) + \frac{g}{2} \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi^\dagger(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}). \quad (\text{II.56})$$

C'est un modèle exactement soluble par ansatz de Bethe [76, 77], c'est-à-dire qu'il est possible de calculer son spectre d'énergies et les fonctions d'ondes des états propres. Nous reviendrons sur l'utilité de cette solution exacte lorsque nous décrirons la théorie du liquide de Luttinger. Dans ce paragraphe on s'intéresse simplement à la limite de Tonks-Girardeau, où les interactions entre particules sont infinies,  $g \rightarrow \infty$ . La conséquence principale est qu'il est impossible que deux bosons de cœur dur se

trouvent à un même point de l'espace. La contrainte de cœur dur simule le principe de Pauli dans l'espace réel et le caractère 1D empêche les bosons de se déplacer les uns autour des autres. Par conséquent les fonctions d'onde de fermions et de bosons de cœur dur à 1D seront identiques à un facteur de symétrisation près. En effet si  $\Psi_F(x_1, \dots, x_N)$  est une solution de l'équation de Schrödinger pour un gaz de  $N$  fermions, satisfaisant la contrainte  $\Psi_F(x_1, \dots, x_N) = 0$  dès que  $x_i = x_j$  pour tout  $i$  et  $j$ , alors  $\Psi_B(x_1, \dots, x_N) = A(x_1, \dots, x_N)\Psi_F(x_1, \dots, x_N)$  est aussi une solution de l'équation de Schrödinger pour un gaz 1D de  $N$  bosons de cœur dur, avec  $A = \prod_{i>j} \text{Sign}(x_i - x_j)$ , une fonction antisymétrique prenant seulement les valeurs  $\pm 1$ . [78] Il apparaît clairement que  $|\Psi_F(x_1, \dots, x_N)|^2 = |\Psi_B(x_1, \dots, x_N)|^2$ , de telle sorte que toute quantité dépendant uniquement du module de la fonction d'onde est identique pour des fermions et des bosons de cœur dur. Comme l'a remarqué Girardeau, [78, 79] cette correspondance un-à-un entre les fonctions d'onde bosonique et fermionique n'est possible qu'à une dimension. La contrainte de cœur dur divise l'espace des paramètres en  $N!$  régions disjointes, et  $A$  change de signe de manière discontinue à la frontière de chaque région. À deux et trois dimensions, l'espace des paramètres reste connecté et une fonction équivalente à  $A$  ne peut pas être définie. Pour décrire un gaz de Tonks-Girardeau on parle souvent de fermionisation. Cela se traduit notamment au niveau des corrélations de densité qui deviennent [80]

$$g_2(x) = \rho^2 - \frac{1}{2\pi^2 x^2} + \frac{\cos(2\pi\rho x)}{2\pi x^2}. \quad (\text{II.57})$$

En revanche, la matrice densité à une particule est très différente. Elle dépend directement de la distribution des impulsions, et dans ce cas les effets de la statistique se font sentir. On trouve, pour des distances  $x \gg \rho^{-1}$ ,

$$g_1(x) \simeq \rho \left( \frac{1}{\rho x} \right)^{1/2}, \quad (\text{II.58})$$

ce qui correspond à une distribution des impulsions en loi de puissance,  $\langle n_k \rangle \propto k^{-1/2}$ , pour  $k \ll \rho$ . On retrouve une distribution piquée autour du fondamental, mais avec une décroissance algébrique caractéristique de la dimension 1, et de l'augmentation de l'effet des fluctuations quantiques. On parle aussi ici de quasi-condensat ou de quasi-ordre à longue portée.

Ainsi, à une dimension les effets de la statistique sont quelque peu effacés par les interactions. Les fermions sont mieux décrits par des fluctuations de densité de nature bosonique, alors que les bosons de cœur dur se comportent comme des fermions lorsque l'on s'intéresse à la densité ou aux corrélations de densité, tout en conservant des propriétés bosoniques au niveau de la distribution des impulsions.

## II.2 Approche du fluide harmonique

Dans la première partie de ce chapitre nous avons mis en évidence quelques unes des spécificités des liquides quantiques unidimensionnels. Outre l'augmentation des effets des fluctuations quantiques due au confinement transverse, une conséquence flagrante de la dimension réduite est que la notion de statistique – bosons versus fermions – devient floue. Les quasi-particules du gaz de fermions sont de nature bosonique alors que les bosons de cœur dur exhibent un comportement fermionique au niveau des corrélations de densité. Ces fortes similitudes trouvent leur origine dans l'impossibilité à une dimension de tester la symétrie de la fonction d'onde du problème à  $N$  corps sans amener deux particules en contact rapproché : les effets de la statistique et des interactions sont nécessairement fortement corrélés [34]. Plus généralement, tout système unidimensionnel présentant un spectre d'excitations sans gap et linéaire à basse énergie<sup>13</sup> est décrit par une même théorie effective de bosons libres décrivant des fluctuations de densité harmoniques. Autrement dit, tous ces modèles sont décrits par la même classe d'universalité, celle du liquide de Luttinger. Ce résultat très fort a été formalisé pour la première fois par Haldane [34], et repose essentiellement sur la séparation des fluctuations de phase et de densité d'un liquide quantique unidimensionnel. Dans le cas des bosons c'est le prolongement de l'approche hydrodynamique de Popov, pour des interactions quelconques.

### II.2.1 Représentation phase-densité

Pour relier l'opérateur création – ou l'opérateur annihilation – aux fluctuations de densité, Haldane part de la relation suivante,

$$\psi(x) = \sqrt{\rho(x)}e^{-i\theta(x)}, \quad (\text{II.59})$$

sans présager du caractère bosonique ou fermionique de la particule pour l'instant. À une dimension, les particules se déplacent sur une ligne et il existe toujours une fonction croissante permettant de relier de manière univoque l'opérateur densité  $\rho(x) = \sum_{\ell} \delta(x - x_{\ell})$  aux positions  $x_{\ell}$  de toutes les particules. On appelle  $\varphi(x)$  cette fonction, et la seule contrainte qu'on lui impose est d'augmenter par incréments de  $2\pi$ , à chaque fois que  $x$  traverse la position d'une des particules,  $\varphi(x_{\ell}) = 2\pi\ell$ . On peut exprimer  $\rho$  en fonction de  $\varphi$  de la façon suivante [36],

$$\rho(x) = \sum_n |\nabla\varphi(x)| \delta(\varphi(x) - 2\pi n), \quad (\text{II.60})$$

avec  $n$  un entier. En utilisant la formule de Poisson il vient

$$\rho(x) = \frac{\nabla\varphi(x)}{2\pi} \sum_p e^{ip\varphi(x)}. \quad (\text{II.61})$$

---

13. C'est le cas du modèle de fermions étudié en II.1.3.1, du modèle de Lieb-Liniger [35], mais aussi de la chaîne de spin 1/2 [81].

Il est alors commode d'introduire un champ auxiliaire  $\phi(x)$ , mesurant l'écart par rapport à une position hypothétique où les particules sont espacées d'exactly la distance inter-particule moyenne  $\rho_0^{-1}$ , c'est-à-dire  $\varphi(x) = 2\pi\rho_0x - 2\phi(x)$ .  $\phi(x)$  est un champ qui varie lentement, c'est-à-dire sur des distances grandes par rapport à  $\rho_0^{-1}$ . L'opérateur densité, exprimé en fonction de  $\phi$  s'écrit finalement

$$\rho(x) = \left[ \rho_0 - \frac{1}{\pi} \nabla \phi(x) \right] \sum_p e^{i2p[\pi\rho_0x - \phi(x)]}. \quad (\text{II.62})$$

Cette écriture permet de décomposer les fluctuations de densité en plusieurs modes de vecteur d'onde différents. Si on moyenne la densité sur des distances grande devant la distance inter-particule moyenne, les termes oscillants disparaissent et il ne reste que la densité lissée  $\rho(x) \simeq \rho_0 - \nabla\phi(x)/\pi$ , correspondant aux fluctuations de petit vecteur d'onde  $q \sim 0$ . Au contraire les termes oscillants correspondent aux modes  $q = 2\pi\rho_0$ , ainsi qu'à toutes les autres harmoniques paires. Pour les bosons, la relation de commutation  $[\psi(x), \psi^\dagger(x')] = \delta(x - x')$  implique [36, 34, 35]

$$[\rho(x), e^{-i\theta(x')}] = \delta(x - x')e^{-i\theta(x')}. \quad (\text{II.63})$$

Pour la densité lissée, une condition suffisante pour satisfaire cette relation de commutation est :

$$\left[ \frac{1}{\pi} \nabla \phi(x), \theta(x') \right] = -i\delta(x - x'), \quad (\text{II.64})$$

ou, alternativement  $[\frac{1}{\pi} \nabla \theta(x), \phi(x')] = i\delta(x - x')$ . Dans la limite de basse énergie, où les fluctuations ont lieu sur des distances grandes devant  $\rho_0^{-1}$ , les termes oscillants de la densité ne sont pas important pour satisfaire (II.63) et on peut considérer que les champs  $\phi$  et  $\theta$  doivent effectivement vérifier la relation (II.64). On peut d'ores et déjà noter que les champs  $\nabla\phi/\pi$  et  $\theta$  sont canoniquement conjugués et que les fluctuations de densité et de phase sont fortement liées à une dimension. Il reste à écrire l'opérateur création en fonction de  $\phi$ . Pour les bosons, on trouve, à un facteur multiplicatif dépendant de la structure ultra-violette près,

$$\psi(x) = \left[ \rho_0 - \frac{1}{\pi} \nabla \phi(x) \right]^{1/2} \sum_p e^{i2p[\pi\rho_0x - \phi(x)]} e^{-i\theta(x)}. \quad (\text{II.65})$$

L'opérateur fermionique s'obtient en multipliant  $\psi(x)$  par  $e^{i[2\pi\rho_0x - 2\phi(x)]}$ , assurant que l'opérateur ainsi construit satisfait les relations d'anti-commutation des fermions<sup>14</sup>

$$\psi_f(x) = \left[ \rho_0 - \frac{1}{\pi} \nabla \phi(x) \right]^{1/2} \sum_p e^{i(2p+1)[\pi\rho_0x - \phi(x)]} e^{-i\theta(x)}. \quad (\text{II.66})$$

14.  $2\pi\rho_0x - 2\phi(x)$  est en quelque sorte l'analogie de la chaîne de Jordan-Wigner [82].

## II.2.2 Hamiltonien de basse énergie

Une fois connues ces représentations de la densité et des opérateurs création et annihilation, il reste à obtenir la forme du Hamiltonien d'un système de particules en interactions, en fonction de  $\phi$  et  $\theta$ . On ne s'intéresse pas à un modèle microscopique particulier, et on peut montrer que le Hamiltonien effectif de tout système 1D présentant à basse énergie un spectre linéaire d'excitations et sans gap est de la forme :

$$H = \frac{\hbar}{2\pi} \int dx [v_J(\nabla\theta)^2 + v_N(\nabla\phi)^2], \quad (\text{II.67})$$

avec  $\pi(x) = \nabla\theta(x)/\pi$  le moment conjugué de  $\phi(x)$ . C'est le Hamiltonien d'une chaîne d'oscillateurs harmoniques, à la limite continue. Dans ce contexte, il est connu sous le nom de Hamiltonien de Luttinger. Les termes  $v_N$  et  $v_J$  sont homogènes à des vitesses et dépendent des détails microscopiques du système, en particulier de la force des interactions. Ils déterminent toutes les propriétés de basse énergie et contrôlent notamment les corrélations à longue distance. La plupart du temps on utilisera deux paramètres alternatifs  $u$  et  $K$  définis par  $u = \sqrt{v_N v_J}$  et  $K = \sqrt{v_J/v_N}$ . Dans ce cas, le Hamiltonien s'écrit :

$$H = \frac{\hbar u}{2\pi} \int dx \left[ K(\nabla\theta)^2 + \frac{1}{K}(\nabla\phi)^2 \right]. \quad (\text{II.68})$$

On écrit aussi la forme effective de l'opérateur impulsion  $\hat{P}$  du système, donné par

$$\hat{P} = \frac{\hbar}{2i} \int dx [\psi^\dagger(x)\nabla\psi(x) - \nabla\psi^\dagger(x)\psi(x)], \quad (\text{II.69})$$

et qui devient dans ce contexte

$$\hat{P} = \frac{\hbar}{2\pi} \int dx \nabla\varphi(x)\nabla\theta(x), \quad (\text{II.70})$$

où on rappelle que  $\varphi(x) = 2\pi\rho_0 x - 2\phi(x)$ . Connaissant la forme effective du Hamiltonien on peut écrire la décomposition des champs  $\phi$  et  $\theta$  en modes propres. Ces modes propres sont les excitations bosoniques typiques de la chaîne d'oscillateurs harmoniques – c'est-à-dire les fluctuations de densité, ou encore, les excitations particule-trou. Dans cette décomposition il est nécessaire de séparer le mode de vecteur d'onde  $q = 0$ , correspondant à un mouvement de translation du centre de masse du système. En effet, ce mode est essentiellement lié aux excitations topologiques du système et est lui aussi quantifié pour un système de taille finie  $L$ . Les excitations topologiques sont de deux types [34, 35]. Tout d'abord d'après l'expression de la densité lissée,  $\rho(x) \simeq \rho_0 - \nabla\phi(x)/\pi$ , on a nécessairement

$$\phi(L) - \phi(0) = \pi(N_0 - \hat{N}), \quad (\text{II.71})$$

où on a posé  $N_0 = \rho_0 L$ , et ici  $\hat{N}$  est l'opérateur comptant le nombre de particules. De plus si on impose des conditions aux limites périodiques,  $\psi(x + L) = \psi(x)$ , on a une condition supplémentaire,  $\theta(x + L) = \theta(x) + \pi \hat{J}$ , avec  $\hat{J}$  un opérateur ayant pour valeurs propres des entiers pairs. La décomposition en modes propres s'écrit alors [34, 35]

$$\phi(x) = \hat{\phi}_0 - (\hat{N} - N_0) \frac{\pi x}{L} + \sum_{q \neq 0} \left( \frac{\pi K}{2L|q|} \right)^{1/2} e^{-a|q|/2} [b_q e^{-iqx} + b_q^\dagger e^{iqx}], \quad (\text{II.72})$$

$$\theta(x) = \hat{\theta}_0 + J \frac{\pi x}{L} + \sum_{q \neq 0} \left( \frac{\pi}{2KL|q|} \right)^{1/2} e^{-a|q|/2} \text{sign}(q) [b_q e^{-iqx} + b_q^\dagger e^{iqx}]. \quad (\text{II.73})$$

On a introduit un cut-off ultra-violet, afin de restreindre la somme sur  $q$  à des valeurs  $\leq \rho_0^{-1}$ .  $\hat{\phi}_0$  et  $\hat{\theta}_0$  sont les opérateurs conjugués de  $\hat{J}$  et  $\hat{N}$  respectivement. Le Hamiltonien s'écrit alors [34],

$$H = \sum_{q \neq 0} \hbar \omega(q) b_q^\dagger b_q + \frac{\hbar \pi u}{2LK} (\hat{N} - N_0)^2 + \frac{\hbar \pi u K}{2L} \hat{J}^2, \quad (\text{II.74})$$

avec  $\omega(q) \rightarrow u|q|$  pour  $q \rightarrow 0$ . De même pour l'opérateur impulsion on trouve :

$$\hat{P} = \frac{\hbar \pi}{L} \hat{N} \hat{J} + \sum_{q \neq 0} \hbar q b_q^\dagger b_q. \quad (\text{II.75})$$

Le nombre quantique  $J$  est alors associé à des courants conservés dans le système. Par exemple, l'excitation d'un fermion d'un point à l'autre de la surface de Fermi, correspond à  $N = N_0$  et  $J = \pm 2$ , ce qui fait bien une impulsion totale  $P = \pm 2\pi\rho_0 = \pm 2k_F$  [35, 34]. De l'expression de  $H$  on tire plusieurs relations thermodynamiques importantes. La première est que la compressibilité isentropique du système,  $\kappa^{-1} = \rho_0^2 \left( \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0}$ , est liée au paramètre  $v_N$  selon

$$\kappa^{-1} = \rho^2 L \left[ \frac{\partial^2 E_0(N)}{\partial N^2} \right]_{N=N_0} = \pi v_N \rho^2 = \frac{\pi u}{K} \rho^2. \quad (\text{II.76})$$

De même,  $v_J$  est lié à la réponse du système à une modification des conditions aux limites périodiques. Si on impose,  $\psi(x + L) = e^{-i\alpha} \psi(x)$  avec  $\alpha \neq 0$ , l'opérateur  $\hat{J}$  est modifié de telle sorte que  $\hat{J} \rightarrow \hat{J} + \alpha/\pi$ . L'énergie du fondamental est modifiée, ainsi que l'impulsion du système. Le résultat net est l'apparition de courants persistants.  $v_J$  mesure la modification de l'énergie du fondamental suite à cette modification des conditions aux limites selon

$$v_J = \pi L \left[ \frac{\partial^2 E_0(\alpha)}{\partial \alpha^2} \right]_{\alpha=0} = uK. \quad (\text{II.77})$$

Les deux relations (II.76) et (II.77) sont très importantes car si on a un moyen de calculer analytiquement ou numériquement la réponse de l'énergie du fondamental à un changement du nombre de particules ou à une modification des conditions aux limites périodiques, pour un modèle microscopique donné, on a alors un moyen de déterminer  $u$  et  $K$  exactement quelque soit la force des interactions. En particulier pour le modèle de Lieb-Liniger de l'équation (II.56), le paramètre de Luttinger  $K$  est une fonction décroissante du paramètre d'interaction adimensionné  $\gamma = mg/(\hbar^2 \rho_0)$ , avec  $K \rightarrow \infty$  lorsque  $\gamma \rightarrow 0$  et  $K \rightarrow 1$  dans la limite de Tonks  $\gamma \rightarrow +\infty$ . Pour des fermions (sans spin) libres,  $K = 1$ , faisant ainsi le lien avec les bosons de cœur dur à 1D,  $K > 1$  pour des interactions attractives et  $K < 1$  pour des interactions répulsives.

### II.2.3 Fonctions de corrélation

La forme quadratique du Hamiltonien de Luttinger (II.68) permet de calculer aisément le comportement à longue distance ( $x \gg \rho_0^{-1}$ ) des fonctions de corrélation  $g_1$  et  $g_2$ , soit en utilisant la décomposition en modes propres des champs  $\phi$  et  $\theta$ , soit en utilisant les méthodes de l'intégrale de chemin. Les corrélations de densité,  $g_2$  ne font intervenir que le champ  $\phi$  et la forme générale du résultat ne dépend pas de la statistique. Elles se décomposent en une somme de termes correspondants aux différentes harmoniques  $q = 0, \pm 2\pi\rho_0, \dots$  dans les fluctuations de densité,

$$g_2(x) = \rho_0^2 + \frac{1}{\pi^2} \langle \nabla \phi(x) \nabla \phi(0) \rangle + \rho_0^2 \sum_{p \neq 0} e^{i2p\pi\rho_0 x} \langle e^{i2p\phi(x)} e^{-i2p\phi(0)} \rangle. \quad (\text{II.78})$$

Le calcul des différents corrélateurs conduit à [34]

$$g_2(x) = \rho_0^2 - \frac{K}{2\pi^2} \frac{1}{x^2} + \rho_0^2 \sum_{p>0} A_p \cos(2p\pi\rho_0 x) \left(\frac{a}{x}\right)^{2p^2 K}, \quad (\text{II.79})$$

dans la limite thermodynamique  $L \rightarrow \infty$ . De nouveau,  $a$  est un cut-off courte distance ( $\sim \rho_0^{-1}$ ) et les coefficients  $A_p$  ne sont pas universels mais dépendent de la structure microscopique, tout comme  $K$ . En particulier pour les fermions libres,  $K = 1$ ,  $a = \rho_0^{-2}$ ,  $A_p = \delta_{p,1}$  et on retrouve l'expression (II.32) calculée exactement. Pour les bosons, on remarque qu'à mesure que  $K$  augmente (les interactions décroissent) les fluctuations de densité sont atténuées à longue distance, en analogie avec le cas d'un condensat en dimension supérieure [80]. Pour la matrice densité à une particule, le résultat dépend fortement de la statistique, d'après les équations (II.65) et (II.66). On trouve [34]

$$g_1(x) = \rho_0 \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{2K}} \sum_{p \geq 0} B_p \cos[2p\pi\rho_0 x] \left(\frac{a}{x}\right)^{2p^2 K}, \quad (\text{II.80})$$

pour les bosons et

$$g_1(x) = \rho_0 \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{2K}} \sum_{p \geq 0} F_p \sin[2(p + 1/2)\pi\rho_0 x] \left(\frac{a}{x}\right)^{2(p+1/2)^2 K} \quad (\text{II.81})$$

pour les fermions. Ici aussi, les  $B_p$  et  $F_p$  sont des coefficients non-universels. Encore une fois pour les fermions libres,  $K = 1$ ,  $F_p = \delta_{p,0}$  et on retrouve le résultat exact de l'équation (II.31).

## II.3 Cas d'un mélange Bose-Fermi unidimensionnel

Dans cette section on s'intéresse au cas d'un mélange unidimensionnel de particules d'espèces différentes et plus particulièrement au cas d'un mélange d'une espèce fermionique et d'une espèce bosonique. Ce système a été largement étudié dans la littérature à l'aide de différentes techniques analytiques [83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 59] et numériques [91, 92, 93, 94, 95]. La motivation de ces travaux est essentiellement la réalisation expérimentale – à 3D jusqu'à maintenant – de tels mélanges dans les expériences d'atomes froids piégés optiquement [15, 96, 97, 98, 99, 100, 101]. Après avoir établi le Hamiltonien microscopique 1D d'un mélange Bose-Fermi découlant de conditions expérimentales usuelles, nous l'écrirons sous une forme *bosonisée*, c'est-à-dire dans l'approximation du fluide harmonique. L'étude des corrélations à longue portée permet d'établir un diagramme de phase pour le système et nous envisagerons les possibles instabilités du liquide de Luttinger, dans différents régimes de paramètres.

### II.3.1 Modèle et paramètres microscopiques

Considérons le Hamiltonien d'un gaz atomique composé d'un mélange de deux espèces, piégé dans un réseau optique (comme par exemple dans [97, 101]). Une des espèces est un fermion, l'autre un boson. Le Hamiltonien  $H$  se décompose comme

$H = H_f + H_b + H_{bf} + H_{\text{ext}}$ , avec

$$H_f = \int d\mathbf{r} \psi_f^\dagger(\mathbf{r}) \left[ -\frac{\hbar^2}{2M_f} \Delta - \mu_f \right] \psi_f(\mathbf{r}), \quad (\text{II.82})$$

$$\begin{aligned} H_b &= \int d\mathbf{r} \psi_b^\dagger(\mathbf{r}) \left[ -\frac{\hbar^2}{2M_b} \Delta - \mu_b \right] \psi_b(\mathbf{r}) \\ &+ \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \psi_b^\dagger(\mathbf{r}) \psi_b^\dagger(\mathbf{r}') V_{\text{int}}^{bb}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi_b(\mathbf{r}') \psi_b(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (\text{II.83})$$

$$H_{bf} = \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \rho_b(\mathbf{r}) V_{\text{int}}^{bf}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho_f(\mathbf{r}'), \quad (\text{II.84})$$

$$H_{\text{ext}} = \int d\mathbf{r} [V_f(\mathbf{r}) \rho_f(x) + V_b(\mathbf{r}) \rho_b(x)]. \quad (\text{II.85})$$

C'est un Hamiltonien tri-dimensionnel et plusieurs étapes sont nécessaires pour le réduire à un Hamiltonien 1D. Dans les gaz alcalins, les atomes sont neutres et les interactions sont principalement de type van der Waals, allant comme  $-C_6/r^6$  à grande distance, avec  $C_6$  un coefficient microscopique. Le rayon d'action typique de l'interaction est  $r_0 = (2m_r C_6/\hbar^2)^{1/4}$ , où  $m_r$  est la masse réduite du problème à deux corps. Dans les expériences actuelles, où la dilution peut être importante,  $r_0$  est très faible devant la distance inter-particule  $\rho_0^{-1}$ . Dans le régime dégénéré caractérisé par (II.1), les états quantiques occupés – caractérisé par l'impulsion  $\mathbf{k}$  – vérifient  $k r_0 \ll 1$ . En appliquant cette prescription à la particule réduite du problème de diffusion, on trouve que les particules doivent s'approcher à une distance  $r \ll k^{-1}$  pour ressentir les effets de l'interaction [64]. Hors pour deux atomes dans un état de moment angulaire  $\ell \neq 0$ , la probabilité de s'approcher à cette distance va comme  $(kr)^{2\ell}$ ; autrement dit elle est très faible dans le régime ultra-froid et seule la diffusion dans l'onde  $s$  est possible [64]. Cela a pour conséquence que deux fermions polarisés de spin, ne pouvant être dans un état  $s$  à cause du principe de Pauli, n'interagissent pas dans le régime ultra-froid, d'où la forme de  $H_f$ . Les potentiels d'interaction boson-boson (BB) et boson-fermion (BF) sont eux caractérisés par une seule longueur, la longueur de diffusion dans l'onde  $s$ , que l'on notera  $a_{bb}$  dans le cas BB et  $a_{bf}$  dans le cas BF. De plus il est possible de remplacer l'interaction de van der Waals par une interaction effective, ponctuelle qui prend la forme [2, 64]

$$V_{\text{int}}^{bb}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi\hbar^2 a_{bb}}{M_b} \delta(\mathbf{r}) \equiv V_{bb} \delta(\mathbf{r}) \quad (\text{II.86})$$

dans le cas BB et la forme

$$V_{\text{int}}^{bf}(\mathbf{r}) = \frac{2\pi\hbar^2 a_{bf}}{M_{bf}} \delta(\mathbf{r}) \equiv V_{bf} \delta(\mathbf{r}) \quad (\text{II.87})$$

dans le cas BF, où on a introduit la masse réduite  $M_{bf}^{-1} = M_b^{-1} + M_f^{-1}$ . Notez que les paramètres  $V_{bb}$  et  $V_{bf}$  ainsi définis ont la dimension Énergie  $\times$  Longueur<sup>3</sup>.

Le potentiel extérieur est typiquement un réseau optique, créé par la superposition de trois paires de faisceaux contra-propageant, auquel s'ajoute un confinement harmonique global, que l'on néglige par la suite. L'intensité du champ électrique s'écrit alors

$$I(x, y, z) = I_x \sin^2(k_L x) + I_y \sin^2(k_L y) + I_z \sin^2(k_L z). \quad (\text{II.88})$$

où  $k_L = 2\pi/\lambda_L$  est le vecteur d'onde du laser.<sup>15</sup> Le potentiel ressenti par les atomes est proportionnel à l'intensité et dépend de leur polarisabilités respectives. On notera  $V_f = \alpha_f I$  et  $V_b = \alpha_b I$  le potentiel ressenti par chaque composante du mélange. En augmentant fortement l'intensité dans deux directions il est possible de créer un réseau de tubes quasi-1D. En pratique, le potentiel extérieur pour chaque espèce s'écrit :

$$V_j(x, y, z) = V_{j,0} \sin^2(k_L x) + V_{j,\perp} [\sin^2(k_L y) + \sin^2(k_L z)], \quad (\text{II.89})$$

avec  $j = f, b$ , et  $V_{j,\perp} \ll V_{j,0}$ . On peut aussi prendre  $V_{j,0} = 0$  et étudier le problème quasi-1D dans le continu. Si le confinement transverse est assez fort, l'énergie de saut tunnel entre deux tubes peut devenir extrêmement petite, selon  $J \sim e^{-2\sqrt{V_\perp}}$  [2]. Pour des expériences ayant lieu sur des durées petites devant  $J^{-1}$ , le couplage tunnel entre les tubes est négligeable [102]. Dans chaque tube, la physique est vraiment unidimensionnel si les degrés de liberté transverses sont confinés à l'état fondamental du potentiel de piégeage. Pour la suite on approxime le confinement transverse par un potentiel harmonique,  $V_{j,\perp}(y, z) = 1/2M_j\omega_{\perp,j}^2(y^2 + z^2)$ , avec  $\omega_{\perp,j} = \sqrt{2k_L^2 V_{j,\perp}/M_j}$ . Il est commode d'exprimer les énergies en unité des énergies de recul,  $E_{R,j} = \hbar^2 k_L^2 / (2M_j)$ . Dans ce cas on a

$$\hbar\omega_{\perp,j} = 2E_{R,j} \sqrt{\tilde{V}_{j,\perp}}, \quad (\text{II.90})$$

avec  $\tilde{V}_{j,\perp} = V_{j,\perp}/E_{R,j}$ . Considérons pour le moment le cas sans interaction inter-espèces. Le régime 1D est atteint pour les bosons si  $\mu_b, k_B T \ll \hbar\omega_{\perp,b}$  [7, 2], avec  $\mu_b = V_{bb}\rho_b$ . De même pour les fermions, le régime 1D est atteint pour  $E_F^{1d}, k_B T \ll \hbar\omega_{\perp,f}$  [10, 2]. Typiquement, en présence d'un confinement harmonique longitudinal supplémentaire,  $E_F^{1d} = N_F \hbar\omega_0$  et on a une condition sur le nombre de fermions dans le piège,  $N_F \ll \omega_{\perp,f}/\omega_0$ . En ajoutant les interactions BF, les potentiels chimiques sont renormalisés. En faisant l'hypothèse d'une densité homogène des atomes, on a par exemple  $\mu_b = V_{bb}\rho_b + V_{bf}\rho_f$ . D'une manière générale, pour des paramètres d'interaction fixés, il faut des densités relativement faibles pour atteindre le régime 1D. Une fois ce régime atteint, il reste à comparer la longueur de diffusion 3D – ici  $a_{bb}$  ou  $a_{bf}$  – à la taille typique de confinement transverse. Pour l'interaction BB, la taille pertinente est donnée par  $\ell_{\perp,b} = \sqrt{\hbar/(M_b\omega_{\perp,b})}$ . Si  $a_{bb} \ll \ell_{\perp,b}$  alors l'interaction

15. Pour simplifier on prend la même longueur d'onde dans les trois directions.

effective à 1D est obtenue à partir de l'interaction 3D en intégrant les fonctions d'ondes transverses. On trouve alors comme nouveau paramètre d'interaction BB [103, 10, 2]

$$U_b = 2\hbar\omega_{\perp,b}a_{bb} \text{ pour } a_{bb} \ll \ell_{\perp,b}. \quad (\text{II.91})$$

En suivant le même raisonnement on trouve pour les interactions BF

$$U_{bf} = 2\hbar \frac{1}{M_r} \frac{M_f\omega_{\perp,f}M_b\omega_{\perp,b}}{M_f\omega_{\perp,f} + M_b\omega_{\perp,b}} a_{bf} \text{ pour } a_{bf} \ll \sqrt{\ell_{\perp,b}\ell_{\perp,f}}. \quad (\text{II.92})$$

La partie cinétique du Hamiltonien étant séparable on peut aussi intégrer sur les fonctions d'onde transverse et on trouve finalement pour le Hamiltonien 1D,  $H = H_f + H_b + H_{bf}$ ,

$$H_f = \int dx \psi_f^\dagger(x) \left[ -\frac{\hbar^2}{2M_f} \frac{d^2}{dx^2} - \mu_f \right] \psi_f(x), \quad (\text{II.93})$$

$$H_b = \int dx \psi_b^\dagger(x) \left[ -\frac{\hbar^2}{2M_b} \frac{d^2}{dx^2} - \mu_b \right] \psi_b(x) \\ + \frac{U_{bb}}{2} \int dx \psi_b^\dagger(x)\psi_b^\dagger(x)\psi_b(x)\psi_b(x), \quad (\text{II.94})$$

$$H_{bf} = U_{bf} \int dx \rho_b(x)\rho_f(x). \quad (\text{II.95})$$

Notez qu'à ce stade il est nécessaire d'introduire les densités unidimensionnelles, définies en fonction des densités tridimensionnelles par  $\rho_{f,1} = \ell_{\perp,f}^2\rho_f$  et  $\rho_{b,1} = \ell_{\perp,b}^2\rho_b$ . À partir de maintenant, on ne s'intéressera plus qu'au modèle 1D défini ci-dessus. Afin de ne pas alourdir les notations, on notera  $\rho_f$  et  $\rho_b$  les densités 1D. <sup>16</sup>

### II.3.2 Hamiltonien de basse énergie

Dans cette section nous employons l'approche du fluide harmonique pour étudier les propriétés de basse énergie du mélange Bose-Fermi à 1D. Cette démarche a été suivie dans plusieurs travaux [83, 84, 88, 87, 90] et nous en reproduisons ici les principales étapes. Le système étant un mélange à deux composantes, il est nécessaire d'introduire deux paires de champs,  $(\phi_f, \theta_f)$  et  $(\phi_b, \theta_b)$ , afin de décrire la dynamique des fluctuations de densité et de phase selon les équations (II.62), (II.65) et (II.66). Ces champs vérifient les relations de commutation suivantes

$$[\phi_\alpha(x), \nabla\theta_\beta(x')] = i\pi\delta_{\alpha\beta}\delta(x - x'). \quad (\text{II.96})$$

---

16. Par la suite les densité  $\rho_f$  et  $\rho_b$  sont donc homogènes à l'inverse d'une longueur. Les paramètres d'interactions  $g_{bb}$  et  $U_{bf}$  ont eux pour dimension Énergie× Longueur.

Le Hamiltonien exact, décomposé dans la base de ces deux paires de champs, fait a priori intervenir une infinité de termes. On cherche dans un premier temps l'expression du Hamiltonien de basse énergie pour lequel seuls quelques termes sont dominants. Dans ce but, il est instructif de diagonaliser  $H_b$  et  $H_f$  dans la base des excitations particule-trou, soit

$$H_f = \sum_{q \neq 0} \hbar \omega_f(q) b_q^\dagger b_q + \frac{\hbar \pi v_f}{2L K_f} (\hat{N}_f - N_{f,0})^2 + \frac{\hbar \pi v_f K_f}{2L} \hat{J}_f^2, \quad (\text{II.97})$$

$$H_b = \sum_{q \neq 0} \hbar \omega_b(q) \beta_q^\dagger \beta_q + \frac{\hbar \pi v_b}{2L K_b} (\hat{N}_b - N_{b,0})^2 + \frac{\hbar \pi v_b K_b}{2L} \hat{J}_b^2. \quad (\text{II.98})$$

On rappelle également le développement des champs  $\phi_f$  et  $\phi_b$  dans la base de ces excitations :

$$\phi_f(x) = \hat{\phi}_{f,0} - (\hat{N}_f - N_{f,0}) \frac{\pi x}{L} + \sum_{q \neq 0} \sqrt{\frac{\pi K_f}{2L}} \frac{e^{-|q|/\Lambda_f}}{|q|^{1/2}} [b_q e^{-iqx} + b_q^\dagger e^{iqx}], \quad (\text{II.99})$$

$$\phi_b(x) = \hat{\phi}_{b,0} - (\hat{N}_b - N_{b,0}) \frac{\pi x}{L} + \sum_{q \neq 0} \sqrt{\frac{\pi K_b}{2L}} \frac{e^{-|q|/\Lambda_b}}{|q|^{1/2}} [\beta_q e^{-iqx} + \beta_q^\dagger e^{iqx}]. \quad (\text{II.100})$$

Les sommes sur les impulsions  $q$  sont restreintes à des valeurs plus petites que  $\Lambda_f$  pour les fermions et  $\Lambda_b$  pour les bosons. Ce sont deux cut-offs ultra-violet de l'ordre de la distance inter-particules moyenne,  $\Lambda_f \sim \rho_f^{-1}$  et  $\Lambda_b \sim \rho_b^{-1}$ . Le terme d'interaction Bose-Fermi peut se décomposer sur la base des  $b, b^\dagger, \hat{N}_f, \hat{J}_f$  et  $\beta, \beta^\dagger, \hat{N}_b, \hat{J}_b$ , après avoir récrit  $H_{bf}$  en termes des champs  $(\phi_f, \theta_f)$  et  $(\phi_b, \theta_b)$ . En effet, la forme suivante

$$\begin{aligned} H_{bf} = & U_{bf} \int dx [\rho_f - \frac{1}{\pi} \nabla \phi_f(x)] [\rho_b - \frac{1}{\pi} \nabla \phi_b(x)] + \\ & + U_{bf} \int dx [\rho_b - \frac{1}{\pi} \nabla \phi_b(x)] [\rho_f - \frac{1}{\pi} \nabla \phi_f(x)] (e^{i[2\pi \rho_f x - 2\phi_f(x)]} + e^{-i[2\pi \rho_f x - 2\phi_f(x)]}) \\ & + U_{bf} \int dx [\rho_f - \frac{1}{\pi} \nabla \phi_f(x)] [\rho_b - \frac{1}{\pi} \nabla \phi_b(x)] (e^{i[2\pi \rho_b x - 2\phi_b(x)]} + e^{-i[2\pi \rho_b x - 2\phi_b(x)]}) \\ & + U_{bf} \int dx [\rho_b - \frac{1}{\pi} \nabla \phi_b(x)] (e^{i[2\pi \rho_b x - 2\phi_b(x)]} + e^{-i[2\pi \rho_b x - 2\phi_b(x)]}) \times \\ & \quad \times [\rho_f - \frac{1}{\pi} \nabla \phi_f(x)] (e^{i[2\pi \rho_f x - 2\phi_f(x)]} + e^{-i[2\pi \rho_f x - 2\phi_f(x)]}) \\ & + \dots, \end{aligned} \quad (\text{II.101})$$

permet d'identifier les processus de diffusions pertinents pour la théorie de basse énergie. En particulier il apparait un terme quadratique de la forme  $\nabla \phi_f \nabla \phi_b$  couplant

les fluctuations de densité de grande longueur d'onde. Le Hamiltonien de basse énergie se décompose alors en une partie quadratique, s'écrivant de manière générale [90]

$$H_0 = \frac{\hbar}{2\pi} \sum_{\alpha,\beta=f,b} \int dx [M_{\alpha\beta} \nabla\theta_\alpha(x) \nabla\theta_\beta(x) + N_{\alpha\beta} \nabla\phi_\alpha(x) \nabla\phi_\beta(x)], \quad (\text{II.102})$$

et d'une partie non quadratique générée par le termes suivant dans II.101. On peut généraliser les arguments thermodynamiques énoncés en II.2.2 pour déterminer les coefficients  $M_{\alpha\beta}$  et  $N_{\alpha\beta}$  du Hamiltonien quadratique. La réponse du système à un changement du nombre de particules est donné par [90]

$$N_{\alpha\beta} = \frac{L}{\pi} \left[ \frac{\partial^2 E_0}{\partial N_\alpha \partial N_\beta} \right]_{N_\alpha=N_{\alpha,0}, N_\beta=N_{\beta,0}, \lambda_\alpha=\lambda_\beta=0}, \quad (\text{II.103})$$

avec  $E_0$  l'énergie de l'état fondamental. La réponse à un changement des conditions aux limites périodiques,  $\psi_f(x+L) = e^{-i\lambda_f} \psi_f(x)$ ,  $\psi_b(x+L) = e^{-i\lambda_b} \psi_b(x)$  est quant à elle donnée par

$$M_{\alpha\beta} = \pi L \left[ \frac{\partial^2 E_0}{\partial \lambda_\alpha \partial \lambda_\beta} \right]_{N_\alpha=N_{\alpha,0}, N_\beta=N_{\beta,0}, \lambda_\alpha=\lambda_\beta=0}. \quad (\text{II.104})$$

La première ligne de (II.101) développée selon (II.99) et (II.100) contribue un terme

$$U_{bf} \frac{1}{L} \hat{N}_f \hat{N}_b \quad (\text{II.105})$$

au Hamiltonien. Au premier ordre de la théorie des perturbations, à l'énergie de l'état fondamental s'ajoute  $\Delta E = U_{bf} N_f N_b / L$  et selon (II.103) on trouve

$$N_{fb} = N_{bf} = \frac{U_{bf}}{\pi}. \quad (\text{II.106})$$

À cet ordre, tous les autres termes sont nuls ou disparaissent à la limite thermodynamique. Les opérateurs courants n'apparaissent pas explicitement dans  $H_{bf}$  et  $M_{fb} = M_{bf} = 0$ . Les autres paramètres sont donnés par  $N_{ff} = v_f / K_f$ ,  $M_{ff} = v_f K_f$  et  $N_{bb} = v_b / K_b$ ,  $M_{bb} = v_b K_b$ , avec  $v_f = \pi \rho_f / M_f$  la vitesse de Fermi,  $K_f = 1$  pour des fermions sans interactions et  $v_b$  et  $K_b$  donné par la solution exacte du modèle de Lieb-Liniger. Le Hamiltonien quadratique s'écrit alors

$$H_0 = \sum_{\alpha=f,b} \frac{\hbar}{2\pi} \int dx \left[ v_\alpha K_\alpha [\nabla\theta_\alpha(x)]^2 + \frac{v_\alpha}{K_\alpha} [\nabla\phi_\alpha(x)]^2 \right] + \frac{U_{bf}}{\pi^2} \int dx \nabla\phi_f(x) \nabla\phi_b(x). \quad (\text{II.107})$$

Pour déterminer le domaine de validité ce Hamiltonien au premier ordre, il convient de comparer la perturbation  $\Delta E$  à l'énergie de l'état fondamental non perturbé,

$E_0^{(0)} = N_f \frac{\hbar^2 \rho_f^2}{2M_f} \frac{\pi^2}{3} + N_b \rho_b^2 e(\gamma)$ , où  $e(\gamma)$  est une fonction sans dimension obtenue à partir de la solution exacte du problème de Lieb-Liniger [76], croissant comme  $\gamma$  pour les faibles interactions et saturant à  $\pi^2/3$  dans la limite de cœur dur. La théorie de perturbation au premier ordre n'est vraiment justifiée que si,  $\Delta E \ll E_0^{(0)}$ , c'est-à-dire,

$$U_{bf} \rho_f \rho_b \ll \frac{\hbar^2 \rho_f^3}{2M_f} \frac{\pi^2}{3} + \rho_b^3 e(\gamma). \quad (\text{II.108})$$

Dans la limite des bosons de cœur dur, cette expression devient simplement

$$g \ll \frac{1}{6} \left[ \sqrt{\frac{M_b}{M_f}} \left( \frac{\rho_f}{\rho_b} \right)^{3/2} + \sqrt{\frac{M_f}{M_b}} \left( \frac{\rho_f}{\rho_b} \right)^{3/2} \right], \quad (\text{II.109})$$

où on a introduit le paramètre sans dimension  $g = \frac{U_{bf}}{\pi \hbar^2} \sqrt{\frac{K_f K_b}{v_f v_b}}$ . La figure II.4 représente une estimation du domaine de validité de la théorie de perturbation au premier ordre, pour un rapport de masse donné. La condition (II.109) est d'autant mieux vérifiée que le mélange est déséquilibré en densité. Néanmoins en augmentant la masse d'une des composantes – ou du moins sa masse effective en utilisant par exemple un réseau optique dans la direction longitudinale [5] – cette condition peut-être favorablement réalisée dans des régimes de densités plus équilibrées.

À l'ordre suivant en perturbation, ces paramètres seront renormalisés par des termes d'ordres  $U_{bf}^2$ . Par exemple, du terme de la deuxième ligne dans (II.101), on tire entre autres

$$U_{bf} \int_0^L dx \left( \frac{\pi K_b}{2L} \right)^{1/2} \sum_{q \neq 0} \frac{e^{-|q|/\Lambda_b}}{\pi |q|^{1/2}} \nabla [\beta_q e^{-iqx} + \beta_q^\dagger e^{iqx}] \frac{\hat{N}_f}{L} \times \\ [e^{i[2\pi \rho_f x - 2\phi_f(x)]} + e^{-i[2\pi \rho_f x - 2\phi_f(x)]}], \quad (\text{II.110})$$

que l'on note  $H_{bf}^{(1)}$ . C'est un opérateur qui, agissant sur l'état fondamental crée plusieurs états excités et ne contribue donc pas au premier ordre en perturbation. Il contribue cependant à l'ordre suivant en renormalisant à la fois  $N_{ff}$  – car c'est un terme proportionnel à  $N_f^2$  – et  $M_{ff}$ , car l'opérateur  $e^{i2\phi_f(x)}$  crée des courants dans le système. Il est à noter que dans  $H_{bf}^{(1)}$ , seuls les éléments de la somme avec  $q = \pm 2\pi \rho_f$  contribuent au Hamiltonien à la limite thermodynamique. Ils décrivent la rétrodiffusion d'un fermion sur un phonon – une fluctuation de densité – du gaz de bosons. Un tel processus n'est possible à basse énergie que si  $\Lambda_b \gg 2k_F$ , c'est à dire si la rétrodiffusion des fermions correspond en fait à un processus de grande longueur d'onde pour les bosons. En pratique le cut-off  $\Lambda_b$  est donné par  $\hbar v_b \Lambda_b = \mu_b$ , où  $\mu_b$  est le potentiel chimique des bosons.  $\Lambda_b$  varie alors fortement avec les interactions

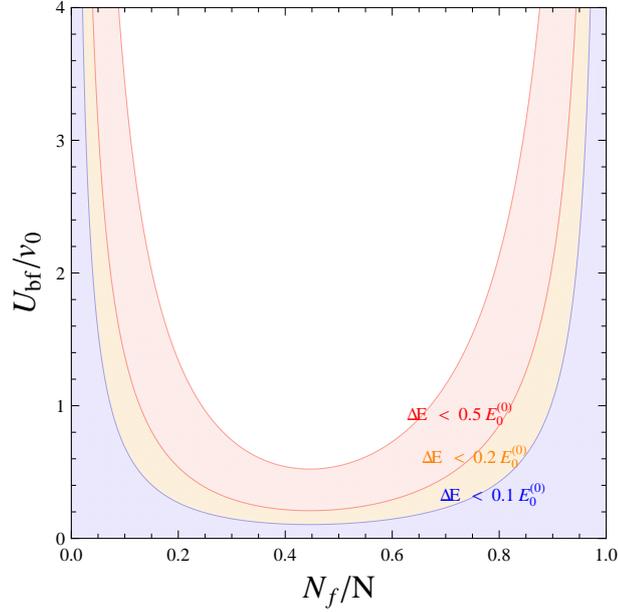


FIGURE II.4: Estimation du domaine de validité de la théorie de perturbation au premier ordre, en fonction du paramètre d'interaction  $U_{bf}$ , normalisé par la vitesse moyenne  $v_0 = (v_f + v_b)/2$  et de la proportion de particule fermioniques,  $N_f/N$ , où  $N$  est le nombre totale de particules. On a choisit,  $M_b = 2M_f$ , qui est le rapport de masse du mélange  $^{87}\text{Rb} - ^{40}\text{K}$ . Les zones colorées représentent les régions de l'espace des paramètres pour lesquels  $\Delta E < 0.1E_0^{(0)}$  (bleu),  $\Delta E < 0.2E_0^{(0)}$  (orange),  $\Delta E < 0.5E_0^{(0)}$  (rouge).

bosoniques, de  $\Lambda_b \rightarrow \xi_h^{-1} = \gamma^{1/2}\rho_b$  pour les faibles interactions à  $\Lambda_b \rightarrow \pi\rho_b/2$  dans la limite des bosons de cœur dur [35]. À interactions bosoniques fixées, on voit qu'il est nécessaire d'être dans un régime où  $\rho_b \gg \rho_f$ . Si cette condition est remplie il est possible d'intégrer les phonons d'impulsion  $\pm 2k_F$  [84, 88] au niveau de la fonction de partition, générant ainsi une interaction effective retardée pour les fermions. Cette approche généralise des travaux antérieurs sur la rétrodiffusion des électrons sur les phonons de grandes impulsions, dans les conducteurs 1D [104, 105, 106]. Si de plus la vitesse  $v_b$  des phonons est très grande devant la vitesse de Fermi  $v_f$ , l'interaction générée est quasi-instantanée. Pour des fermions sans spin, ce type d'interaction est en fait équivalent à un processus de diffusion vers l'avant – c'est-à-dire autour des points de Fermi – et répulsif [36]. Le Hamiltonien quadratique est modifié de la façon

suivante, [84, 88]

$$\begin{aligned}
 H_0 = & \sum_{\alpha=f,b} \frac{1}{2\pi} \int dx \left[ v_\alpha K_\alpha [\nabla \theta_\alpha(x)]^2 + \frac{v_\alpha}{K_\alpha} [\nabla \phi_\alpha(x)]^2 \right] + \\
 & \frac{U_{bf}}{\pi^2} \int dx \nabla \phi_f(x) \nabla \phi_b(x) \\
 & + \frac{2G}{2\pi} \int dx ([\nabla \phi_f(x)]^2 - [\nabla \theta_f(x)]^2), \tag{II.111}
 \end{aligned}$$

à l'ordre le plus bas en  $G$ , où  $G = \frac{U_{bf}^2 K_b}{4\pi^2 v_b}$ . Les termes additionnels conduisent à une renormalisation conjointe de  $N_{ff}$  et  $M_{ff}$  dans  $H_0$ . En effet ils sont absorbés en définissant de nouveaux paramètres de Luttinger pour les fermions tels que  $\tilde{v}_f = v_f(1 - 4G^2/v_f^2)^{1/2}$  et  $\tilde{K}_f = (1 - 2G/v_f)^{1/2}/(1 + 2G/v_f)^{1/2}$ , en se rappelant que  $K_f = 1$ . Notons que  $\tilde{K}_f < 1$ , confirmant que l'interaction effective générée par les phonons bosoniques à  $2k_F$  est répulsive.

À la troisième ligne de (II.101) on trouve un terme analogue qui contribuerait dans la limite opposée où  $\rho_f \gg \rho_b$  et  $v_f \gg v_b$  et renormaliserait les paramètres de Luttinger bosoniques,  $v_b$  et  $K_b$ . Les lignes suivantes contiennent en revanche plusieurs termes non quadratiques. Par exemple on trouve, [83]

$$U_{bf} \rho_f \rho_b \int_0^L dx \cos[2\pi(\rho_f - \rho_b)x + 2\phi_f(x) - 2\phi_b(x)] + \dots, \tag{II.112}$$

où ici n'apparaît explicitement que le terme correspondant aux harmoniques les plus basses. À nouveau ce terme décrit un processus de rétro-diffusion pour les fermions, mais dans un régime de densité complètement différent. En effet si  $\rho_f \neq \rho_b$  l'intégrande oscille rapidement et ce terme disparaît du Hamiltonien à la limite thermodynamique. Au contraire si  $\rho_f = \rho_b$ , ce terme doit être conservé et peut modifier considérablement la physique – en favorisant la formation de paires de particules pour des interactions attractives – comme nous le verrons dans une prochaine section.

Avant cela, ajoutons qu'il est possible de diagonaliser le Hamiltonien quadratique  $H_0$  de l'équation (II.107) et ainsi obtenir deux modes normaux,  $(\phi_\pm, \theta_\pm)$  correspondant à deux types d'excitations sonores ayant pour spectre  $\omega_\pm = v_\pm |q|$ . [83] Pourvu que les deux vitesses soient réelles, l'état fondamental du Hamiltonien  $H_0$  est un liquide de Luttinger à deux composantes. On a

$$v_\pm^2 = \frac{1}{2}(v_f^2 + v_b^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(v_f^2 - v_b^2)^2 + 4g^2 v_f^2 v_b^2}, \tag{II.113}$$

avec  $g = U_{bf}/\pi\sqrt{K_f K_b/(v_f v_b)}$ , un paramètre sans dimension. Les règles de transformation entre  $(\phi_f, \phi_b)$  et  $(\phi_+, \phi_-)$  s'écrivent  $\phi_f = f_+ \phi_+ + f_- \phi_-$ ,  $\phi_b = b_+ \phi_+ + b_- \phi_-$  et

les coefficients sont définis comme

$$f_+ = \sqrt{\frac{K_f v_f}{v_+}} \sin(\delta), \quad f_- = \sqrt{\frac{K_f v_f}{v_-}} \cos(\delta), \quad (\text{II.114})$$

$$b_+ = \sqrt{\frac{K_b v_b}{v_+}} \cos(\delta), \quad b_- = -\sqrt{\frac{K_b v_b}{v_-}} \sin(\delta). \quad (\text{II.115})$$

L'angle de rotation  $\delta$  est donné par :

$$\cos(2\delta) = \frac{v_b^2 - v_f^2}{v_+^2 - v_-^2}, \quad (\text{II.116})$$

$$\sin(2\delta) = \frac{2g v_f v_b}{v_+^2 - v_-^2}. \quad (\text{II.117})$$

Une transformation analogue relie  $(\theta_f, \theta_b)$  à  $(\theta_+, \theta_-)$  selon  $\theta_f = \bar{f}_+ \theta_+ + \bar{f}_- \theta_-$  et  $\theta_b = \bar{b}_+ \theta_+ + \bar{b}_- \theta_-$ . Les coefficients pour cette transformation sont

$$\bar{f}_+ = \sqrt{\frac{v_+}{K_f v_f}} \sin(\delta), \quad \bar{f}_- = \sqrt{\frac{v_-}{K_f v_f}} \cos(\delta), \quad (\text{II.118})$$

$$\bar{b}_+ = \sqrt{\frac{v_+}{K_b v_b}} \cos(\delta), \quad \bar{b}_- = -\sqrt{\frac{v_-}{K_b v_b}} \sin(\delta). \quad (\text{II.119})$$

On peut vérifier que lorsque  $U_{bf} = 0$  alors

$$\left. \begin{array}{l} f_+ = \sqrt{K_f}, \quad f_- = 0, \\ b_+ = \sqrt{K_b}, \quad b_- = 0, \\ v_+ = v_f, \quad v_- = v_b \end{array} \right\} \text{ si } v_f > v_b, \quad (\text{II.120})$$

et

$$\left. \begin{array}{l} f_+ = 0, \quad f_- = \sqrt{K_f}, \\ b_+ = 0, \quad b_- = \sqrt{K_b}, \\ v_+ = v_b, \quad v_- = v_f \end{array} \right\} \text{ si } v_b > v_f. \quad (\text{II.121})$$

D'après (II.113), le liquide de Luttinger est stable si  $v_+^2 v_-^2 > 0$ , soit  $|g| < 1$ . Pour  $|g| > 1$ , une instabilité vers le collapse  $-U_{bf} < 0$  ou la séparation de phase  $-U_{bf} > 0$  se développe [83, 84, 90].

### II.3.3 Corrélations et diagramme de phase

Une des caractéristiques principales des systèmes unidimensionnels est la décroissance algébrique des fonctions de corrélations. Les fonctions  $g_1$  et  $g_2$  calculées à la section précédente sont deux exemples de ce comportement, mais le calcul d'autres fonctions de corrélations conduit au même type de décroissance. En dimension  $d > 1$

pour caractériser une phase à la limite thermodynamique, on cherche un ordre à longue portée dans une fonction de corrélation associée au paramètre d'ordre de la phase en question. Par exemple, pour la phase supraconducteur d'un gaz de fermions, caractérisée par la formation de paires de Cooper, on cherche un ordre à longue portée dans la fonction  $\langle O_{FP}(\mathbf{r})O_{FP}^\dagger(0) \rangle$  avec  $O_{FP}(\mathbf{r}) = \psi_\uparrow(\mathbf{r})\psi_\downarrow(\mathbf{r})$ , le paramètre d'ordre associé à la formation d'une paire de fermions de spins opposés. Dans le cas 1D, pour des fermions sans spin, on cherche plutôt un appariement dans l'onde  $p$  entre deux fermions de chiralités différentes,  $O_{FP}(x) = \psi_R(x)\psi_L(x)$ . Dans ce cas on trouve

$$\langle O_{FP}(x)O_{FP}^\dagger(0) \rangle \simeq \rho_f \langle e^{2i\theta_f(x)} e^{-2i\theta_f(0)} \rangle \simeq \rho_f \left( \frac{a}{|x|} \right)^{2/K_f}, \quad (\text{II.122})$$

décroissant aussi algébriquement. Dans la phase liquide de Luttinger il n'y a jamais d'ordre à longue portée. Pour déterminer un diagramme de phase, il faut comparer les fonctions de corrélations de tous les paramètres d'ordre possibles. Les corrélations décroissant le moins vite à longue portée déterminent le quasi-ordre dominant. Dans le cas des fermions sans spin, pour des interactions attractives  $K > 1$  et les corrélations de paires décroissent moins vite que les corrélations liées à l'onde de densité à  $q = 2\pi\rho_0$ , allant comme  $x^{-2K}$ . L'inverse se produit pour des interactions répulsives, pour lesquelles  $K < 1$ . Pour le mélange Bose-Fermi les mêmes arguments conduisent à établir un diagramme des phases en fonction des différents paramètres. En effet, en utilisant la décomposition en modes propres il est possible de calculer les fonctions de corrélations pour les quelques paramètres d'ordre pertinents.

Il convient néanmoins de déterminer les modes dominants dans le système. Pour cela on est amené à calculer les fonctions de Green à une particule des fermions, des bosons, et d'un certain nombre de particules composites [84, 88, 91]. Dans le cas précédent où une des densités est très grande devant l'autre, par exemple  $\rho_b \gg \rho_f$  comme dans la référence [88], les fermions se déplacent en entraînant avec eux un nuage de particules bosoniques si les interactions sont attractives ou de trous si les interactions sont répulsives. On est alors amené à considérer un opérateur composite – un polaron – de la forme,

$$\tilde{\Psi}_f^\dagger(x) = e^{-i\nu_b\theta_b(x)}\Psi_f^\dagger(x), \quad (\text{II.123})$$

avec  $\nu_b > 0$  pour des interactions répulsives et  $\nu_b < 0$  pour des interactions attractives, et la fonction de Green associée,

$$G_{\tilde{F}}(x) = \langle \tilde{\Psi}_f(x)\tilde{\Psi}_f^\dagger(0) \rangle, \quad (\text{II.124})$$

en plus des fonctions de Green fermioniques et bosoniques usuelles,

$$G_F(x) = \langle \Psi_f(x)\Psi_f^\dagger(0) \rangle, \quad (\text{II.125})$$

$$G_B(x) = \langle \Psi_b(x)\Psi_b^\dagger(0) \rangle. \quad (\text{II.126})$$

Les modes ayant la fonction de Green décroissant le plus lentement sont, a priori, les modes pertinents du système et il est nécessaire de chercher à construire les paramètres d'ordre à partir d'eux. Le paramètre  $\nu_b$ , qui détermine la taille typique du nuage de particules entourant un fermion, peut être considéré comme un paramètre variationnel et calculé de sorte à minimiser la décroissance de  $G_{\tilde{F}(x)}$ . Il dépend donc de la force des interactions  $U_{bf}$ . Notez que l'on pourrait aussi définir un opérateur bosonique composite – un boson entouré d'un nuage de fermions ou de trous – selon  $\tilde{\Psi}_b^\dagger(x) = e^{-i\nu_f\theta_f(x)}\Psi_b(x)$ , mais dans le régime fortement déséquilibré  $\rho_b \gg \rho_f$ , le paramètre optimal  $\nu_f$  est proche de 0 et  $\tilde{\Psi}_b^\dagger(x)$  se confond avec  $\Psi_b^\dagger(x)$ . Pour des régimes de densités similaires, on peut être amené à considérer les deux types de particules composites.

Laissons de côté les polarons pour l'instant et concentrons-nous sur les instabilités des particules nues. Au sein du liquide de Luttinger à deux composantes, quatre instabilités sont en compétition : une onde de densité de fermions à  $q = 2\pi\rho_f$  (FDW), l'appariement de fermions dans l'onde  $p$  (FP), une onde de densité de bosons à  $q = 2\pi\rho_b$  (BDW), et la superfluidité des bosons (SF). Les paramètres d'ordre correspondants s'écrivent  $O_{FDW}(x) = \psi_{f,R}^\dagger(x)\psi_{f,L}(x) = e^{2i\phi_f(x)}$ ,  $O_{FP}(x) = \psi_{f,R}(x)\psi_{f,L}(x) = e^{2i\theta_f(x)}$  et  $O_{BDW}(x) = e^{i2\phi_b(x)}$ ,  $O_{SF}(x) = \psi_b(x) = e^{i\theta_b(x)}$ . On trouve pour les fermions

$$\langle O_{FDW}(x)O_{FDW}^\dagger(0) \rangle \sim \left( \frac{\alpha}{|x|} \right)^{2f_+^2+2f_-^2}, \quad (\text{II.127})$$

$$\langle O_{FP}(x)O_{FP}^\dagger(0) \rangle \sim \left( \frac{\alpha}{|x|} \right)^{2\bar{f}_+^2+2\bar{f}_-^2}, \quad (\text{II.128})$$

$$(\text{II.129})$$

avec

$$f_+^2 + f_-^2 = \frac{K_f}{\sqrt{1-g^2}} \frac{1+t\sqrt{1-g^2}}{\sqrt{1+2t\sqrt{1-g^2}+t^2}}, \quad (\text{II.130})$$

$$\bar{f}_+^2 + \bar{f}_-^2 = \frac{1}{K_f} \frac{t + \sqrt{1-g^2}}{\sqrt{1+2t\sqrt{1-g^2}+t^2}}, \quad (\text{II.131})$$

où on a introduit le rapport des vitesses  $t = v_f/v_b$ . Pour tout  $t$  et  $|g| < 1$ ,  $f_+^2 + f_-^2 > K_f$  et  $\bar{f}_+^2 + \bar{f}_-^2 < 1/K_f$ . Ainsi, même en ayant au départ des fermions sans interaction avec  $K = 1$ , les corrélations de paires dominent toujours sur les corrélations de densité, grâce aux interactions Bose-Fermi. L'effet de ces interactions est de créer une nouvelle interaction attractive entre fermions. La situation est tout à fait similaire à celle d'électrons dans un métal, pour lesquels le couplage aux phonons du réseau cristallin résulte en une attraction effective. Une analyse similaire pour les bosons, où les fluctuations de densité sont en compétition avec la formation du quasi-condensat

et la superfluidité, conduit aux résultats suivants,

$$\langle O_{BDW}(x)O_{BDW}^\dagger(0) \rangle \sim \left( \frac{\alpha}{|x|} \right)^{2b_+^2+2b_-^2}, \quad (\text{II.132})$$

$$\langle O_{SF}(x)O_{SF}^\dagger(0) \rangle \sim \left( \frac{\alpha}{|x|} \right)^{\frac{1}{2}\bar{b}_+^2+\frac{1}{2}\bar{b}_-^2}, \quad (\text{II.133})$$

avec

$$b_+^2 + b_-^2 = \frac{K_b}{\sqrt{1-g^2}} \frac{t + \sqrt{1-g^2}}{\sqrt{1+2t\sqrt{1-g^2}+t^2}}, \quad (\text{II.134})$$

$$\bar{b}_+^2 + \bar{b}_-^2 = \frac{1}{K_b} \frac{1 + t\sqrt{1-g^2}}{\sqrt{1+2t\sqrt{1-g^2}+t^2}}. \quad (\text{II.135})$$

Comme pour les fermions,  $b_+^2 + b_-^2 > K_b$  et  $\bar{b}_+^2 + \bar{b}_-^2 < 1/K_b$ . La superfluidité est favorisée par les interactions Bose-Fermi, qui créent également une interaction attractive effective venant écranter la répulsion intrinsèque entre bosons. Le mécanisme est spécifique au cas 1D, où les bosons diffusent sur les phonons – les excitations particule-trou – du gaz de fermions. Pour plus de clarté, on a représenté sur les figures II.6 et II.5 la variation des exposants des corrélations de densité et des corrélations superfluides, normalisés par les paramètres de Luttinger  $K_f$  et  $K_b$ , en faisant varier certains paramètres. On choisit comme paramètres indépendants,  $K_b$ ,  $v_f/v_b$  et  $U_{bf}/v_0$ , avec  $v_0 = (v_f + v_b)/2$ .  $K_f$  est a priori fixé à 1 pour des fermions sans interactions, mais on peut aussi imaginer avoir  $K_f < 1$ , en intégrant la rétrodiffusion sur les phonons à  $2k_F$  quand  $\rho_f \ll \rho_b$ . La variation des exposants représentés sur les graphes est la variation relative, provoquée par les fluctuations de grandes longueurs d'onde uniquement à travers le terme  $\nabla\phi_f\nabla\phi_b$  dans le Hamiltonien. Expérimentalement,  $K_b$  et  $v_b$  varient conjointement, mais  $U_{bf}$  peut-être contrôlé indépendamment grâce à l'utilisation d'une résonance de Feshbach par exemple. Enfin, une fois les interactions bosoniques fixées,  $v_f/v_b$  dépend essentiellement du rapport des densités des deux espèces. Sur les figure II.6 et II.5, il apparaît que les corrélations de densité sont fortement atténuées et que les corrélations superfluides sont fortement augmentées pour l'espèce la plus lente, ici l'espèce avec la plus petite densité (on a pris  $M_f = M_b$ ).

Avant de passer à l'étude de certaines instabilités du liquide de Luttinger à deux composantes, revenons sur les résultats présentés en [84, 87], et faisant état d'une renormalisation de  $K_f$  et  $v_f$  dans le cas où la rétrodiffusion des fermions sur les phonons est importante. Ces effets et ceux présentés ci-dessus sont opposés. La rétrodiffusion s'accompagne d'une interaction effective répulsive qui a tendance à favoriser la formation d'une onde de densité à  $2k_F$ , alors que la diffusion aux petits moments crée au contraire une interaction effective attractive, favorisant les corrélations superfluides. En fonction de la force des interactions BF on peut passer d'une phase où

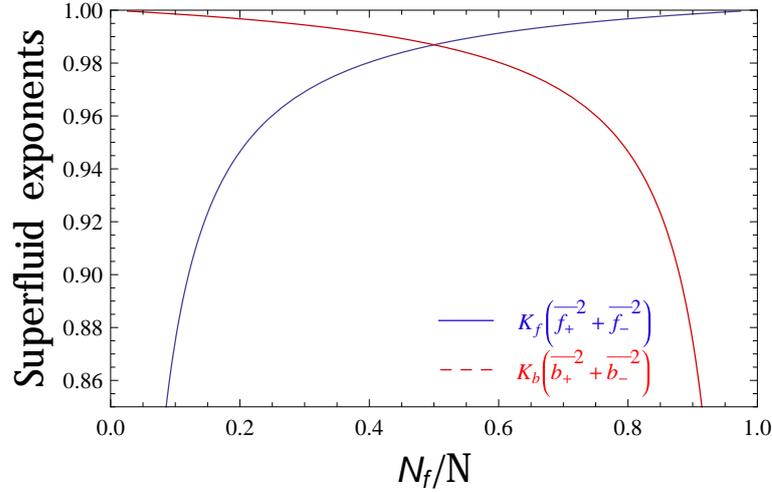


FIGURE II.5: *Exposants des corrélations superfluides pour  $K_b = 1$  et  $U_{bf}/v_0 = 1$ , avec  $v_0 = (v_f + v_b)/2$ , en bleu continu pour les fermions et en rouge pointillé pour les bosons, en fonction du nombre de fermions. On a fixé  $M_f = M_b$ , de telle sorte que  $U_{bf}/v_0$  reste constant, quelque soit  $N_f/N$ .*

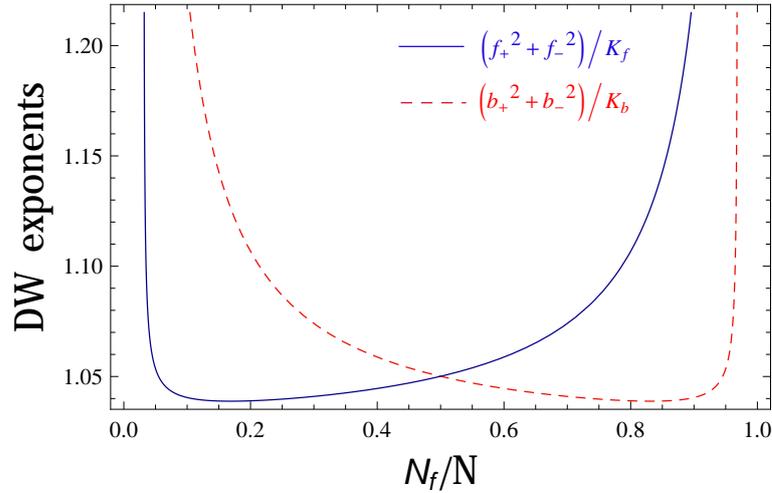


FIGURE II.6: *Exposants des corrélations de densité pour  $K_b = 1$  et  $U_{bf}/v_0 = 1$ , avec  $v_0 = (v_f + v_b)/2$ , en bleu continu pour les fermions et en rouge pointillé pour les bosons, en fonction du nombre de fermions. On a fixé  $M_f = M_b$ , de telle sorte que  $U_{bf}/v_0$  reste constant, quelque soit  $N_f/N$ . Les corrélations de densité sont largement atténuées – l'exposant augmenté – pour l'espèce la plus lente, correspondant ici à l'espèce avec la plus faible densité.*

les corrélations de densité sont dominantes à une phase où les corrélations superfluides dominent. Néanmoins, il peut exister une petite région de paramètres où

aucune des deux instabilités ne dominant. Il faut alors prendre en compte un autre type d'ordre, l'appariement de polarons, dans l'onde  $p$ , avec pour paramètre d'ordre  $O_{FPP}(x) = \tilde{\psi}_{f,R}(x)\tilde{\psi}_{f,L}(x)$ . Les corrélations décroissent comme

$$\langle O_{FPP}(x)O_{FPP}^\dagger(0) \rangle \sim \left( \frac{\alpha}{|x|} \right)^{\frac{2}{f_+^2+f_-^2}}. \quad (\text{II.136})$$

Dans ce cas l'onde de densité et l'appariement des polarons sont des ordres duals, et ne coexistent jamais. La phase superfluide pour les fermions est mieux décrite dans ce cas en terme de paires de polarons qu'en terme de paires de fermions nus.

### II.3.4 Effets de commensurabilité

Plusieurs études numériques des mélanges Bose-Fermi 1D sur réseau ont été menées au cours des dernières années [92, 93, 94, 91, 107, 95] permettant d'aller au delà de l'approximation du fluide harmonique et d'envisager des effets de commensurabilité des densités, notamment avec le réseau. Le Hamiltonien étudié est de la forme,

$$\begin{aligned} H = & -t_f \sum_{\ell=1}^N f_{\ell+1}^\dagger f_\ell + H.c. - t_b \sum_{\ell=1}^N b_{\ell+1}^\dagger b_\ell + H.c. \\ & + \frac{U_b}{2} \sum_{\ell=1}^N n_{b,\ell}(n_{b,\ell} - 1) + U_{bf} \sum_{\ell=1}^N n_{b,\ell} n_{f,\ell}. \end{aligned} \quad (\text{II.137})$$

Pour des petits remplissages, ce modèle est équivalent au modèle continu de la section précédente avec des masses effectives  $M_b^* = t_b a^2 / (2\hbar^2)$  et  $M_f^* = t_f a^2 / (2\hbar^2)$ , et  $a$  le pas du réseau. Dans la référence [91], les auteurs se concentrent sur le cas particulier  $t_f = t_b = t$  et du double demi-remplissage,  $N_f = N_b = 1/2$ . Ils identifient quatre phases pour des interactions BF répulsives : une séparation de phases pour de larges interactions inter-espèces, deux types de liquide de Luttinger et une phase dominée par une onde de densité de spin. Les deux types de liquide de Luttinger sont caractérisés par la décroissance des fonctions de Green associées aux fermions, aux bosons et à une particule composite formée d'un fermion et d'un trou bosonique (ou l'inverse). Cette dernière est l'équivalent des polarons de [84], dans le cas particulier du réseau doublement demi-rempli. Pour des interactions BF faibles, la première phase liquide de Luttinger est caractérisée par une décroissance algébrique du mode bosonique et du mode fermionique nu. Pour des interactions plus fortes, une transition s'opère vers une phase où le mode correspondant à la particule composite décroît moins vite que pour le fermion nu. Dans le langage des polarons, ces deux phases peuvent être décrites comme une seule et même phase, un liquide de Luttinger à deux composantes, mais avec un nuage polaronique dont la taille varie de 0 à 1 trou lorsque  $U_{bf}$  augmente. Pour des interactions encore plus fortes, un gap s'ouvre et les fonctions de Green bosonique et fermionique décroissent exponentiellement.

Cette phase se comprend bien dans la limite de bosons de cœur dur, le mélange devenant équivalent à un système de fermions de spin 1/2, au demi-remplissage. Pour des interactions inter-espèce suffisamment fortes, il est très défavorable énergétiquement pour deux particules d'occuper un même site. Un gap de charge s'ouvre alors, caractérisé par la décroissance exponentielle des fonctions de Green, et le système est dans un état avec une particule par site. Néanmoins, le mode de spin conserve sa dynamique puisqu'il subsiste une interaction d'échange  $J \sim t^2/U_{bf}$ . Cette phase est aussi un liquide de Luttinger – la fonction de Green de la particule composite fermion-trou bosonique décroît algébriquement – mais avec un seul mode, au lieu de deux. Il est possible d'écrire une version hydrodynamique, continue, de ce modèle sur réseau, prenant en compte la commensurabilité :

$$\begin{aligned}
 H = & \sum_{\alpha=f,b} \frac{1}{2\pi} \int_0^L dx \left[ v_\alpha K_\alpha [\nabla\theta_\alpha(x)]^2 + \frac{v_\alpha}{K_\alpha} [\nabla\phi_\alpha(x)]^2 \right] \\
 & + \frac{U_{bf}}{\pi^2} \int_0^L dx \nabla\phi_f(x) \nabla\phi_b(x) \\
 & + g_1 \int_0^L dx \cos[2\phi_f(x) - 2\phi_b(x)] + g_2 \int_0^L dx \cos[2\phi_f(x) + 2\phi_b(x)].
 \end{aligned}
 \tag{II.138}$$

Le Hamiltonien est celui d'un liquide de Luttinger à deux composantes, auquel s'ajoute un terme dû à l'égalité des densités – le terme  $g_1$  – et un autre découlant de la condition de demi-remplissage – le terme  $g_2$ . À ce niveau, le Hamiltonien est phénoménologique, au sens où on ne cherche pas à calculer explicitement les paramètres du Hamiltonien effectif en fonction des paramètres microscopiques. La démarche la plus fructueuse pour étudier l'influence des deux termes en cosinus est d'utiliser les méthodes du groupe de renormalisation, comme proposé dans [87]. C'est une des méthodes de choix que nous utiliserons dans notre étude du mélange BF dans un potentiel aléatoire. Sans entrer dans le détail des calculs, le principe est d'intégrer, au niveau de la fonction de partition par exemple, les degrés de liberté dits *rapides* – ici les fluctuations de densité avec des vecteurs d'onde plus grand qu'un certain cut-off  $\Lambda$ , inférieur au cut-off ultra-violet original  $\Lambda_0$  – puis d'opérer une transformation d'échelle afin de ramener  $\Lambda$  à la valeur originale  $\Lambda_0$ . Ce faisant, les paramètres du Hamiltonien original sont renormalisés, et de nouvelles interactions peuvent être générées. L'évolution des paramètres sous une succession de transformations *infinitésimales* de ce type – le *flot* du groupe de renormalisation – détermine la forme effective de la théorie de basse énergie. Pour le Hamiltonien (II.138), les équations du flot ont la forme suivante

$$\frac{dg_1}{d\ell} = (2 - \Delta_1)g_1(\ell), \tag{II.139}$$

$$\frac{dg_2}{d\ell} = (2 - \Delta_2)g_2(\ell), \tag{II.140}$$

avec  $\Delta_1 = (f_+ - b_+)^2 + (f_- - b_-)^2$  et  $\Delta_2 = (f_+ + b_+)^2 + (f_- + b_-)^2$ , deux fonctions dépendant de  $\ell$ . Tous les paramètres du Hamiltonien quadratique sont aussi renormalisés [87], et un nouveau couplage, de la forme  $\nabla\theta_f\nabla\theta_b$ , est généré. En négligeant, pour l'instant, les autres équations du flot,  $g_1$  (resp.  $g_2$ ) est une perturbation pertinente si  $2 > \Delta_1$  (resp.  $2 > \Delta_2$ ), auquel cas un des modes devient gappé. La figure II.7 représente les régions de l'espace des paramètres dans lesquelles  $g_1$  ou  $g_2$  sont pertinents, en fonction du paramètre de Luttinger  $K_b$  et de l'interaction  $U_{bf}/v_0$ ,  $K_f$  étant fixé à 1. Le terme  $g_1$  n'est pertinent que pour des interactions bosoniques assez fortes et des interactions BF attractives, favorisant la formation de paires. Au contraire, pour des interactions BF répulsives, c'est le terme  $g_2$  qui est pertinent, favorisant la formation de paires fermion-trou bosonique. Dans les deux cas, le mode de charge est gappé et la dynamique des deux espèces est fortement anti-corrélées [93].

La figure II.8 se concentre sur la partie répulsive, avec l'axe des interactions bosoniques inversé pour faire le lien avec le diagramme de phase de la référence [91] (figure 2). Les deux approches sont tout à fait compatibles, au moins au niveau qualitatif, la difficulté étant de lier les paramètres de Luttinger aux paramètres microscopiques.

Des régimes de commensurabilité plus généraux ont aussi été étudiés par plusieurs auteurs [108, 109, 110, 111], dans le continu, avec des densités vérifiant  $p\rho_f - q\rho_b = 0$ ,  $p$  et  $q$  des entiers premiers entre eux, ou sur réseau avec des densités vérifiant plutôt  $p\rho_f + q\rho_b = 1$ . Les phases massives – où un des deux modes est gappé – sont caractérisées par la formation de multimères – des trimères par exemple si  $p = 1$  et  $q = 2$ , dont les fonctions de Green décroissent algébriquement plus lentement que tous les autres modes [108, 110].

### II.3.5 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre nous avons passé en revue quelques propriétés essentielles des gaz quantiques unidimensionnels, en nous concentrant largement sur les mélanges Bose-Fermi. Il est à noter que la plupart des résultats obtenus par l'approche hydrodynamique peuvent être généralisés à d'autres types de mélanges. En effet, en prenant la limite de cœur-dur pour la composante bosonique, la correspondance est faite avec un mélange de deux types de fermions que l'on peut repérer par un pseudo-spin 1/2. À la différence des électrons d'un conducteur quasi-1D, les deux fermions peuvent avoir des masses différentes, ouvrant la voie à la formation de particules composites [108, 109, 110, 111]. Des mélanges Bose-Bose peuvent aussi être décrits par la même théorie phénoménologique, avec cependant une restriction dans le cas d'un mélange sur réseau, dans la limite du remplissage 1. En effet, pour des interactions suffisamment fortes, il existe aussi un mapping vers le modèle XXZ, mais avec des échanges ferromagnétiques. Les excitations, de type ondes de spin, ont un spectre quadratique et ne sont pas décrites par la théorie du liquide de Luttinger.

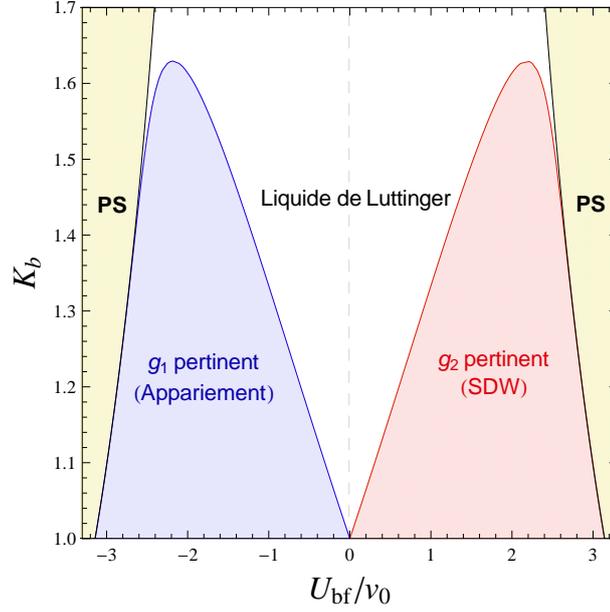


FIGURE II.7: Diagramme des phases selon le RG simplifié des équations (II.139) et (II.140). Le terme  $g_1$  n'est pertinent que pour des interactions BF attractives, et  $g_2$  que pour des interactions répulsives.

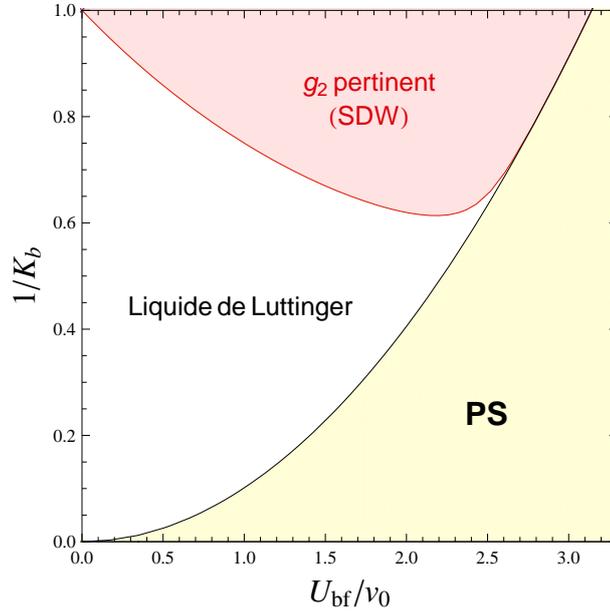


FIGURE II.8: Diagramme des phases pour des interactions BF répulsives, représenté en fonction de  $1/K_b$  pour faire le lien avec la figure 2 de la référence [91]. L'approche hydrodynamique et le RG reproduisent qualitativement les résultats numériques obtenus par un calcul Monte-Carlo quantique.

L'approche hydrodynamique permet d'étudier différentes perturbations de la théorie quadratique du mélange BF unidimensionnel. Dans la prochaine section, nous allons ajouter une perturbation extérieur sous la forme d'un potentiel aléatoire se couplant à la densité. En utilisant d'abord la méthode du groupe de renormalisation évoquée dans ce chapitre, puis une méthode variationnelle, nous déduisons un diagramme de phase en fonctions des paramètres d'interaction  $K_b$ ,  $U_{bf}$  et du rapport des vitesses  $v_f/v_b$ .



## Chapitre III

# Mélange Bose-Fermi dans un potentiel aléatoire

### III.1 Introduction : localisation dans les gaz 1D

La définition du phénomène de localisation d'un système de particules quantiques trouve son origine dans les travaux d'Anderson à la fin des années 50 [20]. Considérant un modèle d'électrons libres sautant sur les sites d'un réseau désordonné – le potentiel chimique de chaque site étant distribué de manière aléatoire – Anderson montra qu'aucune diffusion ne peut avoir lieu, conduisant à une conductivité dc exactement nulle en contradiction avec les modèles existant alors pour la conduction, et que, de plus, les fonctions d'onde des électrons sont localisées exponentiellement autour des sites du réseau. Cette découverte ouvrit un champ entier dans la physique de la matière condensée et suscite encore aujourd'hui de nombreuses études, expérimentales et théoriques. Un des résultats primordiaux est qu'en dimension  $d < 3$ , en l'absence de champ magnétique et de couplage spin-orbite, tous les états électroniques sont localisés [112], alors qu'il existe en dimension 3 un *bord de mobilité* dépendant de la force du désordre et au-delà duquel les états de grande énergie et de petite longueur d'onde de de Broglie sont délocalisés. De notre point de vue, le résultat important ici est qu'à une dimension et à température nulle les fermions libres sont toujours localisés dans un potentiel aléatoire, quelque soit la force du désordre. À température non nulle, la diffusion inélastique sur les phonons du réseau peut fournir l'énergie nécessaire pour coupler des états localisés éloignés dans l'espace mais proche en énergie, conduisant à une conductivité dc finie [113].

Une limitation du modèle d'Anderson et de la théorie de la localisation est l'absence de prise en compte des interactions entre électrons. Si dans de nombreux métaux les interactions Coulombiennes répulsives ne jouent pas un rôle prépondérant, ceci étant expliqué dans une large mesure par la théorie de Landau du liquide de Fermi, elles peuvent néanmoins avoir des effets drastiques dans certaines situations. Un exemple frappant est la transition métal-isolant, décrite par la théorie de Mott [114], induite par les interactions. La transition de Mott intervient dans des composés ayant une bande de conduction partiellement remplie si les interactions sont suffisamment fortes pour ouvrir un gap. Dans la phase isolante, chaque ion du réseau est occupé par un seul électron, dont la fonction d'onde est localisée et décroît exponentielle-

ment. Dans ce cas les interactions Coulombiennes répulsives semblent donc plutôt favoriser la localisation et, le cas échéant, aller de paire avec la localisation d’Anderson. Néanmoins à température non-nulle dans un métal désordonné il semble que les interactions répulsives puissent provoquer une transition métal-isolant [43] en créant un bord de mobilité pour les états à  $N$  corps<sup>1</sup> dans des systèmes où tous les états à une particule sont pourtant localisés. Cette transition a lieu pour une température critique  $T_c$ , dépendante de la force des interactions et séparant un état isolant où la conductivité dc est rigoureusement nulle<sup>2</sup> d’un état métallique où la conductivité est finie.

Les interactions ont un rôle exactement inverse dans le cas d’un supraconducteur désordonné. Plusieurs expériences font état d’une transition supra-isolant fonction de la force du désordre [115, 116]. Les interactions attractives, dues au couplage avec les phonons par exemple, favorisent la formation de paires d’électrons, les paires de Cooper, qui condensent en dessous d’une température critique et forment une onde de matière macroscopique cohérente. La présence de désordre peut avoir deux effets : soit la localisation des paires de Cooper, accompagnée d’une perte de la cohérence de phase et de la destruction du (quasi-)ordre à longue portée [117], soit la séparation des paires de Cooper, menant à la localisation des états à une particule [118]. Dans le premier scénario, les modèles de bosons désordonnés s’avèrent tout à fait pertinents et ont conduit à plusieurs études très détaillées, la plus célèbre considérant le modèle de Bose-Hubbard avec des potentiels chimiques sur site aléatoires [52]. Cette étude analytique, à l’aide d’arguments de scaling, a permis de mettre en évidence plusieurs transitions de phase entre des phases de Mott – pour différents remplissage commensurables – une phase isolante désordonnée, le *verre de Bose*, et une phase superfluide. Le verre de Bose est une phase localisée – la fonction de Green à une particule décroît exponentiellement – compressible et sans gap dans son spectre d’excitations. De nombreuses études numériques sont venues confirmer ces prédictions [53, 54, 55, 56], jusqu’à l’observation expérimentale de la transition de Mott dans un gaz de Rubidium 87 piégé dans un réseau optique tridimensionnel [1, 21]. L’ajout d’un désordre sur site a aussi été étudié expérimentalement [119, 120]. Le cas des bosons présente cependant une particularité puisqu’en l’absence d’interactions, tous les bosons devraient condenser dans le puit de potentiel de plus basse énergie. Néanmoins, la densité locale devenant infinie, l’ajout d’interactions répulsives, arbitrairement faibles, vient déstabiliser l’état localisé. Cette facette de la compétition entre interactions faibles et désordre a été étudiée dans de nombreux travaux théoriques [57, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51], ainsi qu’expérimentaux [16, 37, 120].

En dimension 1, l’approche du fluide harmonique permet d’étudier sur un même plan, pour les fermions et les bosons, l’effet du désordre et des interactions [57], à

---

1. De l’anglais *many-body mobility edge* selon la terminologie de [43]  
 2. Ce qui suppose l’absence de couplage à un bain de phonons par exemple.

condition que les interactions soient suffisamment fortes, dans le cas des bosons. Le point de départ est la théorie du liquide de Luttinger, perturbée par un potentiel extérieur aléatoire se couplant à la densité. Un calcul de groupe de renormalisation [57] prédit une transition, de type Kosterlitz-Thouless, pour une valeur critique du paramètre de Luttinger  $K$ , à désordre faible. Cette valeur critique,  $K = 3/2$  correspond à des interactions assez fortement répulsives pour des bosons et franchement attractives pour les fermions. Le point  $K = 1$  – fermions sans interactions ou bosons de cœur dur – se trouvant du côté où le désordre est une perturbation pertinente, la transition ainsi prédite se fait entre une phase localisée et une phase superfluide. Dans ce chapitre nous présentons l'étude d'un liquide de Luttinger à deux composantes, quelconques en présence d'un potentiel aléatoire. Les résultats principaux ont été publiés dans [59]. Nous insistons sur le fait que cette question avait en partie été abordée dans [57] où les auteurs traitaient un gaz d'électrons de spin  $1/2$ , qui est en soit un mélange (de deux fermions d'espèce différentes, si on pense aux atomes froids). Nous généralisons donc cette approche, ainsi que l'approche utilisant la méthode variationnelle des répliques [58], à un mélange quelconque et en particulier au mélange Bose-Fermi évoqué au chapitre II.

Notez que les études précédentes sur les mélanges Bose-Fermi désordonnés [121, 122] ne sont pas focalisées sur l'aspect unidimensionnel. Les résultats principaux sont dérivés pour des modèles de réseaux aléatoires, dans une limite d'interactions fermion-boson très fortes, favorisant la dynamique de particules composites (soumis à des termes d'échanges et d'interactions aléatoires) et l'apparition de plusieurs phases quantiques désordonnées. L'approche du fluide harmonique que nous développons ici est donc assez complémentaire.

## III.2 Désordre et interactions fortes : accrochage de l'onde de densité

### III.2.1 Transition d'accrochage dans un réseau propre

Un gaz de bosons placé dans un réseau optique est sujet à une transition superfluide-isolant de Mott au-delà d'une valeur critique des interactions répulsives, pour des valeurs de la densité commensurables avec le pas du réseau. Cette transition a été effectivement observée à trois dimensions dans un réseau optique [1, 123], mais également à une dimension dans un réseau de tubes [7, 123, 12]. La particularité du cas unidimensionnel est qu'un potentiel périodique d'intensité arbitrairement faible peut accrocher l'onde de densité et stabiliser un isolant de Mott, pourvu que les interactions soient suffisamment fortes et que le vecteur d'onde du réseau soit commensurable avec la densité [36, 33, 12]. Cette dernière propriété se comprend aisément dans le cadre de la théorie du fluide Harmonique. Le réseau optique en question – typiquement celui de l'expérience [12] – se couple à la densité via le Hamiltonien

$H = H_0 + H_{\text{ext}}$  où  $H_0$  est le Hamiltonien du gaz de bosons en interactions et  $H_{\text{ext}}$  est donné à une constante près par :

$$H_{\text{ext}} = \int_0^L dx V_0 \cos[2k_L x + 2\varphi] \rho_b(x), \quad (\text{III.1})$$

avec  $k_L = 2\pi/\lambda_L$  le vecteur d'onde des lasers,  $\varphi$  une phase arbitraire et  $V_0$  est proportionnel à l'intensité. La densité  $\rho_b(x)$  se décompose selon l'équation (II.62) et, si la densité moyenne  $\rho_0$  est commensurable avec le réseau (par exemple  $2\pi\rho_0 = 2k_L$  pour un atome par puits de potentiel), alors pour un réseau assez grand le terme dominant est

$$H_{\text{ext}} \simeq -g \int_0^L dx \cos[2\phi_b(x)], \quad (\text{III.2})$$

avec  $g = \rho_0 V_0$  à l'ordre le plus bas en perturbation. Le signe moins est obtenu par un simple changement de variable sur  $\phi_b$  pour absorber la phase arbitraire  $\varphi$  du potentiel périodique. Le Hamiltonien  $H_0$ , dans la limite de basse énergie, est le Hamiltonien de Luttinger :

$$H = \frac{v_b}{2\pi} \int dx \left[ K_b (\nabla \theta_b)^2 + \frac{1}{K_b} (\nabla \phi_b)^2 \right]. \quad (\text{III.3})$$

avec  $v_b$  et  $K_b$  déterminés à partir de la solution exacte du modèle de Lieb-Liniger. Le Hamiltonien total effectif est le Hamiltonien de sine-Gordon [32]. Le terme en cosinus peut être traité par le groupe de renormalisation [36]. Les équations du flot, à l'ordre 2 en  $\tilde{g}$ , ont la forme suivante :

$$\frac{d\tilde{g}}{d\ell} = [2 - K_b(\ell)]\tilde{g}(\ell), \quad (\text{III.4})$$

$$\frac{dK_b}{d\ell} = -\frac{1}{2} K_b(\ell)^2 \tilde{g}(\ell)^2, \quad (\text{III.5})$$

avec  $\tilde{g} = g\rho_b\Lambda_0^{-2}/v_b$  le paramètre de couplage adimensionné. La transformation d'échelle sur le cut-off ultraviolet est paramétrisée selon  $\Lambda(\ell) = \Lambda_0 e^{-\ell}$ , avec  $\Lambda_0$  le cut-off original de la théorie. Le flot du RG est représenté sur la figure III.1. On distingue une région de paramètres pour laquelle le cosinus est une perturbation pertinente ( $\tilde{g}(\ell)$  croît sous le RG) et pour laquelle le flot converge vers le point fixe ( $\tilde{g} \rightarrow \infty$ ,  $K_b \rightarrow 0$ ) d'une région où il ne l'est pas ( $\tilde{g}(\ell)$  décroît sous le RG) et pour laquelle il existe une ligne de points fixes tels que ( $\tilde{g} \rightarrow 0$ ,  $K_b \rightarrow K_b^* > 2$ ).

Ces deux régions sont séparées par la trajectoire se terminant au point ( $\tilde{g} = 0$ ,  $K_b = 2$ ). La physique de basse énergie de la région où le cosinus n'est pas pertinent est simplement celle d'un liquide de Luttinger, avec un paramètre  $K_b^*$  renormalisé par le réseau. Dans la phase où le cosinus est pertinent,  $\tilde{g} \rightarrow \infty$  et dans ce cas le flot atteint

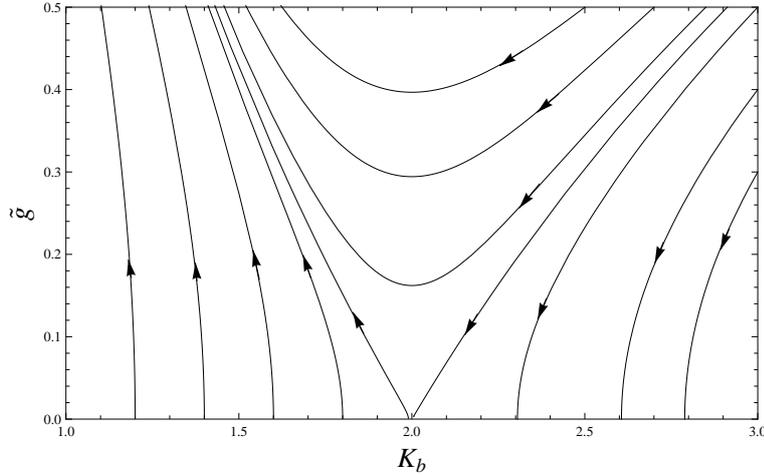


FIGURE III.1: Flot du RG pour le Hamiltonien de sine-Gordon. La trajectoire se terminant en  $(K_b = 2, \tilde{g} = 0)$  est une ligne séparatrice entre une région où le terme en cosinus n'est pas une perturbation pertinente ( $\tilde{g} \rightarrow 0, K_b \rightarrow K_b^*$ ) et une région où il l'est ( $\tilde{g} \rightarrow \infty, K_b \rightarrow 0$ ).

des régions de paramètres hors du domaine de validité du développement perturbatif conduisant aux équations (III.4) et (III.5). Néanmoins, en inspectant la forme du Hamiltonien de sine-Gordon on peut se convaincre que cette phase correspond à l'isolant de Mott. En effet le Hamiltonien se compose de trois termes. Pour minimiser l'énergie d'interaction apparaissant dans le terme  $(\nabla\phi_b)^2/K_b$ , le système doit minimiser les variations spatiales de  $\phi_b$  – c'est-à-dire minimiser les fluctuations de densité. Classiquement, la configuration optimale correspond à  $\phi_b = \text{cste}$ . Cependant, une telle configuration coûterait une énergie infinie, à cause du terme  $K_b(\nabla\theta_b)^2$ , une fois prises en compte les fluctuations quantiques.<sup>3</sup> C'est cet équilibre nécessaire entre  $\theta$  et  $\phi$  qui est responsable de la décroissance algébrique des différentes fonctions de corrélations, caractéristique du liquide de Luttinger. Le terme en cosinus cherche lui à accrocher l'onde de densité en fixant sa phase  $\phi_b(x)$  à la valeur qui minimise  $\langle H_{\text{ext}} \rangle$ , ici  $\phi_b(x) = 0$ . La compétition entre ces trois termes détermine l'état fondamental du système, en fonction des valeurs de  $g$  et  $K_b$ . Un calcul variationnel sur le Hamiltonien de sine-Gordon confirme cette intuition [36]. Dans la phase isolante, on cherche la meilleure approximation quadratique pour le Hamiltonien. Pour ce faire, on calcule l'énergie libre correspondant au Hamiltonien de sine-Gordon

$$F = -\frac{1}{\beta} \log Z, \quad (\text{III.6})$$

avec  $Z$  la fonction de partition. Il est commode d'utiliser le formalisme de l'intégrale

3. On peut tenir le raisonnement *dual* dans le cas de très faibles interactions,  $K_b \gg 1$ . Pour minimiser l'énergie le système devrait minimiser les fluctuations de la phase,  $\theta_b = \text{cste}$ , ce qui, toujours à cause des fluctuations quantiques, coûterait une énergie infinie à travers le terme  $(\nabla\phi_b)^2$ .

de chemin pour calculer  $Z$  selon

$$Z = \text{Tr}_{[\phi_b, \theta_b]} e^{-S[\phi_b, \theta_b]}, \quad (\text{III.7})$$

où l'action  $S$  est définie en temps imaginaire comme

$$S = - \int_0^\beta d\tau \int_0^L dx \left( -\frac{i}{\pi} \partial_x \phi_b(x, \tau) \partial_\tau \theta_b(x, \tau) - \mathcal{H}[\theta_b(x, \tau), \phi_b(x, \tau)] \right). \quad (\text{III.8})$$

Ici,

$$\mathcal{H}[\theta_b, \phi_b] = \frac{v_b}{2\pi} \left[ K_b [\partial_x \theta_b(x, \tau)]^2 + \frac{1}{K_b} [\partial_x \phi_b(x, \tau)]^2 \right] - g \cos[2\phi(x, \tau)] \quad (\text{III.9})$$

est la densité Hamiltonienne associée à l'Hamiltonien de sine-Gordon.  $\text{Tr}_{[\phi_b, \theta_b]}$  désigne l'intégrale sur tous les *chemins* tels que l'opérateur création satisfasse  $\psi_b(x, \tau + \beta) = \psi_b(x, \tau)$  [35]. Il est commode de calculer la trace sur  $\theta_b$  pour obtenir une action effective ne dépendant que de  $\phi$ , soit :

$$Z = Z_\theta \text{Tr}_{[\phi_b]} e^{-S_\phi[\phi_b]}, \quad (\text{III.10})$$

avec

$$S_\phi = \frac{1}{2\pi K_b} \int_0^\beta d\tau \int_0^L dx \left( \frac{1}{v_b} [\partial_\tau \phi_b(x, \tau)]^2 + v_b [\partial_x \phi_b(x, \tau)]^2 + 2\pi K_b g \cos[2\phi_b(x, \tau)] \right). \quad (\text{III.11})$$

La méthode variationnelle consiste à chercher la meilleure approximation quadratique pour  $S_\phi$  sous la forme,

$$S_G = \frac{1}{2} \sum_{q, i\omega_n} \phi_b(q, i\omega_n) [G(q, i\omega_n)]^{-1} \phi_b(-q, -i\omega_n), \quad (\text{III.12})$$

avec  $[G(q, i\omega_n)]^{-1} = \frac{1}{\pi K_b} \left[ \frac{\omega_n^2}{v_b} + v_b q^2 + \frac{\Delta^2}{v_b} \right]$ , en minimisant l'énergie libre variationnelle

$$F_{\text{var}} = -\frac{1}{\beta} \text{Tr}_{[\phi_b]} e^{-S_G[\phi_b]} + \frac{1}{\beta} \langle S - S_G \rangle_G. \quad (\text{III.13})$$

Cette minimisation conduit à une équation auto-cohérente sur  $\Delta$ , ayant pour solution (voir aussi l'annexe A),

$$\Delta = v_b \Lambda_0 (8\pi \tilde{g})^{\frac{1}{2-K_b}}, \quad (\text{III.14})$$

si  $K < 2$  et 0 sinon.  $\Delta$  est homogène a une énergie et représente le gap dans le spectre d'excitations. Le gap tend vers 0 lorsque  $K_b$  approche 2. On retrouve ainsi

un des résultats du RG, même s'il est important de noter que la loi d'échelle obtenue est différente de celle du RG.<sup>4</sup>

Ces deux approches – RG et calcul variationnel – permettent d'avoir une vue assez complète de la physique du modèle de sine-Gordon, appliquée à la description de la transition superfluide-isolant de Mott. En particulier, la méthode variationnelle permet d'obtenir une intuition de la nature de la phase décrite par le point fixe de couplage fort, pourtant en dehors du domaine de validité du calcul de RG à l'ordre 2 en perturbation. Enfin il faut noter que le modèle de sine-Gordon rend compte de manière très précise de l'expérience décrite en [12]. En faisant varier les interactions bosoniques pour un gaz d'atomes de Césium, et la hauteur du réseau optique, les auteurs observent une transition de phase entre une phase superfluide et une phase isolante, caractérisées par la réponse du système en spectroscopie de Bragg. En particulier, l'extrapolation de la frontière pour  $V_0 = 0$ , donne une valeur critique pour le paramètre d'interaction compatible – aux erreurs expérimentales près – avec la valeur critique  $K_b = 2$  pour le paramètre de Luttinger. Cette observation expérimentale est une réussite majeure validant à la fois l'approche harmonique et l'interprétation de la transition superfluide-isolant de Mott comme l'accrochage de l'onde de densité du gaz de bosons. En ayant ces concepts à l'esprit nous passons maintenant en revue la transition d'accrochage par un potentiel aléatoire avant d'étudier précisément le cas du mélange.

### III.2.2 Transition d'accrochage dans un potentiel aléatoire

Nous avons vu dans la section précédente qu'un potentiel périodique, commensurable avec la densité du gaz de particules, peut accrocher une onde de densité, lorsque les interactions sont suffisamment répulsives. Considérons maintenant le cas où le potentiel extérieur  $V(x)$  est une fonction aléatoire. Pour simplifier le problème on suppose sa moyenne nulle,<sup>5</sup>

$$\overline{V(x)} = 0. \quad (\text{III.15})$$

On suppose également l'absence de corrélations spatiales, soit

$$\overline{V(x)V(x')} = D\delta(x - x'). \quad (\text{III.16})$$

avec  $D > 0$ . On peut considérer que  $V(x)$  suit une distribution Gaussienne telle que

$$P[V] = \text{Exp} \left[ -\frac{1}{2D} \int dx V(x)^2 \right], \quad (\text{III.17})$$

---

4. Tout près de la transition, le gap s'ouvre en fait exponentiellement lentement [36].

5. Dans tout ce qui suit,  $\overline{\dots}$  désigne la moyenne sur toutes les réalisations possibles du potentiel aléatoire.

satisfaisant ainsi les équations (III.15) et (III.16). Comme précédemment on cherche à décomposer le Hamiltonien,

$$H = H_0 + \int_0^L dx V(x) \rho(x), \quad (\text{III.18})$$

en utilisant l'approximation harmonique. Le deuxième terme du Hamiltonien se décompose selon (II.62) comme

$$\int_0^L dx V(x) \rho(x) = \int_0^L dx V(x) \left[ \rho_0 - \frac{1}{\pi} \nabla \phi(x) \right] \sum_p e^{i2p[\rho_0 \pi x - \phi(x)]}. \quad (\text{III.19})$$

L'harmonique  $p = 0$  correspond à des processus de diffusion de petits moments sur le potentiel aléatoire, les harmoniques  $p = \pm 1$  à des processus autour de  $\pm 2\pi\rho_b$ , et ainsi de suite. On introduit alors deux potentiels tronqués [57],

$$\gamma(x) = \frac{1}{L} \sum_{|q| < \Lambda} V_q e^{iqx}, \quad (\text{III.20})$$

$$\xi(x) = \frac{1}{L} \sum_{|q| < \Lambda} V_{q-2\pi\rho} e^{iqx}, \quad (\text{III.21})$$

tels que

$$H = H_0 + \int_0^L dx \gamma(x) \left[ \rho_0 - \frac{1}{\pi} \nabla \phi \right] + \rho_0 \int_0^L dx \left[ \xi(x) e^{-i2\phi(x)} + \xi(x)^* e^{i2\phi(x)} \right] + \dots \quad (\text{III.22})$$

$V_q$  est la transformée de Fourier de  $V(x)$  pour une réalisation donnée du potentiel aléatoire, satisfaisant  $\overline{V_q V_{q'}} = DL \delta_{q,q'}$ . Les potentiels  $\gamma$  et  $\xi$  vérifient, dans la limite  $L \rightarrow \infty$ , des relations similaires à  $V(x)$ , à savoir

$$\overline{\gamma(x)} = 0, \quad (\text{III.23})$$

$$\overline{\gamma(x) \gamma(x')} = D \delta(x - x'), \quad (\text{III.24})$$

$$\overline{\xi(x)} = 0, \quad (\text{III.25})$$

$$\overline{\xi(x) \xi(x')^*} = D \delta(x - x') \text{ et } \overline{\xi(x) \xi(x')} = 0. \quad (\text{III.26})$$

et

$$\overline{\xi(x) \gamma(x')} = 0. \quad (\text{III.27})$$

Dans le Hamiltonien  $H$ , le terme de diffusion vers l'avant est linéaire en  $\phi$  et peut être absorbé dans le Hamiltonien quadratique  $H_0$ , en translatant  $\phi$  selon

$\phi \rightarrow \phi - \int_0^x dy \gamma(y)$ , et en renormalisant  $\xi$  selon  $\xi(x) \rightarrow \xi(x) e^{2 \int_0^x dy \gamma(y)}$ . Bien que cette transformation conduise à une décroissance exponentielle des corrélations de densité [57], elle ne modifie pas le champ  $\theta(x)$ . Les corrélations de courant, ou les corrélations superfluides, ne dépendant que de  $\theta$  ne sont pas affectées, et les processus de diffusion vers l'avant sur le potentiel aléatoire ne conduisent pas dans ce cas à la localisation. En revanche les termes de diffusions autour de  $q = \pm 2\pi\rho$  – pour les fermions, ce sont des termes de rétrodiffusion – peuvent eux conduire à une localisation du gaz, en accrochant l'onde de densité. Notez que la renormalisation de  $\xi(x)$  ne change pas sa distribution,  $\xi(x)$  et  $\gamma(x)$  étant de fait décorrélés. Dans sa forme la plus élémentaire, le Hamiltonien du système peut s'écrire

$$H = \frac{\hbar v}{2\pi} \int dx \left[ K [\nabla\theta(x)]^2 + \frac{1}{K} [\nabla\phi(x)]^2 - 2\rho|\xi(x)| \cos [2\phi(x) - 2\lambda(x)] \right], \quad (\text{III.28})$$

$\xi(x)$  étant un champ complexe, on a fait apparaître son module et sa phase. En employant des arguments similaires à ceux déployés pour expliquer qualitativement la transition d'accrochage dans un réseau pur, ce Hamiltonien fait également apparaître une compétition entre trois termes. Contrairement au cas du réseau pur, pour minimiser l'énergie due au potentiel extérieur, le système devrait ajuster la phase de l'onde de densité  $\phi(x)$  en tout point pour accommoder la phase aléatoire  $\lambda(x)$  du potentiel. Ceci coûte alors de l'énergie d'interaction, à travers le terme  $[\nabla\phi(x)]^2$ . Enfin, les fluctuations quantiques réduisent l'énergie effectivement gagnée par le système en alignant sa phase sur celle du potentiel aléatoire. Le calcul de RG étant plus délicat que dans le cas pur, nous passons d'abord en revue dans la prochaine section, un argument variationnel établi par Fukuyama et Suzumura [124].



FIGURE III.2: *Potentiel aléatoire, de type bruit blanc. Les composantes de Fourier  $q = \pm 2\pi\rho_b$  du potentiel sont susceptibles d'accrocher l'onde de densité du gaz atomique.*

### III.2.2.1 Argument variationnel : approche à la Fukuyama-Suzumura

Partant donc du Hamiltonien (III.28), la première étape consiste à chercher une configuration classique  $\phi_0(x)$  satisfaisant

$$\left. \frac{\delta H}{\delta \phi} \right|_{\phi=\phi_0} = 0, \quad (\text{III.29})$$

une équation différentielle aux coefficients aléatoires. Une solution variationnelle est trouvée en supposant que l'onde de densité atomique se divise en domaines de taille  $L_0$ , au sein desquels  $\phi_0(x)$  est constante. Ce faisant, le système tire le meilleur parti des fluctuations du potentiel aléatoire –  $\xi(x)$  et  $\xi^*(x)$  – autour de la valeur moyenne nulle. Une énergie typique de l'ordre de

$$-(L/L_0)\sqrt{DL_0}e^{i2\phi_0-i2\lambda} \quad (\text{III.30})$$

est gagnée lorsque le système, de taille  $L$ , se divise en  $L/L_0$  domaines. La valeur optimale,  $\phi_0 = \lambda$ , varie aléatoirement de domaine en domaine, en faisant des sauts d'ordre  $\pi$ . Ceci coûte une énergie de type *élastique* – l'énergie nécessaire à la déformation de l'onde de densité – à travers le terme d'interaction  $(\nabla\phi)^2$ , d'ordre  $L/L_0$  si les parois de domaine ont la même taille  $L_0$ . Selon cette analyse similaire à celle de Imry et Ma [125] pour le modèle de Heisenberg en champ aléatoire, on peut toujours trouver une valeur fine  $L_0$  telle que l'énergie soit minimale et négative – contrairement à la valeur nulle que l'on obtiendrait en prenant  $\phi_0$  constante sur toute la longueur du système. Les fluctuations quantiques sont ensuite ajoutées au problème de manière auto-cohérente. Elles ont tendance à réduire l'énergie que le système gagne auprès du potentiel aléatoire, en se divisant en domaines. En développant  $\phi(x)$  autour de la solution classique  $\phi_0(x)$  selon  $\phi(x) = \phi_0(x) + \hat{\psi}(x)$ , avec  $\hat{\psi}$  un champ quantique, le Hamiltonien effectif, par unité de longueur et à une constante additive près est

$$H/L = E_{\text{el}} + \frac{\hbar v}{2\pi} \int dx \left[ K : (\nabla\theta)^2 : + \frac{1}{K} : (\nabla\hat{\psi})^2 : \right] - \left( \frac{D}{L_0} \right)^{1/2} \left( \frac{m}{\Lambda} \right)^K \int dx : \cos[2\hat{\psi}(x)] :, \quad (\text{III.31})$$

où on a normal-ordonné le Hamiltonien de sine-Gordon effectif (voir [32] et l'appendice A) et  $E_{\text{el}}$  désigne l'énergie élastique – d'ordre  $1/L_0$  – venant de la configuration classique.  $\Lambda$  est un cut-off ultra-violet et la masse  $m$  est obtenue selon l'approximation harmonique auto-cohérente [124], soit  $m^2 = \sqrt{D/L_0}(m/\Lambda)^K$ , avec  $\mathcal{B}$ . En minimisant l'énergie par rapport à  $L_0$  il vient

$$L_0 \propto \left( \frac{1}{D} \right)^{\frac{1}{3-2K}}, \quad \text{for } K < 3/2. \quad (\text{III.32})$$

Dans le contexte des systèmes unidimensionnels de particules en interactions, cette longueur s'apparente à la longueur de localisation du système. L'onde de densité est accrochée par le potentiel aléatoire et les corrélations dans la phase de l'onde de densité sont perdues au-delà de la longueur de localisation. D'après (III.32),  $L_0$  diverge lorsque  $K$  s'approche de  $3/2$ . Ainsi, un gaz de fermions à 1D, doit présenter une transition entre une phase localisée et une phase superfluide lorsque les interactions attractives dépassent une certaine valeur critique. De même pour les bosons, une transition vers un état superfluide doit intervenir lorsque les interactions sont

diminuées, partant de la limite de cœur dur. Une description schématique de l'accrochage par un potentiel aléatoire, dans le langage variationnel, est représentée sur la figure III.3.

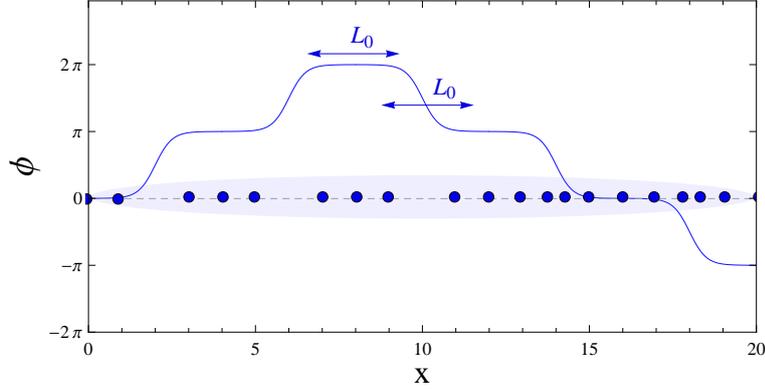


FIGURE III.3: Représentation schématique de la phase  $\phi(x)$  à partir de la solution variationnelle pour l'accrochage de l'onde de densité par un potentiel aléatoire. Le système se divise en domaines de taille  $L_0$  séparés par des parois de domaines de même taille. Une description schématique de la densité classique est aussi représentée.  $x$  est en unité de la densité moyenne inverse  $\rho_0^{-1}$ . Au sein d'un domaine,  $\phi$  est constante et l'onde de densité est régulière alors que sur les parois de domaine, une particule supplémentaire ( $\nabla\phi < 0$ ) ou un trou ( $\nabla\phi > 0$ ) sont localisés par le désordre.

### III.2.2.2 RG : approche à la Giamarchi et Schulz

Pour des raisons de pédagogie, nous avons choisi de faire apparaître dans la prochaine section le calcul détaillé du groupe de renormalisation pour le mélange Bose-Fermi en présence d'un potentiel aléatoire. Néanmoins, nous rappelons ici les équations du flot dérivées par Giamarchi et Schulz dans la référence [57]. Elles portent sur  $D$ , physiquement la variance au carré de la distribution de  $V(x)$  et représentant ici la force du désordre, le paramètre de Luttinger  $K$  et la vitesse  $v$  des excitations. À l'ordre le plus bas en  $D$ ,

$$\frac{d\tilde{D}}{d\ell} = [3 - 2K(\ell)]\tilde{D}(\ell), \quad (\text{III.33})$$

$$\frac{dK}{d\ell} = -\frac{1}{2}K(\ell)^2\tilde{D}(\ell), \quad (\text{III.34})$$

$$\frac{dv}{d\ell} = -\frac{1}{2}K(\ell)^2v(\ell)\tilde{D}(\ell). \quad (\text{III.35})$$

On a défini le paramètre sans dimension  $\tilde{D}(\ell) = \frac{D\rho_0^2}{\hbar^2 v^2 \Lambda_0^3}$ . À cet ordre, la renormalisation de  $v$  n'a pas de conséquence sur les deux premières équations, et dans le plan  $(K, \sqrt{D})$  le flot est similaire à celui représenté dans la figure III.1, avec un  $K$  critique à  $3/2$  au lieu de  $K = 2$ , dans le cas du réseau pur. Dans le langage des bosons, cela signifie que des interactions plus fortes sont nécessaires afin qu'un potentiel aléatoire puisse accrocher l'onde de densité, par rapport au cas du potentiel pur. Réciproquement, des interactions attractives moins fortes suffisent à délocaliser des fermions sans spin. Les fluctuations quantiques sont plus efficaces dans le cas désordonné que dans le cas pur.

## III.3 Mélange Bose-Fermi dans un potentiel aléatoire

### III.3.1 Dérivation du Hamiltonien de basse énergie

On part du Hamiltonien de basse énergie de l'équation (II.107), décrivant le mélange Bose-Fermi, à l'ordre le plus bas dans les interactions inter-espèces et pour des *densités incommensurables*. Le mélange est ensuite soumis à un potentiel extérieur, aléatoire, décrit par le Hamiltonien :

$$H_{\text{ext}} = \int_0^L dx [V_f(x)\rho_f(x) + V_b(x)\rho_b(x)]. \quad (\text{III.36})$$

Expérimentalement,  $V_f$  et  $V_b$ , seraient proportionnels. Si on note  $I(x)$  l'intensité du laser créant le paysage désordonné – une figure de speckle par exemple comme dans [16] – alors  $V_f(x) \simeq \alpha_f I(x)$  et  $V_b(x) \simeq \alpha_b I(x)$  avec  $\alpha_f$  et  $\alpha_b$  les polarisabilités respectives de deux espèces. C'est un point important car si  $I(x)$  satisfait les conditions évoquées plus haut sur la valeur moyenne –  $I(x) = 0$  – et les corrélations spatiales –  $I(x)I(x') = D\delta(x - x')$  –  $V_f$  et  $V_b$  n'en sont pas moins corrélés spatialement. Selon la décomposition harmonique, les composantes de Fourier de petits vecteurs d'onde se couplent aux champs  $\nabla\phi_f$  et  $\nabla\phi_b$  alors que les composantes autour de  $\pm 2\pi\rho_f$  et  $\pm 2\pi\rho_b$  se couplent directement aux ondes de densité. On introduit alors quatre potentiels tronqués,

$$\gamma_{f(b)}(x) = \frac{1}{L} \sum_{q \sim 0} e^{iqx} V_{f(b),q}, \quad (\text{III.37})$$

$$\xi_{f(b)}(x) = \frac{1}{L} \sum_{q \sim 0} e^{iqx} V_{f(b),q-2\pi\rho_{f(b)}}, \quad (\text{III.38})$$

où  $V_{f(b),q}$  est la transformée de Fourier de  $V_{f(b)}(x)$ . Puisque nous partons de l'hypothèse  $\rho_f \neq \rho_b$  alors les potentiels aléatoires  $\xi_f(x)$  et  $\xi_b(x)$  ne sont pas corrélés. En effet  $\overline{V_q V_{q'}} = DL\delta_{qq'}$  et, si les densités sont assez différentes, alors  $\xi_f(x)$  et  $\xi_b(x)$  ne contiennent pas de fréquences spatiales en commun. Au contraire  $\gamma_f(x)$  et  $\gamma_b(x)$  sont proportionnels – et a fortiori complètement corrélés. Finalement, le Hamiltonien extérieur dans l'approximation hydrodynamique s'écrit

$$H_{\text{ext}} = \sum_{\alpha=f,b} \int_0^L dx \left[ -\frac{\gamma_\alpha(x)}{\pi} \nabla\phi_\alpha + \rho_\alpha \xi_\alpha(x) e^{-i2\phi_\alpha(x)} + h.c. \right]. \quad (\text{III.39})$$

De nouveau, les champs  $\gamma_f(x)$  et  $\gamma_b(x)$  peuvent être absorbés dans le Hamiltonien quadratique selon une transformation de jauge appropriée sur  $\phi_f(x)$  et  $\phi_b(x)$  selon

$$\tilde{\phi}_\alpha(x) = \phi_\alpha(x) - \int_0^x dy \lambda_\alpha(y), \quad (\text{III.40})$$

avec

$$\lambda_f(x) = \frac{K_f/v_f}{1-g^2} \left[ \gamma_f(x) - g \sqrt{\frac{v_f K_b}{v_b K_f}} \gamma_b(x) \right], \quad (\text{III.41})$$

$$\lambda_b(x) = \frac{K_b/v_b}{1-g^2} \left[ \gamma_b(x) - g \sqrt{\frac{v_b K_f}{v_f K_b}} \gamma_f(x) \right], \quad (\text{III.42})$$

les champs  $\theta_f(x)$  et  $\theta_b(x)$  restant inchangés. On rappelle que  $g$  est un paramètre adimensionné défini par

$$g = \frac{U_{bf}}{\hbar\pi} \sqrt{\frac{K_f K_b}{v_f v_b}}. \quad (\text{III.43})$$

Les arguments de  $\xi_f(x)$  et  $\xi_b(x)$  sont aussi translatées, selon

$$\tilde{\xi}_\alpha(x) = \xi_\alpha(x) \exp \left[ -i2 \int_0^x dy \lambda_\alpha(y) \right].$$

Le Hamiltonien ainsi transformée se réécrit

$$\begin{aligned} H = & \sum_{\alpha=f,b} \frac{\hbar v_\alpha}{2\pi} \int_0^L dx \left[ K_\alpha (\nabla \theta_\alpha)^2 + \frac{1}{K_\alpha} (\nabla \tilde{\phi}_\alpha)^2 \right] + \frac{U_{bf}}{\pi^2} \int_0^L dx \nabla \tilde{\phi}_f \nabla \tilde{\phi}_b \\ & + \sum_{\alpha=f,b} \int_0^L dx \left[ \rho_\alpha \tilde{\xi}_\alpha(x) e^{-i2\tilde{\phi}_\alpha(x)} + h.c. \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.44})$$

Cette transformation de jauge n'affecte pas les corrélations de paires de fermions, ni les les corrélations courant-courant, ni le propagateur bosonique, qui dépendent tous des champs  $\theta_f$  et  $\theta_b$ . Les processus de diffusion vers l'avant sur le potentiel aléatoire ne sont pas en compétition avec les courants, normaux ou superfluides et ne contribuent pas aux phénomènes de localisation dans le système. L'accrochage des ondes de densité atomique est dû aux processus de diffusion transférant des impulsions de l'ordre de  $2\pi\rho_f$  ou  $2\pi\rho_b$ , correspondant aux termes  $\tilde{\xi}_f(x)$  et  $\tilde{\xi}_b(x)$  dans (III.44). Notez que puisque  $\gamma_{f,b}$  et  $\xi_{f,b}$  ne sont pas corrélés,  $\tilde{\xi}_{f,b}$  sont aussi des variables aléatoires Gaussiennes ayant les mêmes fonctions de corrélation que  $\xi_{f,b}$ . Bien que la transformation de jauge ait des conséquences sur le calcul de quantités dépendant directement de la densité – les corrélations de densité par exemple, utiles pour évaluer le facteur de structure – nous omettrons les symboles tilda dans l'analyse à suivre des instabilités du système et la détermination du diagramme des phases.

### III.3.2 Application des arguments de Fukuyama et Suzumura au cas du mélange

Dans un premier temps, nous cherchons à nous forger une intuition sur les propriétés de localisation du mélange Bose-Fermi en appliquant les arguments de l'approximation harmonique auto-cohérente. Pour cela, on commence par chercher une configuration classique, pour les champs  $\phi_f$  et  $\phi_b$ , minimisant l'énergie

$$E = \frac{\hbar v_f}{2\pi K_f} \int_0^L dx (\nabla \phi_f)^2 + \frac{\hbar v_b}{2\pi K_b} \int_0^L dx (\nabla \phi_b)^2 + \frac{U_{bf}}{\pi^2} \int_0^L dx \nabla \phi_f \nabla \phi_b + \sum_{\alpha=f,b} \rho_\alpha \int_0^L dx [\xi_\alpha(x) e^{-i2\phi_\alpha(x)} + H.c.]. \quad (\text{III.45})$$

Dans le cas, hypothétique, où le potentiel aléatoire n'agirait que sur les bosons, la situation est très similaire à celle exposée dans le problème à une seule espèce. Le gaz de bosons se divise en domaines de taille  $L_b$ , au sein desquels la phase classique  $\phi_{b,0}$  s'ajuste à la phase aléatoire. L'onde de densité fermionique déforme alors sa propre phase  $\phi_f$  afin de minimiser l'énergie du système. Il y a deux contributions élastiques pour les fermions,  $(\nabla \phi_{f,0})^2$  qui essaye de maintenir la phase fermionique constante et  $U_{bf}/\pi^2 \nabla \phi_{f,0} \nabla \phi_{b,0}$  qui cherche à maintenir les deux ondes de densité en phase ( $U_{bf} < 0$ ) ou en opposition de phase ( $U_{bf} > 0$ ). On peut faire apparaître la configuration optimale en transformant le Hamiltonien selon

$$E = \frac{\hbar v_f}{2\pi K_f} \int dx (\nabla \tilde{\phi}_f)^2 + \frac{\hbar v_b}{2\pi K_b} \left( 1 - \frac{U_{bf} K_b K_f}{\pi^2 \hbar^2 v_f v_b} \right) \int_0^L dx (\nabla \phi_b)^2 + \rho_b \int_0^L dx [\xi_b(x) e^{-i2\phi_b(x)} + H.c.], \quad (\text{III.46})$$

où on a effectué le changement de variables suivant,  $\tilde{\phi}_f = \phi_f + \frac{U_{bf} K_f}{\pi \hbar v_f} \phi_b$ . Le coût en énergie élastique d'une déformation de la phase bosonique est réduite d'un facteur  $1 - g^2$  si  $\tilde{\phi}_f$  est maintenue constante. Dans ce cas, le gaz de bosons se divise en domaines de taille  $L_b$ ,

$$L_b \propto \left( \frac{1}{D_b} \right)^{\frac{1}{3-2\tilde{K}_b}}, \quad \text{for } \tilde{K}_b < 3/2, \quad (\text{III.47})$$

avec  $\tilde{K}_b = K_b/\sqrt{1-g^2}$ , tandis que la densité fermionique s'ajuste en suivant la solution classique :

$$\phi_{f,0}(x) = -\frac{U_{bf} K_f}{\pi \hbar v_f} \phi_{b,0}(x) + \text{cste}. \quad (\text{III.48})$$

Ici il est important de souligner deux aspects de la solution variationnelle. Notez que l'instabilité vers la séparation de phase où le collapse, lorsque  $g^2 = 1$ , est

déjà apparente au niveau classique. Le coefficient devant  $(\nabla\phi_b)^2$  devient négatif lorsque  $g^2$  excède 1, favorisant dans ce cas une distorsion maximale de l'onde de densité bosonique. Notez aussi que la présente transformation des champs menant à (III.46) ne diagonalise pas le problème quantique et ne permet donc pas de traiter correctement les fluctuations quantiques.

Enfin, nous considérons le cas général où le désordre se couple aux deux composantes du mélange. Bien qu'un traitement auto-cohérent complet soit nécessaire, nous ne donnerons dans cette section que quelques arguments qualitatifs ; nous renvoyons le calcul auto-cohérent à la section III.3.4 où nous utilisons la notion de brisure de la symétrie des répliques pour décrire la phase complètement localisée. Nous nous trouvons maintenant dans une situation où le désordre essaye d'accrocher les deux composantes du gaz indépendamment –  $\xi_f$  et  $\xi_b$  n'étant pas corrélés – alors que les déformations élastiques sont elles couplées. Nous cherchons à nouveau une solution pour laquelle les deux composantes du gaz se divisent en domaines de taille  $L_f$  et  $L_b$ . Une façon de désintriquer le problème quelque peu est de supposer qu'une des longueurs de localisation est (beaucoup) plus grande que l'autre, par exemple,  $L_b > L_f$ . En partant de l'équation (III.48), il semble raisonnable de supposer que la phase fermionique est de la forme

$$\phi_{f,0}(x) = -\frac{U_{bf}}{\pi} \frac{K_f}{\hbar v_f} \phi_{b,0}(x) + \lambda_f. \quad (\text{III.49})$$

Ici,  $\lambda_f$  est reliée à la phase aléatoire du potentiel  $\xi_f$  et remplace la constante dans l'équation (III.48). Sur les domaines où  $\phi_b$  est constante,  $\phi_f$  varie aléatoirement en faisant des sauts d'ordre  $\pi$ , pour accommoder le potentiel aléatoire, de manière analogue au cas d'une seule espèce. En revanche, lorsque  $\phi_b$  varie entre deux domaines,  $\nabla\phi_b$  fait l'effet d'un potentiel chimique – comme dans la transition Mott- $\delta$  [36] – et impose une pente finie à  $\phi_f$ . Dans ce cas, les variations de  $\phi_f$  ont une structure *emboîtée*, dans le sens où le couplage aux bosons impose des variations sur des échelles de longueurs de l'ordre de  $L_b$ , tandis que chaque domaine de taille  $L_b$  se divise en sous-domaines de taille  $L_f$  pour accommoder la phase aléatoire du potentiel  $\xi_f$ . Bien sûr, à ce niveau, il est nécessaire de prendre en compte les fluctuations quantiques. C'est l'objet des prochaines sections. Nous procédons d'abord à un calcul de type groupe de renormalisation afin d'identifier les régions de l'espace des paramètres où le désordre est pertinent et susceptible d'accrocher une ou les deux composantes du gaz. Nous utilisons ensuite le concept de brisure de symétrie des répliques pour confirmer les prédictions du RG et l'intuition donnée par la solution variationnelle classique.

### III.3.3 RG en deux étapes

#### III.3.3.1 Dérivation des équations du flot du RG

Le Groupe de Renormalisation (RG) est une méthode permettant d'analyser transitions de phase et transitions de phase quantiques en se concentrant sur les propriétés de basse énergie du système [126]. Cette méthode repose sur l'hypothèse que dans le système en question tous les phénomènes importants pour la physique interviennent sur des échelles de longueur bien plus grande qu'une certaine longueur microscopique  $\Lambda^{-1}$ . Dans le cas nous intéressant, nous avons dérivé une théorie hydrodynamique afin de décrire la dynamique du système. Cette théorie est valide pourvu que les excitations collectives aient lieu sur des échelles de longueur plus grandes que la distance inter-particule. Typiquement ici,  $\Lambda \sim \rho_0$  la densité moyenne. À chaque étape du RG, il convient d'intégrrer les excitations de petites longueur d'onde, ici les fluctuations de densité à courtes distances, en faisant une transformation d'échelle sur le cut-off  $\Lambda$ , afin de l'amener à une valeur plus petite  $\Lambda'$ . Ceci a pour effet de renormaliser les paramètres du Hamiltonien et, éventuellement, en générer de nouveaux. En effectuant ces transformations de manière continue, on génère des trajectoires dans l'espace des paramètres fournissant des informations sur le diagramme de phase du système. Dans un système avec un désordre *gelé*, la quantité thermodynamique d'intérêt est l'énergie libre moyenne  $F$  définie comme

$$-\beta F = \overline{\log Z} \quad (\text{III.50})$$

où  $Z$  est la fonction de partition pour une réalisation donnée du potentiel aléatoire. L'énergie libre moyenne est une quantité extrêmement difficile à calculer. Une façon de contourner la difficulté réside dans la méthode des répliques [127], reposant sur l'observation suivante :

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \log \overline{Z^n} = \overline{\log Z}. \quad (\text{III.51})$$

Ainsi, l'astuce consiste à introduire  $n$  copies identiques du système, moyenner sur le désordre et à la fin du calcul prendre la limite  $n \rightarrow 0$ . En pratique, nous appliquerons la méthode du RG à  $\overline{Z^n}$ . Dans le langage de l'intégrale de chemin, la fonction de partition  $Z$  s'écrit :

$$Z = \int D\phi_f D\phi_b e^{-S[\phi_f, \phi_b]/\hbar} \quad (\text{III.52})$$

avec  $S$  l'action dérivée du Hamiltonien (III.44), c'est-à-dire  $S = S_0 + S_{\text{dis}}$ , avec

$$S_0 = \sum_{\alpha=f,b} \frac{\hbar}{2\pi K_\alpha} \int_0^L dx \int_0^{\hbar\beta} d\tau \left[ \frac{1}{v_\alpha} (\partial_\tau \phi_\alpha)^2 + v_\alpha (\partial_x \phi_\alpha)^2 \right] + \frac{U_{bf}}{\pi^2} \int_0^L dx \int_0^{\hbar\beta} d\tau \partial_x \phi_f \partial_x \phi_b, \quad (\text{III.53})$$

$$S_{\text{dis}} = \sum_{\alpha=f,b} \rho_\alpha \int_0^L dx \int_0^{\hbar\beta} d\tau [\xi_\alpha(x) e^{-2\phi_\alpha(x,\tau)} + H.c.]. \quad (\text{III.54})$$

$\xi_\alpha(x)$  est une fonction aléatoire, distribuée selon une Gaussienne,

$$P(\xi_\alpha, \xi_\alpha^*) = \exp[-D_\alpha^{-1} \int_0^L dx \xi_\alpha(x) \xi_\alpha(x)^*]. \quad (\text{III.55})$$

Calculons  $\overline{Z^n}$ .

$$\begin{aligned} \overline{Z^n} &= \int \prod_{a=1}^n D\phi_f^a D\phi_b^a e^{-\sum_{a=1}^n S_0[\phi_f^a, \phi_b^a]/\hbar} \overline{e^{-\sum_{a=1}^n S_{\text{dis}}[\phi_f^a, \phi_b^a]/\hbar}} \\ &= \int \prod_{a=1}^n D\phi_f^a D\phi_b^a e^{-\sum_{a=1}^n S_0[\phi_f^a, \phi_b^a]/\hbar} \times \\ &\quad \times \exp \left[ \sum_{\alpha=f,b} \frac{D_\alpha \rho_\alpha^2}{\hbar^2} \sum_{a,b=1}^n \int dx d\tau d\tau' e^{i2\phi_\alpha^a(x,\tau)} e^{-i2\phi_\alpha^b(x,\tau')} \right] \\ &= \int \prod_{a=1}^n D\phi_f^a D\phi_b^a e^{-S_{\text{rep}}/\hbar}, \end{aligned} \quad (\text{III.56})$$

où nous avons défini l'action *répliquée*,  $S_{\text{rep}} = S_0^{\text{rep}} + S_{\text{dis}}^{\text{rep}}$ , comme

$$S_0^{\text{rep}} = \sum_{a=1}^n \sum_{\alpha=f,b} \frac{\hbar}{2\pi K_\alpha} \int_0^L dx \int_0^{\hbar\beta} d\tau \left[ \frac{1}{v_\alpha} (\partial_\tau \phi_\alpha^a)^2 + v_\alpha (\partial_x \phi_\alpha^a)^2 \right] + \frac{U_{bf}}{\pi^2} \int_0^L dx \int_0^{\hbar\beta} d\tau \partial_x \phi_f^a \partial_x \phi_b^a, \quad (\text{III.57})$$

$$S_{\text{dis}}^{\text{rep}} = -\frac{D_f \rho_f^2}{\hbar} \sum_{a,b} \int dx d\tau d\tau' \cos[2\phi_f^a(x,\tau) - 2\phi_f^b(x,\tau')] - \frac{D_b \rho_b^2}{\hbar} \sum_{a,b} \int dx d\tau d\tau' \cos[2\phi_b^a(x,\tau) - 2\phi_b^b(x,\tau')] \quad (\text{III.58})$$

Pour procéder à la transformation du RG, il faut choisir une procédure de cut-off, cohérente avec les contraintes du problème. Typiquement, pour un liquide de Luttinger à une seule composante, il est commode de choisir un cut-off isotrope,  $|\mathbf{r}| > \Lambda^{-1}$  dans l'espace réel,  $|\mathbf{q}| < \Lambda$  dans l'espace de Fourier, où  $\mathbf{r} = (x, v\tau)$  et  $\mathbf{k} = (q, \omega_n/v)$ . Ici, les vitesses des deux composantes du gaz étant a priori différentes on choisit d'imposer un cut-off uniquement sur les impulsions  $q$ , soit  $q < \Lambda$ . Ainsi tous les champs –  $\phi_f, \phi_b$  comme  $\phi_+$  et  $\phi_-$  – sont adéquatement décomposés dans l'espace de Fourier,

$$\phi_\alpha(x, \tau) = \frac{1}{\beta L} \sum_{\substack{q, \omega_n \\ |q| < \Lambda}} \phi_\alpha(q, \omega_n) e^{iqx - i\omega_n \tau}. \quad (\text{III.59})$$

On introduit ensuite un nouveau cut-off  $\Lambda' < \Lambda$ , ainsi que les champs *rapides* et les champs *lents*,

$$\phi_\alpha^<(x, \tau) = \frac{1}{\beta L} \sum_{\substack{q, \omega_n \\ |q| < \Lambda'}} \phi_\alpha(q, \omega_n) e^{iqx - i\omega_n \tau}, \quad (\text{III.60})$$

$$\phi_\alpha^>(x, \tau) = \frac{1}{\beta L} \sum_{\substack{q, \omega_n \\ \Lambda' < |q| < \Lambda}} \phi_\alpha(q, \omega_n) e^{iqx - i\omega_n \tau}. \quad (\text{III.61})$$

Puis, on intègre les champs rapides dans la fonction de partition moyenne :

$$\overline{Z}_\Lambda^n = Z_0^n \int \prod_{a=1}^n D\phi_f^{a,<} D\phi_b^{a,<} e^{-S_0^<} \langle e^{-S_{\text{dis}}^{\text{rep}}} \rangle \quad (\text{III.62})$$

En utilisant l'approximation des cumulants au premier ordre en  $D_f$  et  $D_b$ .

$$\begin{aligned} & \langle e^{-S_{\text{dis}}^{\text{rep}}} \rangle \\ & \simeq \exp \left[ \sum_{\alpha=f,b} \frac{D_\alpha \rho_\alpha^2}{\hbar^2} \sum_{a=1}^n \int dx d\tau d\tau' e^{i2\phi_\alpha^{a,<}(x,\tau)} e^{-i2\phi_\alpha^{a,<}(x,\tau')} \langle e^{i2\phi_\alpha^{a,>}(x,\tau)} e^{-i2\phi_\alpha^{a,>}(x,\tau')} \rangle \right] \\ & = \exp \left[ \sum_{\alpha=f,b} \frac{D_\alpha \rho_\alpha^2}{\hbar^2} \sum_{a=1}^n \int dx d\tau d\tau' e^{i2\phi_\alpha^{a,<}(x,\tau)} e^{-i2\phi_\alpha^{a,<}(x,\tau')} \langle e^{i2\phi_\alpha^{a,>}(x,\tau)} \rangle^2 \right. \\ & + \sum_{\alpha=f,b} \frac{D_\alpha \rho_\alpha^2}{\hbar^2} \sum_{a=1}^n \int dx d\tau d\tau' e^{i2\phi_\alpha^{a,<}(x,\tau)} e^{-i2\phi_\alpha^{a,<}(x,\tau')} \left[ \langle e^{i2\phi_\alpha^{a,>}(x,\tau)} e^{-i2\phi_\alpha^{a,>}(x,\tau')} \rangle \right. \\ & \quad \left. \left. - \langle e^{i2\phi_\alpha^{a,>}(x,\tau)} \rangle^2 \right] \right] \quad (\text{III.63}) \end{aligned}$$

Notez qu'au premier ordre en  $D_f$  et  $D_b$  toutes les fonctions de corrélations apparaissant dans le calcul sont diagonales dans les indices de répliques, que nous n'écrivons

plus explicitement à partir de là. Nous continuons le calcul avec  $D_f$  seulement, pour le confort dans les notations, mais le même calcul s'applique à  $D_b$ . En utilisant les modes normaux  $\phi_+$  et  $\phi_-$  définis au chapitre II, nous trouvons que

$$\langle e^{i2\phi_\alpha^>(x,\tau)} \rangle_\>^2 = (\Lambda'/\Lambda)^{2f_+^2+2f_-^2}. \quad (\text{III.64})$$

Ainsi le premier terme dans l'équation (III.63) est

$$\frac{D_f \rho_f^2}{\hbar^2 v_f^2 \Lambda^3} \left( \frac{\Lambda'}{\Lambda} \right)^{2f_+^2+2f_-^2} \Lambda^3 \int dx d(v_f \tau) d(v_f \tau') e^{i2\phi_f^<(x,\tau)} e^{-i2\phi_f^<(x,\tau')} \quad (\text{III.65})$$

$$= \tilde{D}_f \left( \frac{\Lambda'}{\Lambda} \right)^{2f_+^2+2f_-^2-3} \Lambda'^3 \int dx d(v_f \tau) d(v_f \tau') e^{i2\phi_f^<(x,\tau)} e^{-i2\phi_f^<(x,\tau')} \quad (\text{III.66})$$

où nous avons défini la quantité adimensionnée,  $\tilde{D}_f = \frac{D_f \rho_f^2}{\hbar^2 v_f^2 \Lambda^3}$ . Pour préserver la forme de l'action de basse énergie, pour le nouveau cut-off  $\Lambda'$ , il faut appliquer la transformation d'échelle suivante à  $\tilde{D}_f$ ,

$$\tilde{D}_f(\Lambda') = \tilde{D}_f(\Lambda) \left( \frac{\Lambda'}{\Lambda} \right)^{2f_+^2+2f_-^2-3}. \quad (\text{III.67})$$

Pour une transformation infinitésimale du cut-off,  $\Lambda' = \Lambda(1 - dl)$  – découlant d'une paramétrisation de la forme  $\Lambda(l) = \Lambda_0 e^{-l}$  – l'équation du flot pour  $\tilde{D}_f$  s'écrit

$$\frac{d\tilde{D}_f}{dl} = (3 - 2f_+^2 - 2f_-^2) \tilde{D}_f(l). \quad (\text{III.68})$$

Nous traitons ensuite le second crochet dans l'équation (III.63). Sa contribution principale intervient lorsque  $\tau$  et  $\tau'$  sont proches et vient essentiellement renormaliser  $(\partial_\tau \phi_f)^2$  dans l'action quadratique. Traitons tout d'abord

$$\mathcal{A} = \langle e^{i2\phi_f^>(x,\tau)} e^{-i2\phi_f^>(x,\tau')} \rangle_\> - \langle e^{i2\phi_f^>(x,\tau)} \rangle_\>^2. \quad (\text{III.69})$$

On a

$$\begin{aligned} \langle e^{i2\phi_f^>(x,\tau)} e^{-i2\phi_f^>(x,\tau')} \rangle_\> &= e^{-\sum_{\alpha=\pm} 2f_\alpha^2 ((\phi_\alpha(x,\tau) - \phi_\alpha(x,\tau'))^2)_\>} \\ &= \exp \left[ - \sum_{\alpha=\pm} 2f_\alpha^2 \sum_{\substack{q, \omega_n \\ \Lambda' < |q| < \Lambda}} [2 - 2 \cos(\omega_n \bar{\tau})] \frac{\pi v_\alpha}{\omega_n^2 + v_\alpha^2 q^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{III.70})$$

avec  $\bar{\tau} = \tau - \tau'$  et :

$$e^{i2\phi_f^>(x,\tau)} \rangle_{>}^2 = \exp \left[ - \sum_{\alpha=\pm} 4f_\alpha^2 \sum_{\substack{q,\omega_n \\ \Lambda' < |q| < \Lambda}} \frac{\pi v_\alpha}{\omega_n^2 + v_\alpha^2 q^2} \right]. \quad (\text{III.71})$$

En factorisant  $\langle e^{i2\phi_f^>(x,\tau)} e^{-i2\phi_f^>(x,\tau')} \rangle_{>}$  dans  $\mathcal{A}$  et puisque  $\Lambda' = \Lambda(1 - dl)$ , un développement au premier ordre en  $dl$  conduit à

$$\mathcal{A} = \langle e^{i2\phi_f^>(x,\tau)} e^{-i2\phi_f^>(x,\tau')} \rangle_{>} \sum_{\alpha=\pm} 2f_\alpha^2 e^{-v_\alpha |\bar{\tau}| \Lambda} dl. \quad (\text{III.72})$$

Il nous reste finalement

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \frac{D_\alpha \rho_\alpha^2}{\hbar^2} \int dx d\tau d\tau' e^{i2\phi_f^<(x,\tau)} e^{-i2\phi_f^<(x,\tau')} \mathcal{A} \\ &= \frac{D_\alpha \rho_\alpha^2}{\hbar^2} \int dx d\tau d\tau' : e^{i2\phi_f^<(x,\tau)} e^{-i2\phi_f^<(x,\tau')} : e^{-\sum_{\alpha=\pm} 2f_\alpha^2 \int_0^\Lambda dq (1 - e^{-v_\alpha |\bar{\tau}| q}) / q} \times \\ &\quad \times \sum_{\alpha=\pm} 2f_\alpha^2 e^{-v_\alpha |\bar{\tau}| \Lambda} dl. \end{aligned} \quad (\text{III.73})$$

: ... : indique l'ordre normal. La fonction  $\mathcal{G}(\bar{\tau}) = \exp \left[ - \sum_{\alpha=\pm} 2f_\alpha^2 \int_0^\Lambda dq (1 - e^{-v_\alpha |\bar{\tau}| q}) / q \right]$  est évaluée en prenant l'ordre normal et en combinant le facteur  $\langle e^{i2\phi_f^<(x,\tau)} e^{-i2\phi_f^<(x,\tau')} \rangle_{<}$  supplémentaire avec  $\mathcal{A}$ . Finalement on développe l'exponentielle en puissance de  $\bar{\tau}$  :

$$\mathcal{B} \simeq -dl \frac{D_\alpha \rho_\alpha^2}{\hbar^2} \left[ \int dx dT (\partial_T \phi_f)^2 \right] \int d\bar{\tau} \bar{\tau}^2 \mathcal{G}(\bar{\tau}) \sum_{\alpha=\pm} 4f_\alpha^2 e^{-v_\alpha |\bar{\tau}| \Lambda} \quad (\text{III.74})$$

Pour  $\mathcal{G}(\bar{\tau})$  on trouve

$$\mathcal{G}(\bar{\tau}) = \prod_{\alpha=\pm} (v_\alpha \Lambda |\bar{\tau}|)^{-2f_\alpha^2} e^{-2f_\alpha^2 (\gamma + \Gamma(0, v_\alpha \Lambda |\bar{\tau}|))} \quad (\text{III.75})$$

où  $\gamma \simeq 0,5772$  est la constante d'Euler et  $\Gamma(0, z)$  la fonction Gamma incomplète. Au final on trouve que  $\mathcal{B}$  peut se s'écrire sous la forme

$$\mathcal{B} \simeq -dl \tilde{D}_f \left[ f_+^2 \mathcal{C}_+ \frac{v_f^2}{v_+^3} \left( \frac{v_+}{v_-} \right)^{2f_-^2} + f_-^2 \mathcal{C}_- \frac{v_f^2}{v_-^3} \left( \frac{v_-}{v_+} \right)^{2f_+^2} \right] \int dx dT (\partial_T \phi_f)^2. \quad (\text{III.76})$$

$v_f$  et  $K_f$  sont tous deux renormalisés par ce terme, et on trouve les équations de flot suivantes :

$$\frac{dK_f}{dl} = -\frac{K_f^2}{2}\tilde{D}_f \left[ f_+^2 \mathcal{C}_+ \frac{v_f^3}{v_+^3} \left( \frac{v_+}{v_-} \right)^{2f_-^2} + f_-^2 \mathcal{C}_- \frac{v_f^3}{v_-^3} \left( \frac{v_-}{v_+} \right)^{2f_+^2} \right], \quad (\text{III.77})$$

$$\frac{dv_f}{dl} = -\frac{K_f^2}{2}v_f\tilde{D}_f \left[ f_+^2 \mathcal{C}_+ \frac{v_f^3}{v_+^3} \left( \frac{v_+}{v_-} \right)^{2f_-^2} + f_-^2 \mathcal{C}_- \frac{v_f^3}{v_-^3} \left( \frac{v_-}{v_+} \right)^{2f_+^2} \right], \quad (\text{III.78})$$

où nous avons défini

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_+ &= 8 \int_0^\infty dz z^{2-X_f} e^{-2\gamma X_f} e^{-2f_+^2 \Gamma(0,z) - 2f_-^2 \Gamma(0, \frac{v_-}{v_+} z)}, \\ \mathcal{C}_- &= 8 \int_0^\infty dz z^{2-X_f} e^{-2\gamma X_f} e^{-2f_+^2 \Gamma(0, \frac{v_+}{v_-} z) - 2f_-^2 \Gamma(0,z)}. \end{aligned} \quad (\text{III.79})$$

On trouve également deux équations similaires pour  $K_b$  et  $v_b$ . On peut vérifier en utilisant les équations II.120 et II.121 que pour  $U_{bf} = 0$ . On retrouve les équations de [57]. À ce stade, les prochains résultats seront dérivés en négligeant la renormalisation des paramètres de Luttinger par le désordre. On suppose pour cela que l'amplitude du désordre ( $D_f$  et  $D_b$ ) est très faible. Les diagrammes de phases présentés dans les figures à venir seront forcément renormalisés en cas de désordre plus fort. Néanmoins ils présentent une première approche importante des transitions d'accrochage dans le cas d'un mélange Bose-Fermi.

### III.3.3.2 Analyse du flot ; diagramme des phases préliminaire

On a donc trouvé les équations de flot suivantes pour  $\tilde{D}_f$  et  $\tilde{D}_b$ ,

$$\frac{d\tilde{D}_f}{dl} = (3 - X_f)\tilde{D}_f(l), \quad (\text{III.80})$$

$$\frac{d\tilde{D}_b}{dl} = (3 - X_b)\tilde{D}_b(l), \quad (\text{III.81})$$

avec  $\tilde{D}_f = \frac{D_f \rho_f^2}{\hbar^2 v_f^2 \Lambda^3}$  et  $\tilde{D}_b = \frac{D_b \rho_b^2}{\hbar^2 v_b^2 \Lambda^3}$ .  $K_f, K_b, v_f$  sont  $v_b$  aussi renormalisés. Les dimensions anormales des opérateurs,  $X_f$  and  $X_b$ , viennent de la diagonalisation de  $S_0$ . On trouve  $X_f = 2f_+^2 + 2f_-^2$  and  $X_b = 2b_+^2 + 2b_-^2$ . On rappelle leur expression analytique en fonction de  $t = v_f/v_b$  et  $g$  :

$$X_f = \frac{2K_f}{\sqrt{1-g^2}} \frac{1+t\sqrt{1-g^2}}{\sqrt{1+2t\sqrt{1-g^2}+t^2}}, \quad (\text{III.82})$$

$$X_b = \frac{2K_b}{\sqrt{1-g^2}} \frac{t+\sqrt{1-g^2}}{\sqrt{1+2t\sqrt{1-g^2}+t^2}}. \quad (\text{III.83})$$

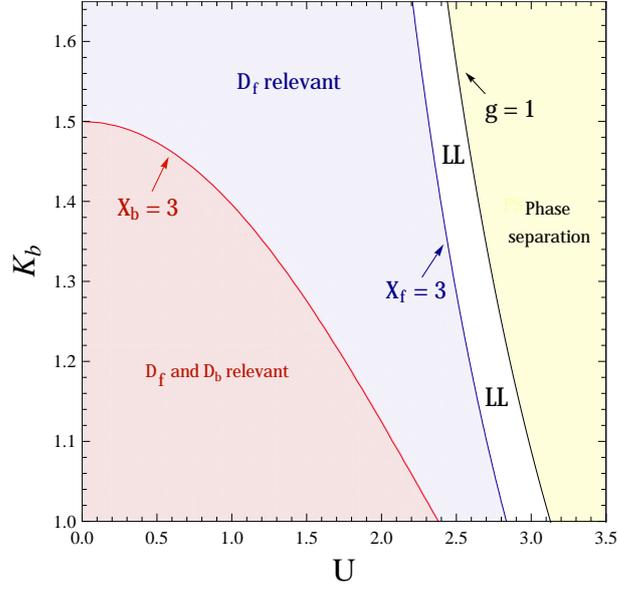


FIGURE III.4: Lignes critiques obtenues à partir des équations du flot (III.80) et (III.81), pour un rapport des vitesses  $t = 3$ , et  $K_f = 1$ . Les interactions Bose-Fermi sont paramétrisées par  $U = U_{bf}/\sqrt{v_f v_b}$ .

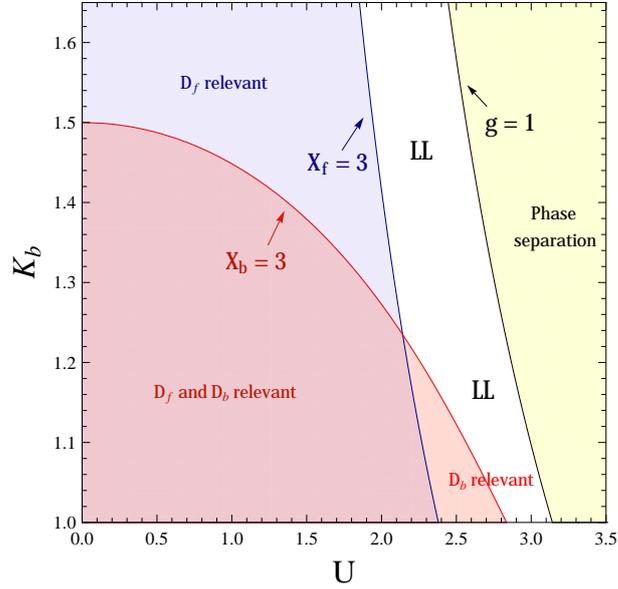


FIGURE III.5: Lignes critiques obtenues à partir des équations du flot (III.80) et (III.81), pour un rapport des vitesses  $t = 1/3$ , et  $K_f = 1$ . Les interactions Bose-Fermi sont paramétrisées par  $U = U_{bf}/\sqrt{v_f v_b}$ .

En l'absence d'interactions BF ( $g = 0$ ),  $X_f = 2K_f$  et  $X_b = 2K_b$ . Ainsi les fermions sans spin (resp. les bosons) sont localisés si  $K_f < 3/2$  (resp.  $K_b < 3/2$ ), et on retrouve les résultats de [57], énoncés au début de ce chapitre. Les interactions Bose-Fermi ont tendance à favoriser les corrélations superfluides au détriment de la formation d'ondes de densité atomiques. Formellement,  $X_f > 2K_f$  et  $X_b > 2K_b$  et il existe des régions de paramètres pour lesquels le désordre est une perturbation non-pertinente au sens du RG, bien qu'une espèce seule serait localisée. Dans le langage variationnel de la section III.3.2, cela signifie que les fluctuations quantiques sont augmentées par les interactions Bose-Fermi et tendent à augmenter la longueur de localisation. Dans les figures III.4 et III.5 nous présentons deux exemples des lignes critiques  $X_f = 3$  et  $X_b = 3$  pour deux valeurs du rapport des vitesses,  $v_f/v_b = 3$  et  $v_f/v_b = 1/3$ . Bien que le mécanisme par lequel les corrélations superfluides sont augmentées semble assez clair (la médiation d'une interaction attractive par les phonons), il faut cependant être extrêmement prudent en tirant des conclusions sur le véritable diagramme des phases à partir de la position des lignes critiques déduites des équations (III.80) and (III.81). En effet, lorsque l'une ou les deux perturbations sont pertinentes, le flot emmène les paramètres du désordre vers une région de l'espace des paramètres en dehors du régime perturbatif sur lequel est bâti le RG. Cette remarque est cruciale dans certains régimes. Par exemple dans la figure III.4, il apparaît une large portion du diagramme de phase pour laquelle  $X_b > 3$  et  $X_f < 3$  (la région bleue).  $D_f$  est relevant alors que  $D_b$  ne l'est pas. Si  $K_b > 3/2$ , la nature de cette phase est assez claire : les fermions sont localisés et les bosons sont superfluides. En effet si  $U_{bf} = 0$  alors les fermions sont localisés et les bosons ne le sont pas puisque  $K_b > 3/2$ . Les effets des interactions Bose-Fermi sont doubles. Les phonons du gaz bosonique sont le support d'une interaction effective attractive qui conduit finalement à une transition vers une phase où les fermions sont délocalisés et où les corrélations de paires sont dominantes (la phase liquide de Luttinger, à grand  $U_{bf}$ ). Par un mécanisme similaire, les phonons du gaz de fermions ont tendance à écranter la répulsion entre bosons et à favoriser la superfluidité. Notez que bien que les fermions soient localisés, ce mécanisme est possible car leur longueur de localisation  $L_f$  est grande (devant la distance inter-particule) dans la limite de faible désordre et les phonons existent bien, sur des échelles plus petites que  $L_f$ .

Maintenant, si  $K_b < 3/2$ , l'interprétation du flot du RG est plus délicate. Les phonons dans le gaz de fermions renormalisent les interactions bosoniques de telle sorte que  $X_b > 3$  et  $D_b$  ne soit pas pertinent. Cependant, dès que le cut-off UV  $\Lambda$  atteint l'inverse de la longueur de localisation des fermions, les fluctuations dans la densité fermionique disparaissent de la théorie de basse énergie et n'affectent plus les bosons. En dessous de cette valeur de cut-off, les bosons interagissent avec leurs interactions nues et, comme  $K_b < 3/2$ , le désordre est, en fait, une perturbation pertinente. Ainsi, au-dessus d'une certaine valeur  $l = l_f$ , pour laquelle  $\tilde{D}_f(l_f) = 1$  et

$L_f^{-1} = \Lambda(l_f)$ , le flot de  $\tilde{D}_b$  doit être modifié comme suit

$$\frac{d \log \tilde{D}_b}{dl} = \begin{cases} 3 - X_b & \text{si } \Lambda \gg L_f^{-1} \\ 3 - 2K_b & \text{si } \Lambda \ll L_f^{-1}. \end{cases} \quad (\text{III.84})$$

Ceci doit être vrai quelque soit la valeur de  $K_b$ . Le point important ici est que lorsque  $X_b > 3$  et  $K_b < 3/2$  les bosons sont localisés, tant que les fermions le sont aussi. Cependant la structure du flot indique que la longueur de localisation des bosons, définie comme  $L_b = \Lambda(l_b)^{-1}$  avec  $\tilde{D}_b(l_b) = 1$  serait extrêmement large dans la phase où les deux espèces sont localisées. En se basant sur ce raisonnement, nous proposons le diagramme de phase suivant, résumé dans la figure III.6, pour  $v_f > v_b$ . On identifie trois phases : le liquide de Luttinger à deux composantes (LL) lorsque le désordre n'est pertinent pour aucune des deux espèces, une phase où les fermions sont localisés alors que les bosons restent superfluides et une phase où les deux espèces sont localisées mais néanmoins couplées. Nous appelons cette dernière phase, un verre de Bose-Fermi, par analogie avec le verre de Bose. Dans cette phase, malgré la localisation, les interactions jouent un rôle très important. En particulier, la longueur de localisation des bosons doit varier considérablement avec les interactions. Nous mettons en évidence un régime de crossover, caractérisé justement par le fait que la longueur de localisation des bosons devienne bien plus grande que celle des fermions, comme l'indique le flot corrigé III.84.

Dans le cas de la figure III.5,  $v_b > v_f$ , deux de ces régions problématiques apparaissent. Dans les deux régions nous pouvons tenir un raisonnement similaire. La région où seuls les bosons sont localisés est là aussi un artefact de la procédure naïve du RG. Une procédure en deux étapes, conduit à une phase en réalité totalement localisée, mais avec des fermions présentant une longueur de localisation fortement augmentée par les interactions avec les bosons. Nous revenons plus en détail sur les spécificités du cas  $v_b > v_f$ , dans la section détaillant le calcul variationnel dans l'espace des répliques.

### III.3.4 Approche variationnelle dans l'espace des répliques

#### III.3.4.1 Introduction et dérivation des équations auto-cohérentes

Dans l'étude des systèmes 1D, un calcul variationnel est souvent un outil complémentaire par rapport à d'autres méthodes, comme le RG, pouvant s'avérer limitées dans certains régimes. En particulier, le RG ne permet pas de déterminer de façon fiable la nature des phases de couplage fort en l'absence de points fixes perturbatifs pour ces régimes de paramètres. Ainsi dans le cas du mélange, une fois le paramètre de désordre fermionique  $\tilde{D}_f$  parti en couplage fort – au-delà du régime perturbatif – le comportement des bosons est sujet à caution, quelque soient les conclusions que nous devrions tirer de la dimension de l'opérateur de

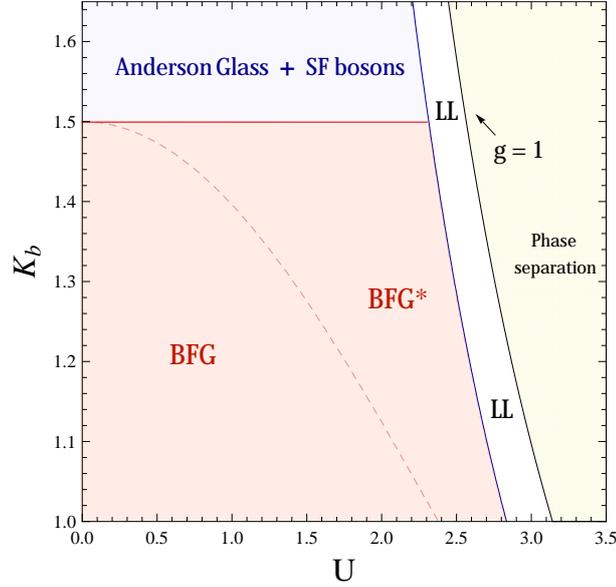


FIGURE III.6: Diagramme de phase déduit du RG en deux étapes. BFG : Bose-Fermi glass (verre de Bose-Fermi, voir texte). BFG\* est la même phase, cependant nous identifions un régime de crossover selon lequel la longueur de localisation des bosons devient beaucoup plus grande que celle des bosons.

désordre bosonique. Les exemples de calcul variationnel que nous avons donnés plus haut dans ce chapitre – pour le modèle de sine-Gordon, et pour le problème de Fukuyama-Suzumura – avaient pour but de trouver la meilleure approximation quadratique pour l’action, en se basant sur l’intuition qu’il doit exister une phase dans laquelle il est favorable énergétiquement de verrouiller le champ  $\phi$  à une certaine valeur et de considérer uniquement les fluctuations quadratiques autour de cette valeur optimale. Dans le cas désordonné on cherche plutôt une distribution de ces valeurs optimales, comme le montre la figure III.3.

L’action répliquée  $S_{\text{rep}}$ , définie dans les équations (III.57) et (III.58), fait apparaître une somme de  $n^2$  termes en cosinus – contre 1 dans le cas du modèle de sine-Gordon – nécessitant donc autant de minimisations. Du point de vue variationnel, on cherche alors une action quadratique avec une self-énergie ayant une structure plus ou moins intriquée dans l’espace des répliques. À la limite  $n \rightarrow 0$ , cette structure transparait dans certaines fonctions de corrélations. La méthode variationnelle gaussienne dans l’espace des répliques a été introduite par Parisi et Mézard dans la référence Mezard91, et ensuite développée par Le Doussal et Giamarchi dans la référence Ledoussal96, dans le but d’étudier, entre autres, le problème de la localisation dans un système 1D de particules quantiques en interactions. Ici, nous avons essayé

d'agrandir le champ d'application de cette méthode pour les problèmes quantiques, dans le cas d'un mélange de deux espèces couplées.

Avant de rentrer dans le vif du sujet et de détailler les points importants du calcul (voir à ce sujet l'annexe A), nous fixons quelques notations. Tout d'abord on récrit l'action  $S_0$  de l'équation (III.57) dans l'espace de Fourier.

$$S_0 = \frac{1}{2} \frac{1}{\beta L} \sum_{q, i\omega_n} \phi_\alpha^a(q, i\omega_n) (G_0^{-1})_{\alpha\beta}^{ab}(q, i\omega_n) \phi_\beta^b(-q, -i\omega_n), \quad (\text{III.85})$$

où  $\alpha, \beta = f, b$  tandis que les indices latin  $a, b$  vont de 1 à  $n$ , le nombre de répliques. Il y a deux sommations implicites sur  $\alpha, \beta$  et  $a, b$ .  $(G_0^{-1})_{\alpha\beta}^{ab}$  est une  $2n \times 2n$  matrice dont la structure est :

$$G_0^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{v_f}{\pi K_f} \left[ \frac{\omega_n^2}{v_f^2} + q^2 \right] 1_n & \frac{U_{bf}}{\pi^2} q^2 1_n \\ \frac{U_{bf}}{\pi^2} q^2 1_n & \frac{v_b}{\pi K_b} \left[ \frac{\omega_n^2}{v_b^2} + q^2 \right] 1_n \end{pmatrix} \quad (\text{III.86})$$

avec  $1_n$  la matrice unité de taille  $n$ . Nous cherchons à remplacer  $S_{\text{rep}}$  (équations (III.57) et (III.58)) par la meilleure approximation quadratique,  $S_G$ , telle que

$$S_G = \frac{1}{2} \frac{1}{\beta L} \sum_{q, i\omega_n} \phi_\alpha^a(q, i\omega_n) (G^{-1})_{\alpha\beta}^{ab}(q, i\omega_n) \phi_\beta^b(-q, -i\omega_n), \quad (\text{III.87})$$

avec  $(G^{-1})_{\alpha\beta}^{ab} = (G_0^{-1})_{\alpha\beta}^{ab} - \sigma_{\alpha\beta}^{ab}$ , et  $\sigma_{\alpha\beta}^{ab}$  la self-énergie. La meilleure fonction  $G$  est obtenue en minimisant l'énergie libre variationnelle,  $F_{\text{var}} = F_G + \langle S - S_G \rangle_G / \beta$  par rapport à  $G_{\alpha\beta}^{ab}$ . On trouve l'expression suivante pour  $F_{\text{var}}$  :

$$\begin{aligned} F_{\text{var}} &= -\frac{1}{2\beta} \sum_{q, i\omega_n} \text{Tr} \log[G(q, i\omega_n)] + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \sum_{q, i\omega_n} (G_0^{-1})_{\alpha\beta} (q, i\omega_n) \text{Tr}[G_{\alpha\beta}(q, i\omega_n)] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{a, b} L \int d\tau [V_F[F^{ab}(\tau)] + V_B[B^{ab}(\tau)]] \end{aligned} \quad (\text{III.88})$$

avec

$$F^{ab}(\tau) = \langle [\phi_f^a(x, \tau) - \phi_f^a(x, 0)]^2 \rangle_G, \quad (\text{III.89})$$

$$B^{ab}(\tau) = \langle [\phi_b^a(x, \tau) - \phi_b^a(x, 0)]^2 \rangle_G, \quad (\text{III.90})$$

et  $V_F(x) = -2 \frac{\rho_f^2 D_f}{\hbar} e^{-2x}$  and  $V_B(x) = -2 \frac{\rho_b^2 D_b}{\hbar} e^{-2x}$ . Dans le cas d'un désordre statique, les quantités hors-diagonales (par exemple,  $F^{ab}$  ou  $B^{ab}$  avec  $a \neq b$ ) ne dépendent pas du temps [58], ceci parce que dans chaque réalisation du désordre, le potentiel aléatoire ne dépend pas de  $\tau$ . Avant de moyenner sur le désordre, les différentes

répliques ne sont pas couplées dans le Hamiltonien, et les fonctions de Green correspondantes ne dépendent pas du temps. La moyenne sur les réalisations du désordre ne doit pas modifier cette observation. Nous dérivons alors les équations du point selle :

$$\begin{aligned}\sigma_{ff}^{aa}(q, \omega_n) &= 2 \int_0^\beta d\tau (1 - \cos[\omega_n \tau]) V'_F(F^{aa}(\tau)) \\ &+ 2 \int_0^\beta d\tau \sum_{b \neq a} V'_F[F^{ab}],\end{aligned}\tag{III.91}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{bb}^{aa}(q, \omega_n) &= 2 \int_0^\beta d\tau (1 - \cos[\omega_n \tau]) V'_B(B^{aa}(\tau)) \\ &+ 2 \int_0^\beta d\tau \sum_{b \neq a} V'_B[B^{ab}],\end{aligned}\tag{III.92}$$

$$\sigma_{ff}^{ab}(q, \omega_n) = -2\beta\delta_{n,0}V'_F(F^{ab}) \quad (a \neq b),\tag{III.93}$$

$$\sigma_{bb}^{ab}(q, \omega_n) = -2\beta\delta_{n,0}V'_B(B^{ab}) \quad (a \neq b),\tag{III.94}$$

$$\sigma_{fb}^{ab}(q, \omega_n) = \sigma_{bf}^{ab}(q, \omega_n) = 0 \quad (\forall a, b).\tag{III.95}$$

L'étape suivante consiste à prendre la limite  $n \rightarrow 0$ . On utilise pour ce faire la paramétrisation de Parisi pour les matrices  $0 \times 0$ . Si  $A$  est une matrice dans l'espace des répliques, à la limite  $n \rightarrow 0$  elle est paramétrisée par un couple  $(\tilde{a}, a(u))$  où  $\tilde{a}$  paramétrise les éléments diagonaux et  $a(u)$  est une fonction de  $u \in [0, 1]$ , paramétrisant les éléments hors-diagonaux. La self-énergie est une matrice s'écrivant alors

$$\sigma(q, \omega_n = 0) = \begin{pmatrix} [\tilde{\sigma}_f, \sigma_f(u)] & 0 \\ 0 & [\tilde{\sigma}_b, \sigma_b(u)] \end{pmatrix}\tag{III.96}$$

Ensuite, il est nécessaire d'inverser  $G^{-1}$  pour résoudre les équations de point-selle. Plusieurs types de solutions peuvent alors exister. L'énergie libre est une fonction symétrique sous la permutation d'une ou plusieurs lignes et colonnes de la matrice  $G^{ab}$  et on est donc tenté de chercher des solutions qui respectent cette symétrie, avec des fonctions  $\sigma_f(u)$  et/ou  $\sigma_b(u)$  constantes. Cependant ces solutions ne sont pas stables partout dans l'ensemble des paramètres, et, pour décrire les phases localisées il est nécessaire de chercher des solutions brisant la symétrie des répliques. Ces dernières font intervenir des fonctions  $\sigma_f(u)$ ,  $\sigma_b(u)$  non-constantes. Nous verrons que la structure détaillée de ces fonctions renseigne sur les propriétés de localisation du système – en particulier sur l'existence et l'interprétation d'une ou plusieurs longueurs de localisation.

Notre étude par le RG semble indiquer deux types de phases localisées : une où seule une espèce est localisée et une autre où les deux espèces sont localisées. Dans ce

qui suit nous nous concentrons sur le cas  $v_f > v_b$  et le diagramme de phase proposé dans la figure III.6, et cherchons à déterminer la forme des solutions variationnelles. Les calculs sont largement détaillés dans l'annexe.

### III.3.4.2 Brisure à une marche de la symétrie des répliques (cas où $v_f > v_b$ )

D'après [58], la phase localisée pour des fermions dans un potentiel aléatoire est bien décrite par une solution brisant la symétrie des répliques (on appelle solution RSB, pour Replica Symmetry Breaking, une telle solution). Plus précisément, il existe une solution stable, avec une brisure de symétrie de niveau 1 (on parlera de solution 1RSB). Cela signifie que  $\sigma_f(u)$  est une fonction marche, avec  $\sigma_f(u < u_f) = 0$  et  $\sigma_f(u > u_f) = 1$ , et  $u_f$  un nouveau paramètre variationnel. Dans notre système, sur la ligne  $U_{bf} = 0$  les deux composantes du gaz sont découplées et il existe une solution avec une brisure de symétrie 1RSB pour les fermions (les fermions sans interaction sont toujours localisés) et qui est soit symétrique ( $K_b > 3/2$ ) soit 1RSB également ( $K_b < 3/2$ ), pour les bosons. Le RG (voir le diagramme III.6) semble indiquer que pour  $K_b > 3/2$  et  $U_{bf} \neq 0$  il existe une phase où les fermions sont localisés et les bosons superfluides, tant que les interactions Bose-Fermi ne sont pas trop fortes. Pour décrire cette phase on cherche alors une solution variationnelle, symétrique dans le secteur bosonique et 1RSB dans le secteur fermionique. Les équations auto-cohérentes ont la forme suivante :

$$\hat{\Sigma}_f^{3/2} = \frac{8}{\sqrt{1-g^2}} \frac{\rho_f^2 D_f}{\hbar} \left( \frac{\pi K_f}{v_f} \right)^2 e^{-2F} \quad (\text{III.97})$$

$$\begin{aligned} \hat{I}_F(\omega_n) &= 2 \frac{\pi K_f}{v_f} \int_0^\beta d\tau (1 - \cos[\omega_n \tau]) (V'_F[\tilde{F}(\tau)] - V'_F[F]), \\ \hat{I}_B(\omega_n) &= 2 \frac{\pi K_b}{v_b} \int_0^\beta d\tau (1 - \cos[\omega_n \tau]) V'_B[\tilde{B}(\tau)], \end{aligned} \quad (\text{III.98})$$

avec

$$F = \frac{2}{\beta L} \sum_{q, i\omega_n} \frac{\pi K_f}{v_f} \frac{\frac{\omega_n^2}{v_b^2} + q^2 + \hat{I}_B(\omega_n)}{\left( \frac{\omega_n^2}{v_b^2} + q^2 + \hat{I}_B(\omega_n) \right) \left( \frac{\omega_n^2}{v_f^2} + q^2 + \hat{I}_F(\omega_n) + \hat{\Sigma}_f \right) - g^2 q^4} \quad (\text{III.99})$$

$$\tilde{F}(\tau) = \frac{2}{\beta L} \sum_{q, i\omega_n} \frac{\pi K_f}{v_f} \frac{(1 - \cos[\omega_n \tau]) \left( \frac{\omega_n^2}{v_b^2} + q^2 + \hat{I}_B(\omega_n) \right)}{\left( \frac{\omega_n^2}{v_b^2} + q^2 + \hat{I}_B(\omega_n) \right) \left( \frac{\omega_n^2}{v_f^2} + q^2 + \hat{I}_F(\omega_n) + \hat{\Sigma}_f \right) - g^2 q^4} \quad (\text{III.100})$$

$$\tilde{B}(\tau) = \frac{2}{\beta L} \sum_{q, i\omega_n} \frac{\pi K_b}{v_b} \frac{(1 - \cos[\omega_n \tau]) \left( \frac{\omega_n^2}{v_f^2} + q^2 + \hat{I}_F(\omega_n) + \hat{\Sigma}_f \right)}{\left( \frac{\omega_n^2}{v_b^2} + q^2 + \hat{I}_B(\omega_n) \right) \left( \frac{\omega_n^2}{v_f^2} + q^2 + \hat{I}_F(\omega_n) + \hat{\Sigma}_f \right) - g^2 q^4} \quad (\text{III.101})$$

On peut reconnaître dans  $F$  et  $\tilde{F}$  le propagateur fermionique. Un terme de masse,  $\hat{\Sigma}_F$ , est généré par la brisure de symétrie des répliques, ainsi que deux fonctions  $\hat{I}_f(\omega_n)$  et  $\hat{I}_b(\omega_n)$  venant modifier la dynamique du système. Nous n'avons pas cherché à résoudre numériquement, de façon complète ce système. La présence des fonctions  $\hat{I}_f(\omega_n)$  et  $\hat{I}_b(\omega_n)$  rend les choses assez compliquées. Nous procédons alors en plusieurs étapes pour analyser ces équations.

Supposons tout d'abord que  $\hat{I}_f(\omega_n)$  et  $\hat{I}_b(\omega_n)$  sont nulles. Dans ce sens, nous sommes plus proches de la méthode variationnelle à la Fukuyama-Suzumura, cependant avec un traitement plus précis des fluctuations quantiques ne nécessitant pas une connaissance détaillée de la solution classique sous-jacente. Nous montrons que, malgré cette approximation, nous retrouvons des résultats raisonnables. Tout d'abord nous proposons d'affiner l'analyse du RG en calculant le flot de  $\tilde{D}_b$  lorsque les bosons sont couplés à des fermions localisés. Pour ce faire, nous perturbons l'action Gaussienne variationnelle  $S_G$  avec un terme de désordre ne se couplant qu'aux bosons :

$$S = S_G - \frac{D_b \rho_b^2}{\Lambda^3 \hbar} \sum_{a,b} \Lambda^3 \int dx d\tau d\tau' \cos[2\phi_b^a(x, \tau) - 2\phi_b^b(x, \tau')] \quad (\text{III.102})$$

Le propagateur  $G$  est symétrique dans le secteur bosonique et 1RSB dans le secteur fermionique. Pour obtenir le flot de  $\tilde{D}_b$ , nous procédons comme précédemment et intégrons les degrés de liberté de petites longueurs d'onde, entre  $\Lambda'$  et  $\Lambda$ , le cut-off original. Au premier ordre en  $D_b$ , l'équation du flot est obtenue d'après l'équation

$$\tilde{D}_b(\Lambda') = \tilde{D}_b(\Lambda) \left( \frac{\Lambda'}{\Lambda} \right)^{-3} \langle e^{i2\phi_b^a(x,\tau)} \rangle_{>}^2. \quad (\text{III.103})$$

$\langle e^{i2\phi_b^a(x,\tau)} \rangle_{>}^2$  n'est liée qu'à la partie diagonale de  $G_{bb}$ , c'est-à-dire  $\tilde{G}_{bb}(q, \omega_n)$ . On trouve

$$\langle e^{i2\phi_b^a(x,\tau)} \rangle_{>}^2 = \exp \left[ - \int_{\Lambda'}^{\Lambda} dq \mathcal{J}_b(q) \right], \quad (\text{III.104})$$

avec

$$\mathcal{J}_b(q) = \frac{2K_b \left[ t(q^2 + \hat{\Sigma}_f) + q\sqrt{q^2(1-g^2) + \hat{\Sigma}_f} \right]}{q\sqrt{q^2(1-g^2) + \hat{\Sigma}_f} \sqrt{q^2(1+t^2) + t^2\hat{\Sigma}_f + 2tq\sqrt{q^2(1-g^2) + \hat{\Sigma}_f}}}. \quad (\text{III.105})$$

Finalement, en prenant  $\Lambda' = \Lambda(1 + dl)$ , l'équation du flot est

$$\frac{d \log D_b}{dl} = 3 - \Lambda(l) \mathcal{J}_b(\Lambda(l)). \quad (\text{III.106})$$

$\mathcal{J}_b(q)$  décroît en loi de puissance à petit et grand  $\Lambda$  mais avec des préfacteurs différents. En effet

$$\Lambda \mathcal{J}_b(\Lambda) = 2K_b \quad \text{lorsque } \Lambda \ll \left( \hat{\Sigma}_f / \sqrt{1-g^2} \right)^{1/2}, \quad (\text{III.107})$$

$$\Lambda \mathcal{J}_b(\Lambda) = X_b \quad \text{lorsque } \Lambda \gg \left( \hat{\Sigma}_f / \sqrt{1-g^2} \right)^{1/2}. \quad (\text{III.108})$$

L'allure de  $\mathcal{J}_b$  est représentée dans la figure III.7

Le flot modifié de  $\tilde{D}_b$  est tracé dans la figure III.8. Tout ceci confirme l'intuition développée dans la section III.3.3.1. La masse fermionique  $\hat{\Sigma}_f$  définit une échelle de longueur au-delà de laquelle les fluctuations de densité fermionique sont intégrées et les bosons interagissent avec leurs interactions nues. En ce sens, on peut relier la longueur de localisation des fermions  $L_f$  à la masse par

$$L_f = \left( \frac{\sqrt{1-g^2}}{\hat{\Sigma}_f} \right)^{1/2}. \quad (\text{III.109})$$

Nous reviendrons sur cette équation dans la section III.4.1.1 lorsque nous calculerons les fonctions de corrélations pour les fermions. Cela confirme aussi que pour des valeurs de  $K_b$  plus petites que 3/2, le désordre est relevant pour les bosons et que la solution avec une brisure de la symétrie des répliques uniquement dans le secteur fermionique n'est pas suffisante. Pour décrire plus avant la phase totalement localisée, on doit chercher une solution brisant la symétrie des répliques dans les deux secteurs.

### III.3.4.3 Brisure à deux marches de la symétrie des répliques (cas où $v_f > v_b$ )

Nous avons trouvé qu'il est impossible d'obtenir une solution auto-cohérente avec une brisure de symétrie 1RSB dans les deux secteurs. Il est nécessaire de chercher une solution avec une brisure de symétrie de niveau 2, dans au moins un des deux secteurs. La structure de cette solution, et son obtention, sont détaillées dans l'annexe A. Les self-énergies ont la forme suivante :  $\sigma_f(u)$  est une fonction à deux marches,  $\sigma_f(u < u_1) = 0$ ,  $\sigma_f(u_1 < u < u_2) = \sigma_f^{(1)}$  et  $\sigma_f(u_2 < u < 1) = \sigma_f^{(2)}$ , tandis que  $\sigma_b(u)$  est une fonction à une marche,  $\sigma_b(u < u_2) = 0$ ,  $\sigma_b(u_2 < u < u_1) = \sigma_b^{(2)}$ . La structure de la solution est quelque peu réminiscente des arguments variationnels que nous avons développés dans la section III.3.2 pour la solution classique. Nous avons avancé que dans la situation où  $L_b > L_f$  – ce qui est le cas dans le diagramme de la figure III.12 et apparent au niveau de la solution numérique dans les figures III.9 et III.11 – la densité des fermions devrait avoir une structure emboîtée, lorsqu'elle se divise en domaines pour accommoder la phase aléatoire et la densité bosonique.

Dans les figures III.9, III.10 et III.11, nous montrons des exemples de solution, lorsque  $U_{bf}$  augmente, pour différentes valeurs de  $K_b$ . Notez que la masse fermionique

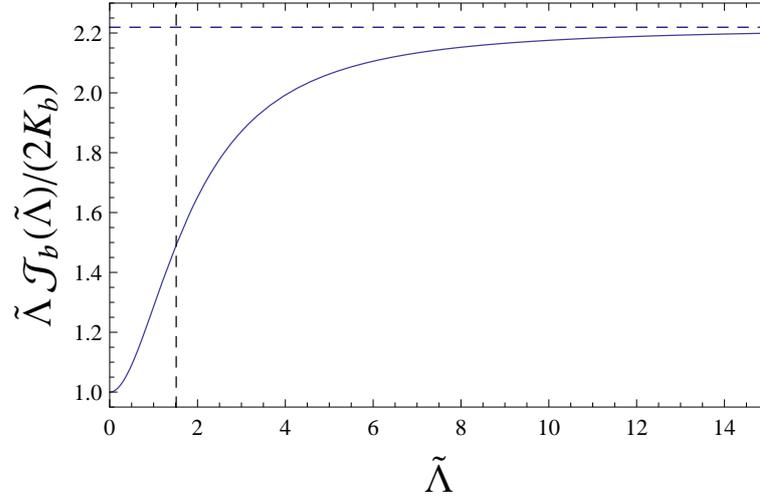


FIGURE III.7: Crossover pour la fonction  $\mathcal{J}_b$  définie en eq. (III.105), pour  $t = 3$  et  $g = 0.9$ . Nous avons tracé  $\tilde{\Lambda} \mathcal{J}_b(\tilde{\Lambda}) / (2K_b)$ , avec  $\tilde{\Lambda} = \Lambda / \sqrt{\hat{\Sigma}_f}$ . Cette fonction tend vers 1 à petit moment et sature à  $X_b / (2K_b)$  aux grands moments. Nous identifions une région de crossover entre ces deux comportements  $\Lambda = (\hat{\Sigma}_f / \sqrt{1 - g^2})^{1/2}$  (ligne vertical pointillée).

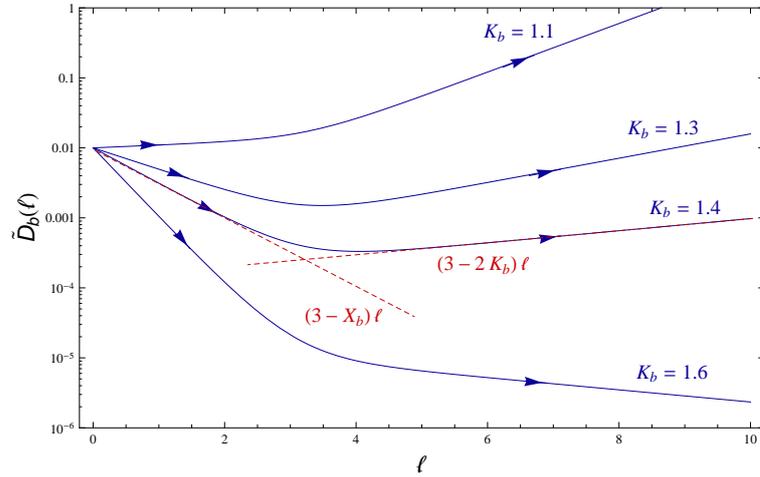


FIGURE III.8: Flot modifié pour les bosons, en utilisant la solution Gaussienne variationnelle.

est reliée à la self-énergie à deux marches selon

$$\Sigma_f = \Sigma_f^{(1)} + \Delta\Sigma_f^{(2)}, \quad (\text{III.110})$$

avec  $\Sigma_f^{(1)} = u_1\sigma_f^{(1)}$  et  $\Delta\Sigma_f^{(2)} = u_2(\sigma_f^{(2)} - \sigma_f^{(1)})$ . La masse bosonique est donnée par  $\Sigma_b = u_2\sigma_b^{(2)}$  et  $L_b = \hat{\Sigma}_b^{-1/2}$ . La frontière entre la région totalement localisée et les autres régions est obtenue pour  $\Delta\Sigma_f^{(2)} = 0$ . Lorsque cette condition est remplie, soit  $\Sigma_f^{(1)} \neq 0$ ,  $\Sigma_b = 0$  alors le système est dans la région avec la brisure 1RSB dans le secteur fermionique, soit  $\Sigma_f^{(1)} = 0$ ,  $\Sigma_b = 0$  alors le système est dans la phase symétrique (liquide de Luttinger).

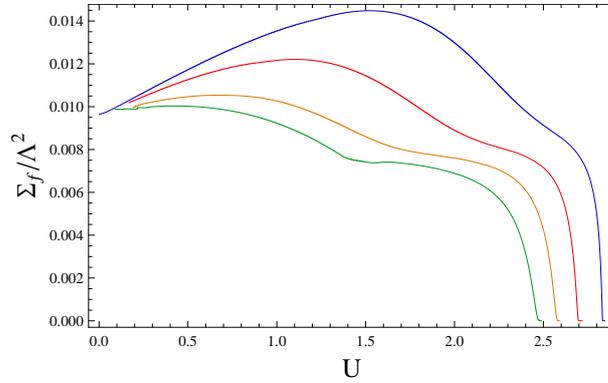


FIGURE III.9: Masse des fermions  $\hat{\Sigma}_f$  en fonction de  $U = U_{bf}/\sqrt{v_f v_b}$ , pour (de haut en bas)  $K_b = 1, 1.1, 1.2, 1.3$ .

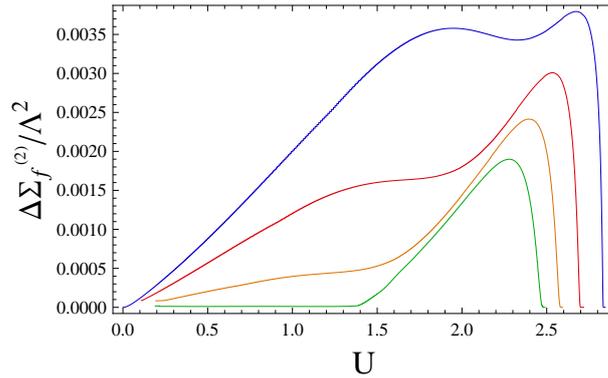


FIGURE III.10:  $\Delta\hat{\Sigma}_f^{(2)}$  en fonction de  $U = U_{bf}/\sqrt{v_f v_b}$ , pour (de haut en bas)  $K_b = 1, 1.1, 1.2, 1.3$ . Notez que  $\Delta\hat{\Sigma}_f^{(2)}$  s'annule en même temps que  $\hat{\Sigma}_f$  lorsqu'on augmente  $U$ .

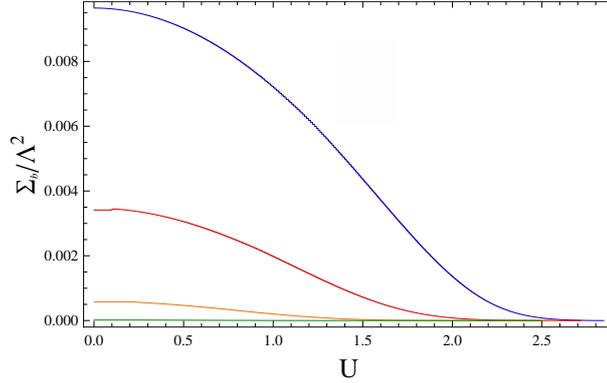


FIGURE III.11: Masse des bosons  $\hat{\Sigma}_b$  en fonction de  $U = U_{bf}/\sqrt{v_f v_b}$ , pour (de haut en bas)  $K_b = 1, 1.1, 1.2, 1.3$ .

Remarquons deux points importants. Dès que  $U_{bf} \neq 0$ , alors  $\hat{\Sigma}_b \leq \hat{\Sigma}_f$ , ce qui implique que la longueur de localisation fermionique est plus petite que la longueur de localisation bosonique. Deux effets sont responsables de cette caractéristique du système. Tout d'abord, si  $K_b > 1$ , les fluctuations quantiques sont plus importantes pour les bosons que pour les fermions (pour lesquels  $K_f = 1$ ), ce qui a tendance à augmenter la longueur de localisation des bosons par rapport à celles des fermions (le désordre accroche mieux l'onde de densité fermionique que l'onde de densité bosonique). De plus, les interactions Bose-Fermi augmentent les corrélations superfluides des deux composantes. Cependant, comme nous l'avons rappelé dans la section II.3.3 du chapitre II, les corrélations superfluides de l'espèce la plus lente sont plus fortement favorisées. Ce comportement transparaît dans les figures III.9 et III.11, où l'on voit que la masse de l'espèce lente (ici les bosons) atteint des valeurs extrêmement faibles, assez loin de la vraie transition vers le liquide de Luttinger, alors que la masse des fermions (l'espèce rapide) est faiblement renormalisée (sauf à proximité immédiate de la transition). Ce point est crucial pour l'observation éventuelle de ces phases : dans un système de taille finie, les bosons peuvent apparaître délocalisés du simple fait que la longueur de localisation est plus grande que la taille du système. Nous reviendrons sur ce point dans la section sur les observables expérimentales.

#### III.3.4.4 Étude du cas particulier $v_b > v_f$ , inversion de la brisure de symétrie

Le diagramme de la figure III.5 fait apparaître deux zones mixtes, où une des espèces est localisée mais pas l'autre. Pour les mêmes raisons que dans le cas  $v_f > v_b$ , ces deux phases sont un artéfact de la procédure de RG et il est nécessaire, pour chacune d'elle, de procéder en deux étapes. Nous avons aussi cherché une solution variationnelle dans ce cas. Avant de commenter la figure III.13, faisons plusieurs remarques afin d'obtenir une intuition de ces résultats.

Dans le cas précédent,  $v_f > v_b$ , nous avons établi que la longueur de localisa-

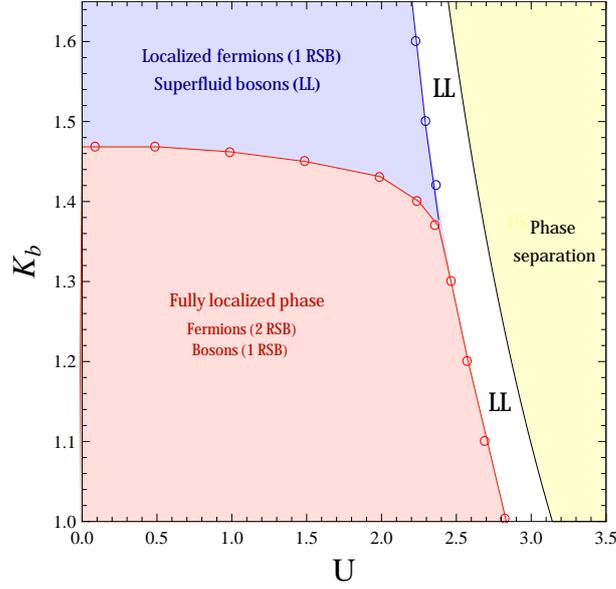


FIGURE III.12: Diagramme des phases obtenu par la méthode variationnelle des répliques. Ici,  $\tilde{D}_f = \tilde{D}_b = 0.005$  et  $v_f/v_b = 3$ .

tion des bosons est toujours plus grande que celle des fermions, du fait des plus grandes fluctuations quantiques ( $K_b \geq K_f$ ) et de la renormalisation des corrélations superfluides de l'espèce lente. Dans le cas  $v_b > v_f$ , la situation est différente. Sur la ligne  $K_b = K_f = 1$ , les bosons sont maintenant l'espèce rapide, et la longueur de localisation des fermions est plus grande que celle des bosons. Au niveau de la solution variationnelle, l'ordre de la brisure de la symétrie des répliques est inversé. Néanmoins, lorsque  $K_b > 1$ , les plus grandes fluctuations quantiques pour les bosons contrebalancent l'effet des interactions Bose-Fermi, et si  $K_b$  est suffisamment fort, la longueur de localisation des bosons devient de nouveau plus grande que celles des fermions. Cela se traduit dans la figure III.13 par une inversion de la brisure de symétrie. La frontière (triangles oranges) est obtenue en partant de la région où les fermions sont 2RSB et les bosons 1RSB. En diminuant  $K_b$  à  $U_{bf}$  fixé, cette solution cesse d'exister numériquement pour une valeur critique de  $K_b$ . Sous cette valeur critique, nous trouvons numériquement une solution 2RSB pour les bosons, et 1RSB pour les fermions. Néanmoins, il nous faut préciser que la solution numérique présente une hystérésis. Nous obtenons une frontière différente en augmentant  $K_b$  à  $U_{bf}$  fixé. Ceci peut s'expliquer par l'asymétrie des équations pour les solutions 2RSB + 1RSB (voir l'annexe A),  $K_b$  jouant un rôle privilégié. Encore une fois, la différence entre les cas  $v_f > v_b$  et  $v_b > v_f$  se joue ici sur cette inversion des longueurs de localisation n'existant que dans le cas  $v_b > v_f$ . À ce stade, il semble que la recherche d'autres solutions soit nécessaire pour décrire complètement la physique de ce système à l'aide

de solutions variationnelles brisant la symétrie des répliques.

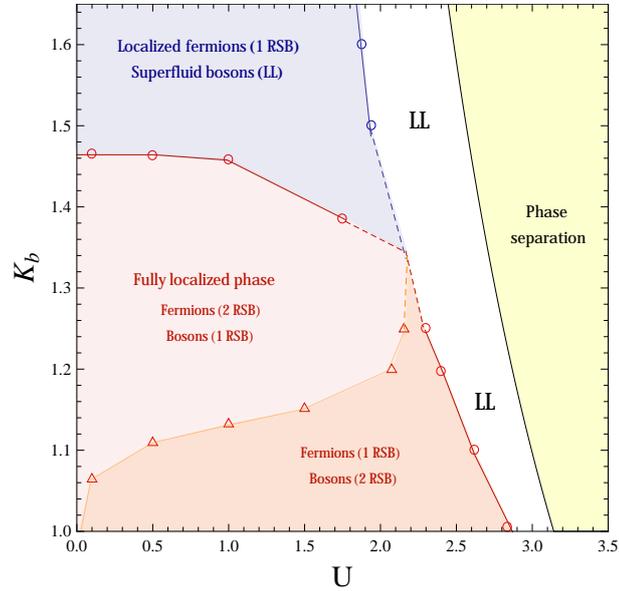


FIGURE III.13: Diagramme des phases obtenu par la méthode variationnelle des répliques pour  $\tilde{D}_f = \tilde{D}_b = 0.005$  et  $v_f/v_b = 1/3$ . Dans la région totalement localisée, une ligne critique sépare deux régions où l'ordre de la brisure de symétrie est inversé. Il existe cependant un comportement hystérétique (non représenté sur la figure), limitant la portée de cette solution (voir le texte principal).

## III.4 Observables expérimentales

### III.4.1 Calcul de quelques fonctions de corrélation

#### III.4.1.1 Corrélations de densité

La méthode variationnelle des répliques permet de calculer plusieurs fonctions de corrélation en utilisant l'action quadratique adéquate dans chaque phase. Nous avons vu dans les sections précédentes que la localisation d'un gaz quantique unidimensionnel par un potentiel aléatoire peut s'interpréter sous l'angle de l'accrochage de l'onde de densité atomique. Au delà d'une certaine longueur, la longueur de localisation, les corrélations de la phase de l'onde de densité sont perdues. Pour mettre ce phénomène en évidence on calcule les corrélateurs  $C_f(x) = \overline{\langle e^{i2\phi_f(x)} e^{-i2\phi_f(0)} \rangle}$  et  $C_b(x) = \overline{\langle e^{i2\phi_b(x)} e^{-i2\phi_b(0)} \rangle}$  dans les différentes phases. Dans tous les cas on a

$$C_f(x) = \exp[-x/L_{f,\text{FW}}] \exp \left[ -2 \frac{1}{\beta L} \sum_{q, \omega_n} (1 - \cos[qx]) \widetilde{G}_{ff}(q, \omega_n) \right], \quad (\text{III.111})$$

$$C_b(x) = \exp[-x/L_{b,\text{FW}}] \exp \left[ -2 \frac{1}{\beta L} \sum_{q, \omega_n} (1 - \cos[qx]) \widetilde{G}_{bb}(q, \omega_n) \right]. \quad (\text{III.112})$$

où l'on a pris en compte la contribution des processus de diffusion de petites impulsions, initialement absorbées dans le Hamiltonien quadratique selon (III.40). La diffusion vers l'avant conduit à une décroissance exponentielle des fonctions de corrélations  $C_f$  et  $C_b$  sur des longueurs typiques

$$L_{f,\text{FW}} = \frac{(1 - g^2)^2}{K_f^2/v_f^2} \left[ \alpha_f - \alpha_b g \sqrt{\frac{v_f K_b}{v_b K_f}} \right]^{-2} D^{-1}, \quad (\text{III.113})$$

$$L_{b,\text{FW}} = \frac{(1 - g^2)^2}{K_b^2/v_b^2} \left[ \alpha_b - \alpha_f g \sqrt{\frac{v_b K_f}{v_f K_b}} \right]^{-2} D^{-1}. \quad (\text{III.114})$$

Dans les phases localisées, les termes de rétrodiffusion conduisent aussi à une décroissance exponentielle des corrélations du champ  $\phi$ . Néanmoins, comme nous allons le voir, les termes de rétrodiffusion conduisent aussi à la décroissance exponentielle des corrélations superfluides, contrairement à la diffusion vers l'avant. Dans un premier temps, il est tout de même instructif de calculer explicitement  $C_f$  et  $C_b$  afin d'extraire la véritable longueur de localisation et de comparer les résultats à la solution partielle donnée par l'approche de Fukuyama et Suzumura. Considérons chacune des phases l'une après l'autre.

#### a) Phase liquide de Luttinger

Dans cette phase, les self-énergies  $\sigma_f$  et  $\sigma_b$  sont nulles et le gaz n'est pas accroché par

le désordre. L'inversion de la matrice  $G^{-1}$  conduit à la solution suivante (cf. annexe A)

$$\widetilde{G}_{ff}(q, \omega_n) = \frac{\pi K_f}{v_f} \frac{q^2 + b(\omega_n)}{[q^2 + b(\omega_n)][q^2 + f(\omega_n)] - g^2 q^4}, \quad (\text{III.115})$$

$$\widetilde{G}_{bb}(q, \omega_n) = \frac{\pi K_b}{v_b} \frac{q^2 + b(\omega_n)}{[q^2 + f(\omega_n)][q^2 + f(\omega_n)] - g^2 q^4}. \quad (\text{III.116})$$

On a introduit la notation suivante, qui servira dans toute la section,  $b(\omega_n) = \omega_n^2/v_b^2 + \hat{I}_B(\omega_n) + \hat{\Sigma}_b$  et  $f(\omega_n) = \omega_n^2/v_f^2 + \hat{I}_F(\omega_n) + \hat{\Sigma}_f$ . Dans le cas présent  $\hat{\Sigma}_f = \hat{\Sigma}_b = 0$ . On retrouve donc les propagateurs du liquide de Luttinger, avec simplement une renormalisation du comportement en fréquence par les fonctions  $\hat{I}_F(\omega_n)$  et  $\hat{I}_B(\omega_n)$ . Notez que les fonctions  $\hat{I}_F$  et  $\hat{I}_B$  sont directement proportionnelles à  $\tilde{D}_f$  et  $\tilde{D}_b$ . Bien que nous n'ayons pas résolu complètement les équations auto-cohérentes pour déterminer ces fonctions, on s'attend à ce que, dans la limite de désordre très faible, elles ne modifient pas fortement le comportement des propagateurs. Dans la phase liquide de Luttinger,  $C_f(x)$  et  $C_b(x)$  décroissent algébriquement à courte distance et sont coupées à longue distance par une décroissance exponentielle venant des processus de diffusion vers l'avant sur le potentiel aléatoire.

### b) Phase où les fermions sont localisés et les bosons superfluides

Dans cette phase, nous avons trouvé une solution variationnelle 1RSB dans le secteur fermionique et symétrique dans le secteur bosonique. Dans ce cas l'inversion de la matrice  $G^{-1}$  conduit à

$$\begin{aligned} \widetilde{G}_{ff}(q, \omega_n) = & \frac{\pi K_f}{v_f} \frac{q^2 + b(\omega_n)}{[q^2 + b(\omega_n)][q^2 + f(\omega_n)] - g^2 q^4} \\ & + \delta_{n,0} \frac{\pi K_f}{v_f} \frac{1}{1 - g^2} \frac{\sigma_f}{q^2 [q^2 (1 - g^2) + \hat{\Sigma}_f]}, \end{aligned} \quad (\text{III.117})$$

$$\begin{aligned} \widetilde{G}_{bb}(q, \omega_n) = & \frac{\pi K_b}{v_b} \frac{q^2 + f(\omega_n)}{[q^2 + b(\omega_n)][q^2 + f(\omega_n)] - g^2 q^4} \\ & + \delta_{n,0} \frac{\pi K_b}{v_b} \frac{g^2}{1 - g^2} \frac{\sigma_f}{q^2 [q^2 (1 - g^2) + \hat{\Sigma}_f]}. \end{aligned} \quad (\text{III.118})$$

Dans chacun des propagateurs, le premier terme contrôle les corrélations algébriques à courte distance. Le deuxième terme, une fois la somme sur les impulsions calculée, conduit à une décroissance exponentielle à longue distance. En effet

$$\frac{1}{L} \sum_q \frac{1 - \cos[qx]}{q^2 [q^2 (1 - g^2) + \hat{\Sigma}_f]} = \frac{1}{2\hat{\Sigma}_f} \left[ x + \sqrt{\frac{1 - g^2}{\hat{\Sigma}_f}} \left( e^{-x \sqrt{\frac{\hat{\Sigma}_f}{1 - g^2}}} - 1 \right) \right]. \quad (\text{III.119})$$

De plus on a  $\sigma_f = \beta \frac{v_f}{\pi K_f} \sqrt{1 - g^2 \Sigma_f^{3/2}}$ , on peut donc isoler dans  $C_f$  une décroissance exponentielle de la forme

$$C_f(x) \sim e^{-x/L_f}, \quad (\text{III.120})$$

avec

$$L_f = \left( \frac{1 - g^2}{\hat{\Sigma}_f} \right)^{1/2}, \quad (\text{III.121})$$

la longueur au-delà de laquelle les corrélations de la phase de l'onde de densité sont perdues à cause de la rétrodiffusion, c'est-à-dire la longueur de localisation. Un point remarquable est que les corrélations bosoniques présentent aussi une décroissance exponentielle supplémentaire, bien que le désordre ne soit pas pertinent. Cette contribution vient directement du terme d'interaction Bose-Fermi de la forme  $\nabla\phi_f \nabla\phi_b$  où  $\nabla\phi_f$  se comporte ici comme un potentiel aléatoire induisant de la diffusion vers l'avant !

### c) Phase totalement localisée

Les résultats concernant la solution 2RSB sont certainement plus délicats à interpréter. Pour  $\widetilde{G}_{ff}(q, \omega_n)$  et  $\widetilde{G}_{bb}(q, \omega_n)$  on trouve

$$\begin{aligned} \widetilde{G}_{ff}(q, \omega_n) &= \frac{\pi K_f}{v_f} \frac{q^2 + b(\omega_n)}{[q^2 + b(\omega_n)][q^2 + f(\omega_n)] - g^2 q^4} + \delta_{n,0} \frac{\pi K_f}{v_f} \frac{1}{1 - g^2} \frac{\sigma_f^{(1)}}{q^2 [q^2 (1 - g^2) + \hat{\Sigma}_f^{(1)}]} \\ &+ \delta_{n,0} \frac{\pi K_f}{v_f} \frac{(\hat{\Sigma}_b + q^2) \Delta \hat{\sigma}_f^{(2)} + q^2 g^2 \hat{\sigma}_b}{[q^2 (1 - g^2) + \hat{\Sigma}_f^{(1)}][(q^2 + \hat{\Sigma}_f)(q^2 + \hat{\Sigma}_b) - g^2 q^4]}; \end{aligned} \quad (\text{III.122})$$

$$\begin{aligned} \widetilde{G}_{bb}(q, \omega_n) &= \frac{\pi K_b}{v_b} \frac{q^2 + f(\omega_n)}{[q^2 + b(\omega_n)][q^2 + f(\omega_n)] - g^2 q^4} \\ &+ \delta_{n,0} \frac{\pi K_b}{v_b} \frac{\sigma_b^{(2)}}{1 - g^2} \frac{q^2 + \hat{\Sigma}_f}{q^2 [(q^2 + \hat{\Sigma}_f)(q^2 + \hat{\Sigma}_b) - g^2 q^4]} \\ &+ \delta_{n,0} \frac{\pi K_b}{v_b} \frac{g^2}{1 - g^2} \left[ \frac{\sigma_f^{(1)}}{q^2 [q^2 (1 - g^2) + \hat{\Sigma}_f^{(1)}]} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\hat{\Sigma}_f + q^2) \hat{\sigma}_b^{(2)} + q^2 \Delta \hat{\sigma}_f}{[q^2 (1 - g^2) + \hat{\Sigma}_f^{(1)}][(q^2 + \hat{\Sigma}_f)(q^2 + \hat{\Sigma}_b) - g^2 q^4]} \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.123})$$

D'après les solutions des figures III.9 et III.10,  $\Sigma_f^{(1)}$  contribue le plus à la masse totale  $\Sigma_f$  par rapport à  $\Delta \Sigma_f^{(2)}$ . Sur le propagateur, on peut lire que la décroissance exponentielle est essentiellement contrôlée par  $\Sigma_f^{(1)}$ . Cependant, comme nous l'avons

envisagé, les structures des deux propagateurs font intervenir toutes les masses, de façon assez intriquée. Il serait ici utile de calculer numériquement ces propagateurs. C'est une tâche difficile et nous n'avons pas, ici, de résultats convainquant à proposer. Néanmoins, les corrélations superfluides sont, dans une certaine mesure, plus faciles à calculer et rendent bien compte de la physique avancée jusqu'ici.

### III.4.1.2 Corrélations superfluides

En adaptant la méthode variationnelle, il est possible de calculer les corrélations superfluides. Pour les bosons, cela revient à calculer

$$A_b(x) = \overline{\langle e^{i\theta_b(x)} e^{-i\theta_b(0)} \rangle}. \quad (\text{III.124})$$

La fonction de partition fait initialement intervenir une action dépendant à la fois des champs  $\phi$  et  $\theta$ . Ce n'est qu'en intégrant sur les champs  $\theta$  que l'on peut écrire une action effective ne dépendant que de  $\phi$ . Cette démarche permet alors de calculer facilement les fonctions de corrélations ne dépendant que de  $\phi$ . Néanmoins l'action initiale est bien de la forme (après avoir introduit les répliques et moyenné sur les réalisations du désordre)

$$S_0^{\text{rep}} = \sum_{a=1}^n \sum_{\alpha=f,b} \int dx d\tau \left[ i \partial_x \theta_\alpha^a \partial_\tau \phi_\alpha^a + \frac{v_\alpha}{2\pi K_\alpha} (\partial_x \theta_\alpha^a)^2 + \frac{v_\alpha K_\alpha}{2\pi} (\partial_x \phi_\alpha^a)^2 \right] + \frac{U_{bf}}{\pi^2} \int dx d\tau \partial_x \phi_f^a \partial_x \phi_b^a, \quad (\text{III.125})$$

$$S_{\text{dis}}^{\text{rep}} = -\frac{D_f \rho_f^2}{\hbar} \sum_{a,b} \int dx d\tau d\tau' \cos[2\phi_f^a(x, \tau) - 2\phi_f^b(x, \tau')] - \frac{D_b \rho_b^2}{\hbar} \sum_{a,b} \int dx d\tau d\tau' \cos[2\phi_b^a(x, \tau) - 2\phi_b^b(x, \tau')]. \quad (\text{III.126})$$

On remplace ensuite  $S_{\text{dis}}^{\text{rep}}$  par la self-énergie  $\sigma^{ab}$  obtenue par le calcul variationnel. On a au final une action quadratique et on peut calculer le propagateur  $\langle \theta_b^a(q, \omega_n) \theta_b^a(-q, -\omega_n) \rangle$  (en utilisant les formules d'inversion pour les matrices hiérarchiques [128]). On trouve la forme générale suivante, quelque soit le niveau de brisure de symétrie

$$\langle \theta_b^a(q, \omega_n) \theta_b^a(-q, -\omega_n) \rangle = \frac{\pi}{v_b K_b} \frac{[q^2 + \hat{I}_b(\omega_n) + \hat{\Sigma}_b][q^2 + f(\omega_n)] - g^2 q^4}{q^2 [[q^2 + f(\omega_n)][q^2 + b(\omega_n)] - g^2 q^4]}. \quad (\text{III.127})$$

La fonction  $\hat{I}_b$  dépend de l'état des bosons (superfluides ou localisés) et  $\hat{\Sigma}_b = 0$  dans les phases où les bosons sont superfluides. De même  $\hat{I}_f$  et  $\hat{\Sigma}_f$  dépendent de la phase considérée. Encore une fois, on ne s'attend pas à ce que les fonctions  $\hat{I}_b$

et  $\hat{I}_f$  modifient fortement le comportement du propagateur  $\langle \theta_b^a(q, \omega_n) \theta_b^a(-q, -\omega_n) \rangle$ . Nous étudions plus en détail cette fonction dans la prochaine section, en calculant la distribution des impulsions pour les bosons.

## III.4.2 Diagramme de phase pour un mélange $^{87}\text{Rb}$ - $^{40}\text{K}$ et observables expérimentales

### III.4.2.1 Paramètres expérimentaux pour le diagramme de phase

Dans cette section nous nous proposons, afin d'en faire le bilan, d'illustrer les différents résultats obtenus par le RG et la méthode variationnelle dans l'espace des répliques sur l'exemple d'un mélange de Rubidium 87 (un boson) et de Potassium 40 (un fermion). Ce type de mélanges a été étudié expérimentalement par plusieurs groupes [97, 98, 99, 100, 101]. Dans les expériences [97, 99, 101], le mélange dégénéré est confiné dans un réseau optique tridimensionnel.

On commence par établir le diagramme de phases tel qu'obtenu par le RG en fonction de deux paramètres accessibles expérimentalement, la longueur de diffusion Bose-Fermi,  $a_{bf}$ , et l'amplitude du confinement transverse  $V_{\perp,b}$  pour les bosons. Nous avons à l'esprit une expérience impliquant un réseau bidimensionnel de tubes quasi-1D (en partant par exemple des dispositifs de [97, 99, 101] et en augmentant l'intensité de deux paires de laser) sur lequel on viendrait superposer un potentiel aléatoire. On néglige le potentiel harmonique global. Comme nous l'avons établi au chapitre II, les paramètres d'interactions Bose-Bose et Bose-Fermi sont donnés par

$$\begin{aligned} U_{bb} &= 2\hbar\omega_{\perp,b} a_{bb}, \\ U_{bf} &= 2\hbar \frac{1}{M_r} \frac{M_f\omega_{\perp,f} M_b\omega_{\perp,b}}{M_f\omega_{\perp,f} + M_b\omega_{\perp,b}} a_{bf}, \end{aligned} \quad (\text{III.128})$$

Dans les expériences des références [97, 99, 101], la longueur de diffusion Bose-Bose est fixée à  $a_{bb} = 100a_0$  avec  $a_0 = 0.5\text{\AA}$ , le rayon de Bohr. La longueur de diffusion Bose-Fermi  $a_{bf}$  peut varier de  $-500\text{\AA}$  à  $500\text{\AA}$  autour d'une résonance de Feshbach [101]. La valeur nue de  $a_{bf}$  est  $-10\text{\AA}$ . Le potentiel de confinement transverse peut être utilisé pour faire varier les valeurs des interactions bosoniques. Dans l'expérience sur la transition de Mott à 1D [7], les atomes de  $^{87}\text{Rb}$  sont confinés dans des tubes quasi-1D et la valeur typique de  $V_{b,\perp}$  est de  $30E_{R,b}$ . On peut, par exemple, s'assurer que le critère  $a_{bb} \ll \ell_{\perp,b}$  est bien vérifié. Ici,  $\ell_{\perp,b} = \lambda/(2\pi)\tilde{V}_{\perp,b}^{-1/4}$ . Pour  $\tilde{V}_{\perp,b} = 30$  et  $\lambda = 1064\text{nm}$  (comme dans l'expérience de [97]),  $\ell_{\perp,b} = 72.4\text{nm}$  à comparer avec  $a_{bb} = 5\text{nm}$ . Le critère est assez bien vérifié. De même dans l'expérience [10], des atomes de  $^{40}\text{K}$  sont confinés dans des tubes quasi-1D, pour lesquels  $V_{\perp,f} = 30E_{R,f}$ . Nous proposons donc un diagramme de phase dans le régime de paramètres suivants  $10E_{R,b} < V_{\perp,b} < 50E_{R,b}$  et on prend pour simplifier  $\tilde{V}_{\perp,b} = \tilde{V}_{\perp,f}$  (ce régime où les amplitudes du réseau pour les fermions et les bosons sont égales, si on les exprime en unités de l'énergie de recul, semble accessible en ajustant la fréquence des lasers

[101]). On fait varier  $a_{bf}$  entre 0 et  $-150a_0$ . Le diagramme des phases obtenu est celui prédit par le RG en deux étapes. On a donc tracé les lignes  $X_f = 3$ ,  $K_b = 3/2$ ,  $X_b = 3$  à titre indicatif ainsi que la ligne d'instabilité donnée ici par  $g = -1$ . Pour ce régime de paramètres on obtient les trois phases prédites par le RG. D'après les figures III.9 et III.11, dans le cas où  $v_f > v_b$  (ici  $v_f \simeq 9v_b$  pour  $V_{b,\perp} = 40E_{R,b}$ ), la longueur de localisation des bosons ( $L_b \sim \hat{\Sigma}_b^{-1/2}$ ) est beaucoup plus grande que la longueur de localisation des fermions  $L_f$ . De plus,  $L_b$  est fortement renormalisée par les interactions alors que  $L_f$  reste constante sur une large plage de  $U_{bf}$ , avant de diverger à la transition vers le liquide de Luttinger. Il apparaît que dans un système expérimental (de taille finie par nature) la phase totalement localisée peut être sujette à un crossover vers une phase où seuls les fermions sont localisés,  $L_b$  excédant la taille du système. Dans la section suivante nous nous penchons sur les signatures expérimentales possibles pour ces différentes phases. Nous abordons de nouveau cette question du crossover dans la phase totalement localisée.

### III.4.2.2 Facteur de structure vs. mesures de temps de vol

L'étude de systèmes fortement corrélés avec des gaz d'atomes ultra-froids a nécessité le développement de plusieurs méthodes de mesures permettant de sonder leurs propriétés. On peut citer trois méthodes de choix, utilisées dans différentes expériences, parfois en compléments l'une de l'autre.

Tout d'abord citons les méthodes d'imagerie direct du gaz atomique, permettant de visualiser le profil de densité dans un piège. L'observation se fait soit en relâchant le piège et en imageant dans la foulée la densité – c'est la configuration retenue dans l'expérience de l'Institut d'Optique ayant permis d'observer le profil exponentiel du gaz de Rubidium localisé par un potentiel de speckle [16] – soit directement in-situ, afin de sonder la transition superfluide-isolant de Mott par exemple [129].

Une autre méthode consiste à procéder à des mesures dites de *temps de vol* (Time Of Flight experiments), permettant de remonter à la distribution en impulsion dans le piège. Le principe de la mesure est de relâcher le piège, puis au bout d'un temps  $t$  de chute libre, d'imager la densité du nuage atomique ayant évolué librement (les interactions au cours de la chute libre doivent être négligeables). Dans le cas d'un tube quasi-1D<sup>6</sup> et pour des temps  $t$  suffisamment longs, la densité moyenne (des bosons par exemple) au point  $\mathbf{r}$  est approximativement  $\langle \psi_b^\dagger(\mathbf{r})\psi_b(\mathbf{r}) \rangle_t \simeq W(y, z)\langle n_{Q(x)} \rangle$  avec  $W(y, z)$  une enveloppe Gaussienne (résultant du confinement transverse selon les directions  $y$  et  $z$ , au sein d'un tube),  $\langle n_{Q(x)} \rangle$  la distribution des impulsions dans la direction longitudinale, et  $Q(x) = M_b x / (\hbar t)$  [130]. Le calcul détaillé conduit en fait

---

6. Expérimentalement, le signal est de fait moyenné sur un grand nombre de tubes

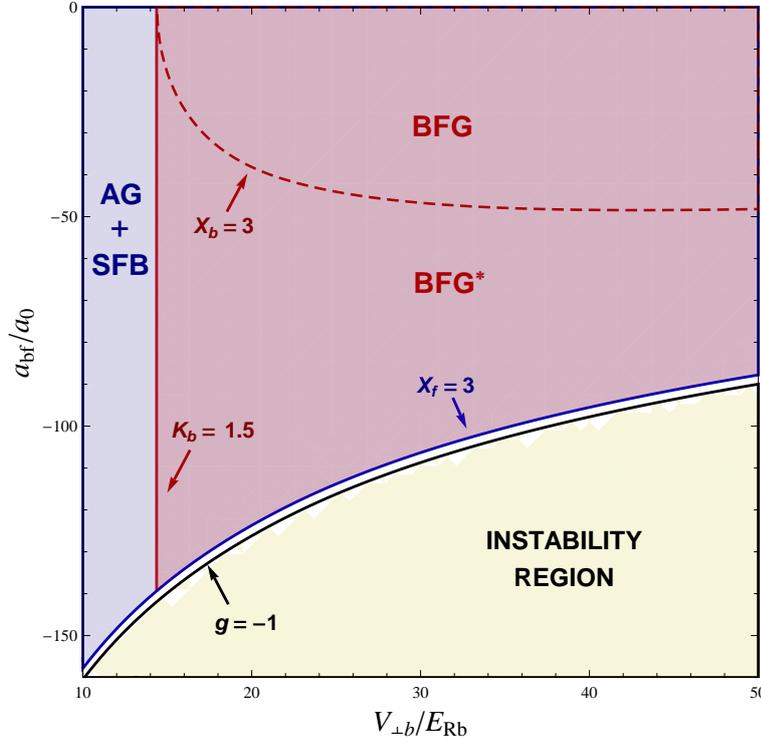


FIGURE III.14: Diagramme de phase d'un mélange Bose-Fermi  $^{87}\text{Rb}$ - $^{40}\text{K}$  dans la limite de faible désordre. On considère un réseau bi-dimensionnel de tubes, créé avec deux paires de faisceaux laser de longueur d'onde  $\lambda = 1064$  nm, imposant le pas du réseau à  $d = \lambda/2$ . On prend  $a_{bb} = 100a_0$  comme longueur de diffusion Bose-Bose, tandis que la longueur de diffusion Bose-Fermi,  $a_{bf}$ , peut varier autour d'une résonance de Feshbach. Les densités 1D sont choisies comme  $\rho_f d = 0.3$  et  $\rho_b d = 0.1$ . L'énergie de recul est  $E_{R,b} = \hbar^2 \lambda^{-2} / (2m_{Rb})$ , et  $V_{\perp b}$  est le potentiel de confinement transverse créant les tubes 1D. Les interactions Bose-Bose  $U_b$  augmentent avec  $V_{\perp b}$ . Quatre phases et une région d'instabilité de la théorie du liquide de Luttinger sont indiquées. BFG : Bose-Fermi glass, BFG\* (BFG avec une longueur de localisation extrêmement large pour les bosons), AG+SFB : Anderson Glass + Superfluid Bosons, LL : Luttinger liquid (au-dessus de la région d'instabilité).

à

$$\langle \psi_b^\dagger(\mathbf{r})\psi_b(\mathbf{r}) \rangle_t \propto \int_0^L dx_1 \int_0^L dx_2 e^{-iQ(x)(x_1-x_2)} \langle \psi_b^\dagger(x_1)\psi_b(x_2) \rangle. \quad (\text{III.129})$$

On a introduit ici une taille finie  $L$  pour les tubes. Dans le cas qui nous intéresse,  $\langle \psi_b^\dagger(x_1)\psi_b(x_2) \rangle \simeq A_b(x)$ , où la fonction  $A_b(x)$  a été introduite dans l'équation III.124. Typiquement, le membre de droite de l'équation III.129 est la convolution de la transformée de Fourier de  $A_b(x)$  (soit la distribution des impulsions) avec une fonction analogue à un rectangle de largeur  $1/L$ , imposant une coupure infra-rouge. Dans un milieu infini, sans désordre, et à température nulle,  $A_b(x) \sim x^{-1/(2K_b)}$  pour  $x \gg \Lambda^{-1}$ , avec  $\Lambda$  le cut-off UV de la théorie. Sa transformée de Fourier est typiquement une loi de puissance  $\mathcal{F}[A_b](q) \sim q^{1/(2K_b)-1}$  pour  $q \ll \Lambda$ . Le comportement asymptotique à grand  $q$  va plutôt comme  $q^{-4}$ , pour le modèle Lieb-Liniger [131]. Si le milieu est fini alors pour  $q \leq 1/L$  le comportement en loi de puissance est coupé<sup>7</sup>, et on a  $\mathcal{F}[A_b](q=0) \sim L^{2-1/(2K_b)}$ . Ces différents régimes ont été observés expérimentalement dans [5], où la distribution des impulsions a été mesurée pour différentes valeurs des interactions répulsives, jusqu'à atteindre le régime de Tonks-Girardeau. Notez qu'à température finie, le cut-off infrarouge est donné par  $q_0 = \max\{1/L, 1/v_b\beta\}$ , puisque le quasi-ordre à longue portée est détruit au-delà de la longueur thermique  $v_b\beta$  (voir l'équation II.34 par exemple).

Pour des bosons localisés par le désordre, la longueur de localisation  $L_b$  joue un rôle analogue à la taille du système et à la longueur thermique. Faute d'avoir accès à la forme de  $A_b(x)$  pour un système de taille finie et à température non-nulle, nous proposons néanmoins quelques graphiques représentant sa transformée de Fourier, que l'on note  $n_b(q)$ , dans la limite thermodynamique et à température nulle (en utilisant l'équation III.127) dans les différentes régions du diagramme de phase de la figure III.14. Cette étude illustre de manière qualitative mais utile les propriétés du mélange Bose-Fermi dans un potentiel aléatoire pouvant être sondées par des mesures de temps de vol.

Sur la figure III.15 est représentée la distribution des impulsions dans la phase totalement localisée. On a calculé  $A_b(x) = \exp[-1/2\langle [\theta_b^a(x) - \theta_b^a(0)]^2 \rangle]$ , avec

$$\langle [\theta_b^a(x) - \theta_b^a(0)]^2 \rangle = \frac{1}{\beta L} \sum_{|q| < \Lambda, \omega_n} 2[1 - \cos(qx)] \langle \theta_b^a(q, \omega_n) \theta_b^a(-q, -\omega_n) \rangle. \quad (\text{III.130})$$

La somme sur les impulsions est limitée par le cut-off ultra-violet  $\Lambda$ , ce qui explique la cassure pour  $q = \Lambda$  dans la figure III.15. Pour  $q < \Lambda$  on retrouve le comportement algébrique associé au liquide de Luttinger (le véritable comportement pour  $q > \Lambda$

7. En toute rigueur il faudrait calculer  $A_b(x)$  pour un système de taille finie, en utilisant par exemple les méthodes de la théorie conforme [35]

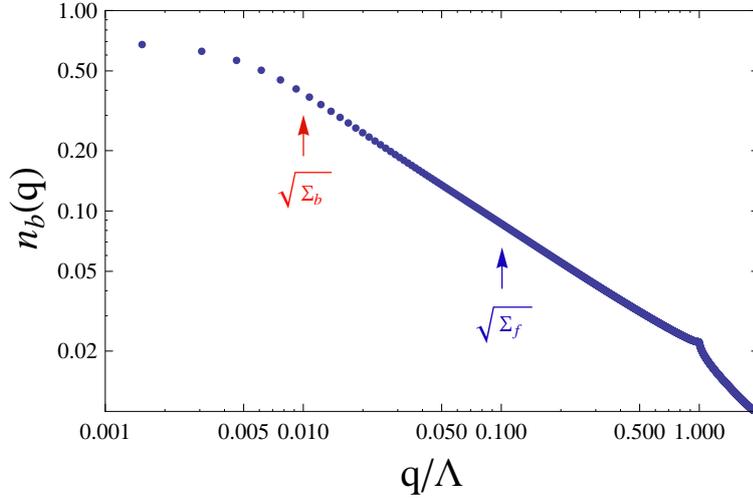


FIGURE III.15: *Distribution des impulsions  $n_b(q)$  (transformée de Fourier de  $A_b(x)$ ) dans la phase totalement localisée. On a utilisé les paramètres de la figure III.14. En particulier  $V_{b,\perp} = 40E_{R,b}$ ,  $a_{bf} = -35a_0$ , ce qui correspond à  $v_f/v_b = 9$ ,  $K_b = 1.3$  et  $g = 0.4$ . On a pris  $\hat{\Sigma}_f = 0.01\Lambda$  et  $\hat{\Sigma}_b = 0.0001\Lambda$ . Les échelles d'impulsions associées,  $\sqrt{\hat{\Sigma}_f}$  et  $\sqrt{\hat{\Sigma}_b}$  sont indiquées sur la figure. L'impulsion  $q$  est en unité du cut-off ultra-violet  $\Lambda$ .*

n'est bien sûr pas capturé par cette théorie). Pour  $q < \sqrt{\hat{\Sigma}_b}$ , la distribution s'éloigne de la loi algébrique. Ceci s'explique par la localisation du gaz de bosons sur une longueur  $L_b \sim 1/\sqrt{\hat{\Sigma}_b}$ , et la décroissance exponentielle à grande distance de la fonction  $A_b(x)$ . On a aussi indiqué sur la figure la position de  $\sqrt{\hat{\Sigma}_f}$ . En effet, les interactions bosoniques sont renormalisées, sur des distances plus petites que la longueur de localisation des fermions. De ce fait on s'attend à un crossover pour le comportement algébrique de  $A_b(x)$  et  $n_b(q)$ . En revanche, dans ce cas précis, la renormalisation de l'exposant des corrélations superfluides est très petite ( $\sim 0.85$  de sa valeur initiale) et difficilement discernable sur cette figure. Pour des interactions Bose-Fermi plus fortes, l'exposant peut varier plus fortement avec  $q$ . Sur la figure III.16, pour  $a_{bf} = -85a_0$ , la rupture de pente, signalant ce crossover est plus visible. Néanmoins il est important de noter que l'effet des interactions Bose-Fermi sur l'exposant des corrélations algébriques est assez faible. L'effet sûrement le plus important est la coupure infrarouge provoquée par la longueur de localisation dans la phase localisée. Pourvu que cette longueur soit assez petite par rapport à la taille du système et la longueur thermique, cet effet devrait être plus facilement observable.

Enfin, la spectroscopie par diffusion de Bragg [120, 132] permet de sonder la réponse du dynamique du système. La quantité mesurée est essentiellement le facteur de

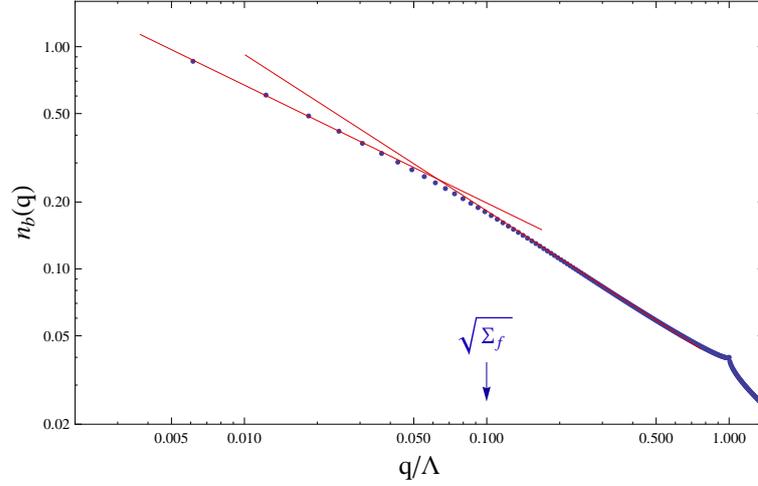


FIGURE III.16: *Distribution des impulsions  $n_b(q)$  (transformée de Fourier de  $A_b(x)$ ) dans la phase totalement localisée, pour  $a_{bf} = -85a_0$  et  $V_{b,\perp} = 40E_{R,b}$ .*

structure (bosonique ou fermionique)

$$S_{b/f}(q, \omega) = \int dt dx e^{iqx - i\omega t} \overline{\langle \rho_{b/f}(x, t) \rho_{b/f}(0, 0) \rangle} \quad (\text{III.131})$$

Cette quantité dépend de la phase considérée, comme le montre essentiellement la figure III.17. La méthode variationnelle permet de calculer  $S_{b/f}(q, \omega)$ , au moins pour des petites valeurs de  $q$ . Par exemple, pour les fermions,

$$\begin{aligned} \overline{\langle \rho_{b/f}(x, t) \rho_{b/f}(0, 0) \rangle} &= \rho_f^2 + \frac{1}{\pi^2} \overline{\langle \nabla \phi_f(x, t) \nabla \phi_f(0, 0) \rangle} \\ &+ \rho_f^2 \cos(2\pi\rho_f x) \overline{\langle \cos[2\phi_f(x, t)] \cos[2\phi_f(0, 0)] \rangle} + \dots \end{aligned} \quad (\text{III.132})$$

auquel s'ajoute une contribution statique provenant de la transformation de jauge (III.40). Le facteur de structure est lié aux fonctions de Green de Matsubara que nous avons déjà calculées. Pour  $q \ll 2\pi\rho_f$ ,

$$S_{b/f}(q, \omega) = -\text{Im} \left[ q^2 \tilde{G}_{ff}(q, i\omega_n \rightarrow \omega + i\epsilon) \right] \quad (\text{III.133})$$

avec,  $\tilde{G}_{ff}$  la contribution diagonale dans les répliques du propagateur fermionique. Pour effectuer la continuation analytique il est nécessaire de préciser la forme des fonctions  $I_f$  et  $I_b$  restées indéterminées jusqu'à maintenant. La seule chose qui nous semble faisable analytiquement est d'adapter l'argument de [58] au cas du mélange. Dans la phase totalement localisée, les fonctions  $I_f$  et  $I_b$  sont données dans les équations A.54 et A.55 de l'annexe A et on peut obtenir deux équations auto-cohérentes en supposant  $K_f \ll 1$  et  $K_b \ll 1$  (en prenant en quelque sorte une limite classique)

et en faisant un développement limité des fonctions  $V_f$  et  $V_b$ . En faisant l'hypothèse supplémentaire  $\Sigma_b \ll \Sigma_f$  on arrive aux expressions approchées, valables à petit  $\omega$ ,  $I_f(\omega) \sim \alpha_f \omega$  et  $I_b(\omega) \sim \alpha_b \omega$  avec

$$\alpha_f = \sqrt{\Sigma_f} \frac{2}{\sqrt{3}} (1 + t^2 g^2), \quad (\text{III.134})$$

$$\alpha_b = \sqrt{\Sigma_b} \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad (\text{III.135})$$

Lorsque  $g = 0$  on retrouve l'expression de [58]. Le domaine de validité de ces expressions est nettement en dehors du domaine de paramètres pertinent pour notre modèle. Néanmoins, afin d'avoir une vue au moins qualitative du facteur de structure nous effectuons la continuation analytique avec les fonctions  $I_f$  et  $I_b$  ainsi écrite. Le graphe principal de la figure III.17, tiré de la référence [59] présente le facteur de structure pour les fermions dans la phase totalement localisée. Il présente deux pics à des fréquences  $\omega \approx v_b(q^2 + \hat{\Sigma}_b)^{1/2}$  et  $\omega \approx v_f(q^2 + \hat{\Sigma}_f)^{1/2}$ . Le premier pic, très étroit, est une signature du fait que dans cette phase les deux espèces restent couplées. Le principal effet du désordre est d'introduire deux nouvelles échelles d'énergies,  $v_f \hat{\Sigma}_f^{1/2}$  et  $v_b \hat{\Sigma}_b^{1/2}$ . Un point important, bien capturé par la méthode variationnelle est que le facteur de structure ne présente pas de vrai gap à basse fréquence (comme ce serait le cas pour un isolant de Mott). L'insert est un zoom autour du pic bosonique. Son analogue dans la phase où seuls les fermions sont localisés est tracé pour comparaison. Dans cette phase,  $\hat{\Sigma}_b$  est nulle et le pic est plus étroit, comme il le serait dans un liquide de Luttinger. Dans la phase complètement délocalisée on s'attend à trouver deux pics très étroits correspondant aux deux modes de son, à  $\omega = v_+ q$  et  $\omega = v_- q$ .

## III.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié un mélange unidimensionnel de bosons et de fermions en interaction dans un potentiel aléatoire. Les motivations étaient de deux types. Tout d'abord, la très grande versatilité des expériences d'atomes froids laissent entrevoir d'intéressantes perspectives pour la réalisation de ces mélanges, ainsi que pour l'étude de systèmes quantiques désordonnés en présence d'interactions. L'autre raison est simplement la richesse de la physique des mélanges Bose-Fermi, telle que nous l'avons entrevue dans le chapitre II.

Nous avons envisagé le problème de la localisation du mélange sous l'angle de l'accrochage des ondes de densité par un désordre de faible amplitude. Dans le cas de densités différentes, les deux composantes du gaz sont accrochées par des composantes de Fourier du potentiel effectivement décorréelées. Les deux ondes de densité sont couplées par les interactions Bose-Fermi.

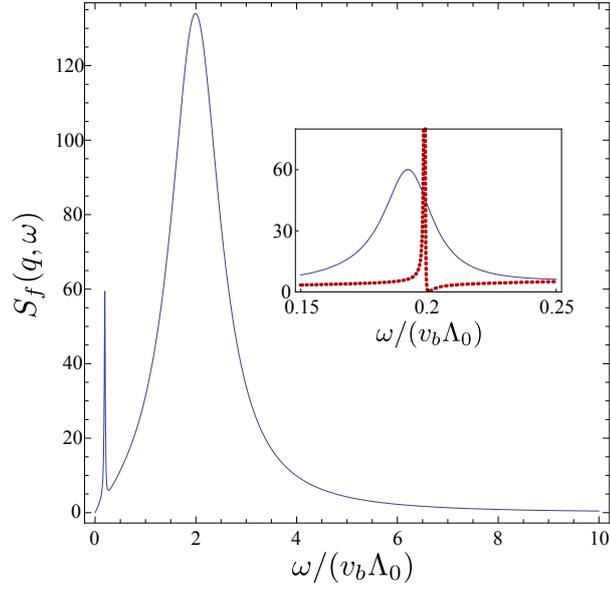


FIGURE III.17: Facteur de structure pour les fermions,  $S_f(q = 0.2\Lambda_0, \omega)$ , dans la phase BFG d'après le résultat du calcul variationnel. Ici,  $a_{bf} = -35a_0$ . Le cut-off ultra-violet est  $\Lambda_0 = \rho_b$  et  $V_{\perp,b} = 40E_{R,b}$ . Les autres paramètres sont ceux de la figure Fig. III.14. L'insert est un zoom sur le premier pic autour de  $\omega = v_b(q^2 + \hat{\Sigma}_b)^{1/2}$ , signature de la nature couplée de la phase totalement localisée. La courbe pointillée additionnelle est le pic bosonique correspondant à la phase où seuls les fermions sont localisés ( $V_{\perp,b} = 13E_{R,b}$ , dans le diagramme des phases).

En utilisant le groupe de Renormalisation, ainsi qu'un calcul variationnel dans l'espace des répliques, nous avons abouti aux conclusions suivantes :

- À faible désordre, le diagramme de phases peut être tracé en fonction de deux paramètres, le paramètre de Luttinger  $K_b$  (relié essentiellement à la force des interactions Bose-Bose) et l'amplitude des interactions Bose-Fermi  $U_{bf}$ . L'emplacement des phases, et leurs propriétés, dépend d'un troisième paramètre, le rapport des vitesses des phonons,  $v_f/v_b$ . Quelque soit la valeur de ce rapport on identifie trois phases : (i) une phase totalement délocalisée (un liquide de Luttinger à deux composantes, où les bosons sont superfluides et où les corrélations de paires de fermions dominant sur les corrélations d'onde de densité), (ii) une phase totalement localisée où les deux composantes sont accrochées par le désordre, et (iii) une phase intermédiaire où les fermions sont localisés et les bosons superfluides. Ces phases apparaissent, à différents niveaux de l'étude dans les diagrammes III.6, III.12 et III.13.
- Les propriétés de la phase totalement localisée dépendent largement des interactions  $U_{bf}$ , ainsi que du rapport des vitesses  $v_f/v_b$ . D'après le RG et le calcul variationnel, cette phase est caractérisée par deux échelles de longueur,  $L_f$  et  $L_b$ , que l'on identifie aux longueurs de localisation de chacune des composantes du gaz. Pour des interactions Bose-Fermi fortes, une de ces longueurs peut être considérablement plus grande que l'autre. Dans le cas où  $v_f > v_b$  (et pour des amplitudes de désordre comparables),  $L_b$  est plus grande que  $L_f$ . D'une part  $K_b > K_f$ , ce qui signifie que les fluctuations quantiques ont plus tendance à déstabiliser l'accrochage des bosons que l'accrochage des fermions. D'autre part, malgré la localisation, les phonons rapides du gaz de fermions écrantent fortement les interactions répulsives des bosons, augmentant d'autant plus  $L_b$ . Dans le cas  $v_b > v_f$ , l'ordre des longueurs de localisation dépend de  $U_{bf}$  et  $K_b$ . Lorsque  $K_b$  est assez grand,  $L_b > L_f$  comme précédemment. En revanche si les interactions  $U_{bf}$  sont assez fortes, les phonons rapides du gaz de bosons créent des interactions fortement attractives pour les fermions et  $L_f > L_b$ .
- Dans tous les cas, pour un système de taille finie, il se peut qu'une des deux longueurs de localisation dépasse la taille du système et qu'une des espèces apparaissent superfluide alors qu'elle serait localisée à la limite thermodynamique. De même, la température peut masquer les effets du désordre si la longueur thermique devient comparable à une ou les deux longueurs de localisation.
- Les longueurs de localisation  $L_b$  et  $L_f$  devraient avoir des signatures claires à la fois dans la distribution des impulsions mesurée en temps de vol et dans le facteur de structure accessible en spectroscopie de Bragg. Cette dernière méthode permet de mettre clairement en évidence le caractère couplé de la

phase totalement localisée.

Ce système nous a également permis d'appliquer les idées de la méthode variationnelle Gaussienne à un système assez complexe. Nous avons cherché, par analogie avec les solutions existant pour les systèmes à une seule composante, des solutions brisant la symétrie des répliques, dans chacun des secteurs de la théorie. Bien qu'ici cette méthode semble souffrir de limitations (dans l'interprétation même de la brisure de symétrie, surtout dans le cas 2RSB, et dans le calcul de certaines fonctions de corrélations), elle confirme, par bien des aspects, les intuitions développées grâce au RG et permet de calculer certaines quantités mesurables (même si nous avons établi dans le texte l'aspect finalement assez qualitatif de ces calculs). Il est évident que des simulations numériques de grande échelle (de Monte-Carlo quantique par exemple) pourraient apporter un éclairage supplémentaire sur la physique de ce système, en particulier dans le cas plus délicat où  $v_b > v_f$ , et aider à développer des approches différentes, notamment dans la région du diagramme de phases où les deux longueurs de localisation sont comparables.

# Chapitre IV

## Bosons de cœur dur sur deux chaînes couplées

### IV.1 Introduction

À une dimension, les fermions libres et les bosons de cœur dur sont souvent considérés comme étant équivalents. Par exemple sur un réseau 1D avec des sauts uniquement aux plus proches voisins, les particules ne peuvent pas physiquement échanger leurs positions et ressentent à peine les effets de la statistique quantique. Mises à part les corrélations hors-diagonales – comme dans la fonction de Green à une particule – impliquant explicitement la *chaîne de Jordan-Wigner*, les observables ne dépendant que de la densité sont similaires pour des fermions libres et des bosons de cœur dur. Cependant, en couplant deux chaînes, et en formant ainsi une échelle, l'échange de particules devient possible, conduisant à une physique totalement différente pour les fermions libres et les bosons de cœur dur. Ce chapitre présente les résultats apparaissant dans la référence [63], fruits d'une collaboration avec Nicolas Laflorencie du LPT, Toulouse, et Guillaume Roux du LPTMS, Orsay, ayant mené respectivement les calculs de Monte Carlo quantique et de DMRG auxquels est fait référence dans ce chapitre. L'ensemble des figures est tiré de la référence [63]. Nous étudions le problème apparemment simple de bosons de cœur dur sautant sur les sites d'une échelle à deux montants. Certains résultats étaient bien sûr connus dans la littérature, notamment grâce à la correspondance entre les bosons de cœur dur et les spins 1/2. Un des objectifs de ce projet était de souligner de la manière la plus complète possible, les différences fortes existant entre les fermions libres et les bosons de cœur dur sur une échelle. De plus, les nouvelles données numériques présentées et analysées ici apportent un éclairage important sur la physique de ces systèmes. Ces résultats peuvent être d'un intérêt assez fort pour des expériences actuelles dans le domaine des atomes ultra-froids [62].

Le modèle que nous étudions est celui schématisé dans la figure IV.1 et défini par le Hamiltonien

$$\mathcal{H} = -t \sum_{j,\ell=1,2} [b_{\ell,j}^\dagger b_{\ell,j+1} + \text{h.c.}] - \mu \sum_{j,\ell=1,2} n_{\ell,j} - t_\perp \sum_j [b_{1,j}^\dagger b_{2,j} + \text{h.c.}]. \quad (\text{IV.1})$$

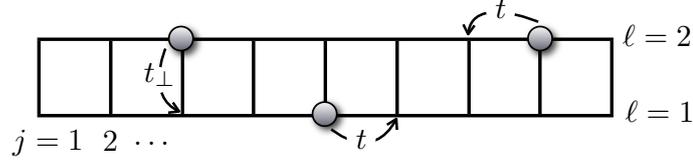


FIGURE IV.1: Représentation schématique d'un modèle d'échelle à deux montants

Les sites le long de chaque barreau  $\ell = 1, 2$  sont repérés par  $j = 1 \dots L$ ,  $L$  étant la longueur totale de chaque chaîne. L'opérateur  $b_{\ell,j}^\dagger$  crée une particule sur le site  $(\ell, j)$  et  $t, t_\perp$  sont les amplitudes de saut longitudinale et transverse, respectivement.  $n_{\ell,j} = b_{\ell,j}^\dagger b_{\ell,j}$  est l'opérateur densité sur site et  $\mu$  est le potentiel chimique. Le remplissage de l'échelle est noté  $\rho = N/(2L)$  dans la suite, avec  $N$  le nombre total de particules. Ainsi écrit le Hamiltonien ne présage pas de la statistique des particules qui peuvent être soit des fermions libres soit des bosons de cœur dur. Les phases principales du modèle (IV.1), discutées dans ce chapitre, sont résumées dans la figure IV.2, dans le cas des fermions libres (gauche) et des bosons de cœur dur (droite). Pour des fermions sans interactions, le diagramme des phases s'obtient simplement en remplissant les deux bandes : le système est dans un état métallique pour tous les remplissages  $0 < \rho < 1$ , excepté lorsque l'amplitude de saut transverse  $t_\perp$  excède  $2t$ , auquel cas un isolant de bande s'ouvre au demi-remplissage ( $\rho = 1/2$ ).

La situation est très différente pour les bosons de cœur dur, pour lesquels il n'existe pas de principe de Pauli lorsqu'il s'agit de remplir les états dans l'espace des impulsions. En effet, comme nous le montrerons plus bas, l'amplitude de saut transverse est une perturbation relevante au demi-remplissage, ouvrant un gap de charge  $\Delta_s \sim \exp(-at/t_\perp)$ , selon un mécanisme de Kosterlitz-Thouless. Ainsi, contrairement aux fermions libres, l'état isolant à demi-remplissage pour les bosons, appelé ici *isolant de Mott sur barreaux* (en anglais, rung-Mott insulator, ou RMI), s'étend jusqu'à  $t_\perp = 0$ . Pour des remplissages incommensurables, le système de bosons est un liquide de Luttinger à un mode avec une fraction superfluide non-nulle et, surtout, un paramètre de Luttinger fortement renormalisé et variant continument entre  $1/2$  et  $1$ . Pour les fermions sans spin, il existe aussi une phase correspondant à un liquide de Luttinger à deux modes (lorsque les deux bandes sont partiellement remplies). Le diagramme des phases schématique est représenté dans la figure IV.2.

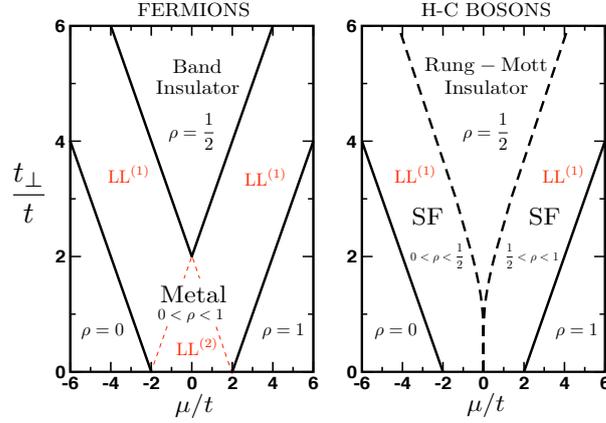


FIGURE IV.2: Diagramme des phases pour le modèle de l'équation (IV.1) dans le cas des fermions libres (gauche) et des bosons de cœur dur (droite). La phase métallique pour les fermions comprend des régions avec une bande  $LL^{(1)}$  ou deux bandes  $LL^{(2)}$ , alors que la phase superfluide des bosons est un liquide de Luttinger à un seul mode (symétrique comme nous le verrons dans le texte),  $LL^{(1)}$ . Pour les bosons de cœur dur, la phase isolante Rung Mott s'étend jusqu'à  $t_{\perp} = 0$ .

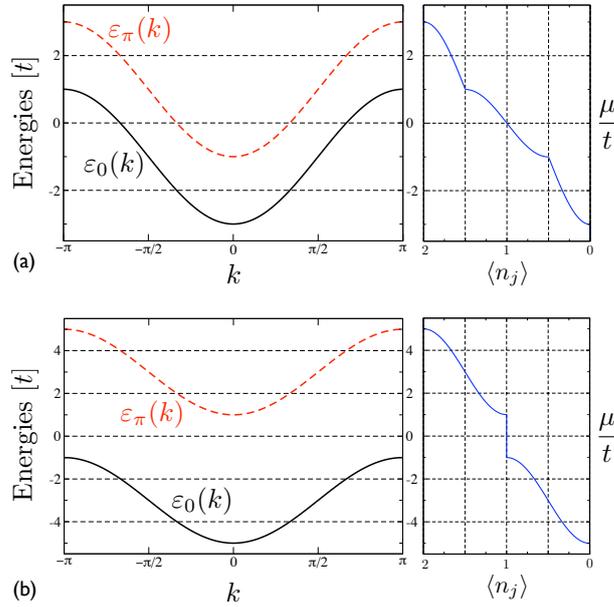


FIGURE IV.3: À gauche : spectre de bandes à une particule  $\varepsilon_0(k)$  (courbe noire) et  $\varepsilon_{\pi}(k)$  (courbe rouge pointillée) tracées (en unité de  $t$ ) pour l'échelle de l'équation (IV.1) avec  $t_{\perp}/t = 1$  (a) et  $t_{\perp}/t = 3$  (b). À droite : le remplissage correspondant (par barreau)  $\langle n_j \rangle = 2\rho$  tracé en fonction du potentiel chimique  $\mu/t$ .

## IV.2 Résultats analytiques pour les bosons de cœur dur

### IV.2.1 Préliminaires : solution exacte pour les fermions libres

Nous nous tournons maintenant vers l'échelle du modèle (IV.1), occupée par des fermions sans spin. Les états propres à une particule du Hamiltonien défini sur une échelle de  $2L$  sites sont des ondes planes de la forme

$$|k, k_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{j=1}^L e^{-ikj} (|j, 1\rangle + e^{ik_y} |j, 2\rangle) , \quad (\text{IV.2})$$

où  $k$  est un multiple de  $2\pi/L$ ,  $k_y = 0, \pi$ , et  $|j, \ell\rangle$  est un état avec une seule particule sur le site  $(j, \ell)$ . L'énergie propre associée est

$$\varepsilon_{k_y}(k) = -2t \cos(k) - t_{\perp} \cos(k_y) , \quad (\text{IV.3})$$

correspondant à la dispersion des bandes tracées dans la figure IV.3. Pour des fermions, à température nulle, le remplissage moyen  $\rho$  en fonction du potentiel chimique  $\mu$  est la somme des remplissages de chaque bande. Deux exemples, pour  $t_{\perp} = t$  et  $t_{\perp} = 3t$ , sont donnés dans la figure IV.3. Ces valeurs correspondent à deux situations très différentes. Pour  $t_{\perp} < 2t$  le système a soit quatre points de Fermi (quand  $-2t + t_{\perp} < \mu < 2t - t_{\perp}$ ) est donc un liquide de Luttinger à deux modes, soit deux points de Fermi seulement, et est un liquide de Luttinger à un seul mode, équivalent en fait à un modèle purement 1D. Les discontinuités de la dérivée de  $\rho(\mu)$  dans la figure IV.3 signalent un changement dans le nombre de points de Fermi. Dans l'autre cas,  $t_{\perp} > 2t$ , les bandes sont séparées par un gap

$$\Delta = 2t_{\perp} - 4t , \quad (\text{IV.4})$$

et, à demi-remplissage ( $\rho = 1/2$ ), le système est un isolant de bande. L'état fondamental est l'état avec une particule par barreau, dans l'état symétrique  $(|j, 1\rangle + |j, 2\rangle)/\sqrt{2}$ , et a une énergie totale  $E_{\text{GS}} = -Lt_{\perp}$ . En dehors du demi-remplissage, l'échelle est un liquide de Luttinger à un seul mode.

La situation pour les bosons de cœur dur ne peut pas simplement être décrite par le remplissage des états à une particule. Notons que comme dans le cas d'une chaîne unique, une transformation de Jordan-Wigner est possible, en choisissant un chemin particulier le long du réseau pour la chaîne de Jordan-Wigner [133, 134, 135]. Cependant, le modèle fermionique obtenu ne peut pas être résolu exactement car il contient des termes de saut corrélés. Une approximation de champ moyen conduit à des résultats raisonnables mais non quantitatifs, soulignant si nécessaire le fait que la version bosonique du modèle est non triviale. Dans ce qui suit nous dérivons des résultats exacts, en travaillant dans le langage bosonique.

## IV.2.2 Limite de couplage fort

### IV.2.2.1 Gap au demi-remplissage

Dans cette section nous calculons le gap à demi-remplissage dans la limite de grand  $t_\perp$ . Alors,  $t_\perp$  correspond à l'énergie nécessaire pour ajouter une particule en sus de l'échelle demi-remplie. Les détails du calcul peuvent être trouvés dans l'annexe B. Dans le cas où  $t = 0$ , les barreaux se découplent. Quatre états sont disponibles sur chacun d'entre eux : un état vide  $|0\rangle_j$  d'énergie  $E_0 = 0$ , deux états à une particule  $|1\pm\rangle_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(|j, 1\rangle \pm |j, 2\rangle)$  d'énergies  $E_{1\pm} = \mp t_\perp - \mu$ , et un état à deux particules  $|2\rangle_j$  d'énergie  $E_2 = -2\mu$ . Ces énergies sont tracées en fonction du potentiel chimique  $\mu$  dans la figure IV.4. Le remplissage moyen  $\rho$  du réseau est nul tant que  $\mu < -t_\perp$ , vaut 1 pour  $-t_\perp < \mu < t_\perp$  et 2 dès que  $\mu > t_\perp$ .

Nous partons d'une échelle de bosons de cœur dur demi-remplie –  $\mu = 0$  et  $N = L$  bosons – et traitons  $\mathcal{H}_1 = -t \sum_{j,\ell} [b_{\ell,j}^\dagger b_{\ell,j+1} + \text{h.c.}]$  comme une perturbation de  $\mathcal{H}_0 = -t_\perp \sum_j [b_{1,j}^\dagger b_{2,j} + \text{h.c.}]$ . L'état fondamental de  $\mathcal{H}_0$  est construit en plaçant une particule par barreau dans l'état symétrique  $|1+\rangle_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(|j, 1\rangle + |j, 2\rangle)$ . Nous avons  $|L^{(0)}\rangle = |1+, 1+, \dots, 1+\rangle$ .  $\mathcal{H}_1$  crée  $2L$  excitations particule-trou sur des barreaux voisins et induit une correction au second ordre de l'état fondamental (voir l'annexe B)

$$E_L = -t_\perp L - t^2 L / t_\perp. \quad (\text{IV.5})$$

Les premiers états excités de  $\mathcal{H}_0$  avec  $N + 1$  particules sont  $L$  fois dégénérés et s'écrivent de manière adéquate dans la base des impulsions

$$|(L + 1)_k^{(0)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_j e^{ikj} |1+, \dots, 1+, \frac{2}{(j)}, 1+, \dots, 1+\rangle. \quad (\text{IV.6})$$

$\mathcal{H}_1$  lève la dégénérescence : en effet, sous son action, la particule supplémentaire saute sur les barreaux voisins (perturbation au premier ordre) et sur les barreaux deuxième voisins (perturbation au second ordre). De plus  $2(L - 2)$  excitations particule-trou sont créées sur des barreaux voisins. Ainsi, les énergies corrigées  $E_{L+1}(k)$  des états à  $L + 1$  particules sont

$$E_{L+1}(k) = -t_\perp(L - 1) - 2t \cos(k) - (t^2/t_\perp) \cos(2k) - (L - 2)t^2/t_\perp. \quad (\text{IV.7})$$

On peut conduire un raisonnement analogue quant au dopage en trous de l'échelle demi-remplie. La taille du plateau au demi-remplissage est donc

$$\Delta_s = 2[E_{L+1}(0) - E_L] = 2t_\perp - 4t + 2t^2/t_\perp. \quad (\text{IV.8})$$

Le gap, dans le cas des bosons de cœur dur, est plus grand que celui de fermions sans spin. En conclusion de cette section, il est instructif de se pencher sur l'approche

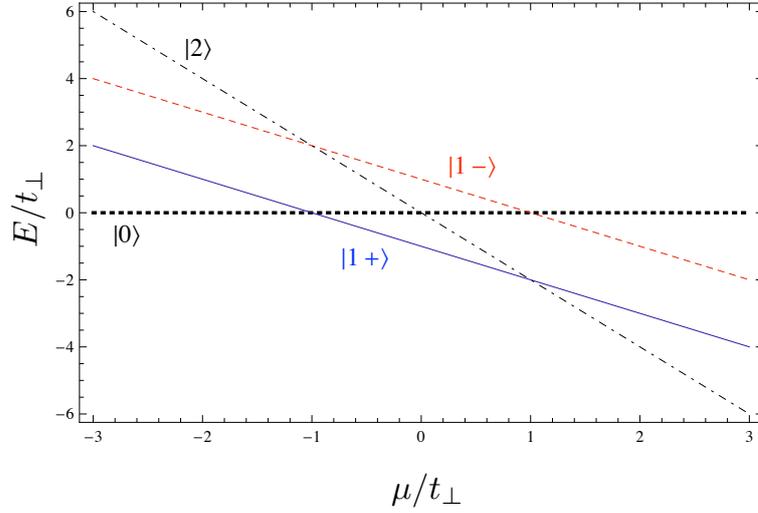


FIGURE IV.4: Énergies des quatre états disponibles sur un barreau donné, dans la limite  $t/t_{\perp} \rightarrow 0$ .

perturbative appliquée au cas des fermions, pour lesquels le gap est donné exactement par  $\Delta_s = 2t_{\perp} - 4t$ , sans correction de second ordre. Ceci est dû au fait que l'état fondamental au demi-remplissage  $|L\rangle = c_{+,0}^{\dagger} \dots c_{+,L-1}^{\dagger} |0\rangle$  et les états à  $L+1$  particules  $|(L+1)_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_j e^{ikja} c_{-,j}^{\dagger} |L\rangle$  sont des états propres, exacts, du Hamiltonien total.  $H_1$  ne crée pas d'excitations particule-trou, car  $c_{+,j}^{\dagger} c_{+,j}^{\dagger} = 0$ . Au contraire, dans le cas bosonique,  $b_{+,j}^{\dagger} b_{+,j}^{\dagger} = \frac{1}{2}(b_{1,j}^{\dagger} b_{1,j}^{\dagger} + b_{2,j}^{\dagger} b_{2,j}^{\dagger}) + \frac{1}{2}(b_{1,j}^{\dagger} b_{2,j}^{\dagger} + b_{2,j}^{\dagger} b_{1,j}^{\dagger})$ . Les termes diagonaux disparaissent à cause de la contrainte de cœur dur, tandis que les termes hors-diagonaux sont égaux, du fait des relations de commutations des opérateurs bosoniques (ils disparaissent pour les fermions!). Cette différence,  $c_{+,j}^{\dagger} c_{+,j}^{\dagger} = 0$  versus  $b_{+,j}^{\dagger} b_{+,j}^{\dagger} = b_{1,j}^{\dagger} b_{2,j}^{\dagger}$ , illustre comment le plus simple des modèles quasi-1D est en effet sensible aux effets de la statistique quantique.

#### IV.2.2.2 Modèle effectif pour les densités incommensurables

Nous pouvons aussi analyser la limite des *barreaux forts* (c'est-à-dire  $t_{\perp} \gg t$ ) par une méthode similaire à celle développée pour les échelles de Heisenberg sous champ [136, 137]. D'après la figure IV.4, pour une valeur critique du potentiel chimique  $\mu_c = t_{\perp}$ , les états  $|1+\rangle_j$  et  $|2\rangle_j$  deviennent dégénérés, avec une énergie  $E_0 = -2t_{\perp}$ . Le dopage en particules du plateau peut être étudié grâce à la théorie des perturbations dégénérées, en considérant le Hamiltonien

$$\mathcal{H}_1 = -t \sum_{j,\ell} [b_{\ell,j}^{\dagger} b_{\ell,j+1} + \text{h.c.}] - (\mu - \mu_c) \sum_{j,\ell} b_{j,\ell}^{\dagger} b_{j,\ell}, \quad (\text{IV.9})$$

comme une perturbation du Hamiltonien fondamental,

$$\mathcal{H}_0 = -t_\perp \sum_j [b_{1,j}^\dagger b_{2,j} + \text{h.c.}] - \mu_c \sum_{j,\ell} b_{j,\ell}^\dagger b_{j,\ell}. \quad (\text{IV.10})$$

Appelons  $P_0$  le projecteur sur le sous-espace fondamental, dans lequel  $|1+\rangle_j$  et  $|2\rangle_j$  sont les seuls états autorisés sur un barreau donné  $j$ . Nous appelons  $Q_0$  le projecteur sur l'espace complémentaire. Le Hamiltonien effectif au deuxième ordre en perturbation est donné par [138]

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = P_0 \mathcal{H}_1 P_0 + P_0 \mathcal{H}_1 Q_0 [E - H_0]^{-1} Q_0 \mathcal{H}_1 P_0, \quad (\text{IV.11})$$

avec  $E$  la valeur propre associée au sous-espace dégénéré en considération. Ici, étant donné le fondamental dégénéré et la forme de  $\mathcal{H}_1$ , un état excité *virtuel* est un état avec un barreau vide et, dans tout ce qui suit,  $Q_0 [E - H_0]^{-1} Q_0 = Q_0 [-2t_\perp L + 2t_\perp (L - 1)]^{-1} Q_0 = -Q_0 / (2t_\perp)$ . Ici aussi, un calcul plus détaillé apparaît dans l'annexe B. Nous trouvons le Hamiltonien effectif suivant, exprimé en termes de pseudo-fermions sans spin

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{eff}} = & -t \sum_j [c_j^\dagger c_{j+1} + \text{h.c.}] - (\mu - \mu_c) \sum_j (n_j + 1) - \frac{t^2}{2t_\perp} \sum_j [c_{j-1}^\dagger (1 - n_j) c_{j+1} + \text{h.c.}] \\ & - \frac{t^2}{t_\perp} \sum_j (1 - n_j)(1 - n_{j+1}) \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

Dans ce langage, un pseudo-fermion sans spin représente un barreau doublement occupé, alors qu'un site vide indique un barreau avec une seule particule, dans l'état symétrique. Notez que l'on retrouve ainsi l'expression du gap au deuxième ordre. Une particule est ajoutée lorsque le potentiel chimique effectif devient égal à l'énergie du bas de la bande de pseudo-fermions :  $\mu - \mu_c - 2t^2/t_\perp = -2t - t^2/t_\perp$ . De l'autre côté du plateau, on obtient exactement le même Hamiltonien, dans lequel un fermion sans spin représente alors un barreau vide et  $\mu_c = -t_\perp$ .

Comme remarqué dans le contexte des phases supersolides 2D des antiferromagnétiques quantiques sous champ [139, 140, 141] et dans les échelles de Heisenberg sous champ [31], un ingrédient important, émergeant comme un processus du second ordre dans le Hamiltonien effectif ci-dessus, est le terme de saut corrélé aux seconds voisins. Pour une chaîne de Bose-Hubbard, dans la limite des interactions répulsives sur site grandes mais finies, un modèle effectif de fermions sans spin similaire à celui de l'équation (IV.12) a été obtenu dans la référence [83]. Nous discutons plus avant la relation avec la chaîne de Bose-Hubbard dans la section IV.4.1.

### IV.2.3 Chaînes faiblement couplées : bosonisation

Dans cette section nous développons une approche de basse énergie afin d'analyser le comportement de deux chaînes couplées de bosons en interactions, au demi-

remplissage. Le point de départ est le Hamiltonien suivant  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_\perp$  avec

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 &= -t \sum_{j,\ell} [b_{\ell,j+1}^\dagger b_{\ell,j} + \text{h.c.}] + \frac{U}{2} \sum_{j,\ell} n_{\ell,j} (n_{\ell,j} - 1), \\ \mathcal{H}_\perp &= -t_\perp \sum_j [b_{1,j}^\dagger b_{2,j} + \text{h.c.}].\end{aligned}\tag{IV.13}$$

$\mathcal{H}_0$  décrit deux chaînes découplées de bosons avec des interactions répulsives sur site  $U$  de telle sorte que l'on retrouve le modèle (IV.1) dans la limite  $U = \infty$ .

$\mathcal{H}_\perp$  couple les deux chaînes. Les excitations de basse énergie d'une chaîne unique de bosons en interaction sont les excitations collectives correspondant aux modes de phonons du quasi-condensat. Nous utilisons donc l'approche du fluide harmonique présentée dans les chapitres précédents, et on écrit l'opérateur création  $\psi_b^\dagger(x)$  (avec  $\psi_b^\dagger(x)$  la limite continue de l'opérateur création  $b^\dagger$ ) comme

$$\psi_b^\dagger(x) = \left[ \rho - \frac{1}{\pi} \nabla \phi \right]^{1/2} \sum_p e^{i2p(\pi\rho x - \phi(x))} e^{-i\theta(x)},\tag{IV.14}$$

où  $p$  est un entier naturel et  $\rho$  la densité moyenne de bosons. On rappelle que  $\phi$  et  $\theta$  sont deux champs bosoniques duals obéissant à la relation de commutation suivante

$$\left[ \phi(x), \frac{1}{\pi} \nabla \theta(x') \right] = i\delta(x - x').\tag{IV.15}$$

Dans ce langage,  $-\frac{1}{\pi} \nabla \phi$  décrit les fluctuations de densité de grande longueur d'onde, et  $\theta$  correspond à la phase superfluide. En utilisant l'équation (IV.14) et en prenant la limite continue, on peut récrire  $\mathcal{H}_0$  dans l'équation (IV.13) comme [36]

$$H_0 = \frac{v}{2\pi} \sum_{\ell=1,2} \int dx \left[ K(\nabla \theta_\ell)^2 + \frac{1}{K}(\nabla \phi_\ell)^2 \right],\tag{IV.16}$$

où nous avons introduit deux paires de champs bosoniques  $\phi_\ell$  et  $\theta_\ell$  vivant sur la chaîne  $\ell$ . La physique de basse énergie sur chaque chaîne est caractérisée par les mêmes paramètres,  $v$  la vitesse du son et  $K$  le paramètre de Luttinger. Pour des bosons répulsifs,  $K \geq 1$ . En incluant des interactions aux plus proches voisins dans le modèle il est possible d'atteindre des  $K \leq 1$ , faisant ainsi le lien avec le modèle de la chaîne  $XXZ$  [81]. Toujours d'après l'équation (IV.14) on peut récrire  $\mathcal{H}_\perp$  comme

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\perp \approx & -\frac{t_\perp}{\pi\alpha} \int dx \cos(\theta_2 - \theta_1) \left[ 1 + 4 \cos(2\pi\rho x - \phi_2 - \phi_1) \cos(\phi_2 - \phi_1) \right. \\ & \left. + 2 \cos(4\pi\rho x - 2\phi_2 - 2\phi_1) + 2 \cos(2\phi_2 - 2\phi_1) \right].\end{aligned}\tag{IV.17}$$

Pour écrire cette équation, nous avons restreint la somme dans (IV.14) aux valeurs  $p = 0, \pm 1$ , fournissant les termes dominants pour la perturbation  $t_\perp$ . Le demi-remplissage correspond à  $\rho = 1/(2a)$  avec  $a$  le pas du réseau. En introduisant

deux champs symétrique et antisymétrique définis comme  $\phi_s = (\phi_1 + \phi_2)/\sqrt{2}$ ,  $\phi_a = (\phi_1 - \phi_2)/\sqrt{2}$ ,  $\theta_s = (\theta_1 + \theta_2)/\sqrt{2}$ ,  $\theta_a = (\theta_1 - \theta_2)/\sqrt{2}$  et en ne retenant que les termes non-oscillants sous l'intégrale, on peut récrire  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_\perp$  comme

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \sum_{j=s,a} \frac{v_j}{2\pi} \int dx \left[ K_j (\nabla \theta_j)^2 + \frac{1}{K_j} (\nabla \phi_j)^2 \right] \\ & - \frac{t_\perp}{\pi\alpha} \int dx \left[ \cos(\sqrt{2}\theta_a) + 2 \cos(\sqrt{2}\theta_a) \cos(\sqrt{8}\phi_s) + 2 \cos(\sqrt{2}\theta_a) \cos(\sqrt{8}\phi_a) \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.18})$$

avec  $K_a = K_s = K$  et  $v_a = v_s = v$ . Nous voyons alors que le couplage entre les deux chaînes a une forme assez complexe dans le formalisme de la bosonisation. Pour déterminer la physique de basse énergie nous dérivons les équations du RG pour les différentes variables de couplage. Pour ce faire, nous commençons par écrire l'action en temps imaginaire associée au Hamiltonien (IV.18), sous la forme générale

$$\begin{aligned} S = & \sum_{j=s,a} \frac{1}{2\pi K_j} \int dx d\tau \left[ \frac{1}{v_j} (\partial_\tau \phi_j)^2 + v_j (\partial_x \theta_j)^2 \right] - \int dx d(v\tau) \left[ \frac{y_\perp}{\pi a^2} \cos(\sqrt{2}\theta_a) \right. \\ & + \frac{2y_a}{\pi a^2} \cos(\sqrt{2}\theta_a) \cos(\sqrt{8}\phi_a) + \frac{2y_s}{\pi a^2} \cos(\sqrt{2}\theta_a) \cos(\sqrt{8}\phi_s) \\ & \left. + \frac{g_s}{\pi a^2} \cos(\sqrt{8}\phi_s) \right], \end{aligned} \quad (\text{IV.19})$$

où nous avons introduit quatre variables de couplage adimensionnées  $y_\perp$ ,  $y_s$ ,  $y_a$  et finalement  $g_s$  qui est générée sous le flot du RG, comme nous allons le voir. Les valeurs initiales de ces variables sont les valeurs nues extraites directement du Hamiltonien (IV.18) :  $y_\perp(a) = at_\perp/v$ ,  $y_s(a) = y_a(a) = at_\perp v$ ,  $g_s(a) = 0$ . En utilisant les méthodes évoquées au chapitre III on dérive les équations de flot suivantes

$$\begin{aligned} \frac{dy_\perp}{dl} &= \left( 2 - \frac{1}{2K_a} \right) y_\perp(l), \\ \frac{dy_a}{dl} &= \left( 2 - \frac{1}{2K_a} - 2K_a \right) y_a(l), \\ \frac{dy_s}{dl} &= \left( 2 - \frac{1}{2K_a} - 2K_s \right) y_s(l), \\ \frac{dg_s}{dl} &= (2 - 2K_s) g_s(l) + \frac{1}{\pi} y_\perp(l) y_s(l), \\ \frac{dK_a}{dl} &= \frac{y_\perp^2(l)}{4} + \frac{y_s^2(l)}{4}, \\ \frac{dK_s}{dl} &= -4K_s^2(l) y_s^2(l) - 2g_s^2(l) K_s^2(l), \end{aligned} \quad (\text{IV.20})$$

Le cut-off courte distance est paramétré comme  $a(l) = ae^l$ . Puisque les valeurs initiales de  $K_{s,a}$  sont plus grandes que 1,  $y_\perp$  est une perturbation fortement relevante en

comparaison des autres variables de couplage et part en couplage fort. Cela implique que le champ  $\theta_a$  est gappé. Les phases quantiques des deux chaînes s'accrochent dès que l'amplitude de saut transverse est non-nulle. Nous introduisons ensuite le paramètre  $l_\perp$  telle que  $y_\perp(l_\perp) = 1$ , définissant une échelle d'énergie  $\Delta_a \sim te^{-l_\perp}$ . Tant que  $l < l_\perp$ , on peut utiliser le système entier d'équations (IV.20). Dès que  $l > l_\perp$ , on peut simplifier l'action (IV.19) en remplaçant le champ  $\cos(\sqrt{2}\theta_a)$  par sa valeur moyenne (une procédure similaire est décrite dans [142] pour des chaînes de spin couplées, et dans [143] pour échelle au remplissage unité) et ainsi obtenir une action effective valide pour des échelles d'énergies plus petites,  $l > l_\perp$ . Le champ de phase quantique  $\theta_a$  étant gappé, nous nous concentrons sur le secteur symétrique ( $s$ ) dont l'action effective prend la forme plus simple

$$S_s^{\text{eff}} = \int dx d\tau \left\{ \frac{1}{2\pi\tilde{K}_s} \left[ \frac{1}{v_s} (\partial_\tau \phi_s)^2 + v_s (\partial_x \phi_s)^2 \right] - \frac{\tilde{g}_s}{\pi\alpha^2} \cos(\sqrt{8}\phi_s) \right\}, \quad (\text{IV.21})$$

où nous avons introduit  $\tilde{K}_s = K_s(l_\perp)$  et  $\tilde{g}_s = g_s(l_\perp) + 2\eta y_s(l_\perp)$  avec  $\eta = \langle \cos(\sqrt{2}\theta_a) \rangle = O(1)$ . L'action  $S_s^{\text{eff}}$  est du type sine-Gordon. Les équations du RG associées à  $\tilde{K}_s$  et  $\tilde{g}_s$  sont obtenues en continuant à intégrer les degrés de liberté de haute énergie entre  $l_\perp$  et  $l$ , ce qui conduit à

$$\frac{d\tilde{g}_s}{dl} = \left( 2 - 2\tilde{K}_s(l) \right) \tilde{g}_s(l), \quad (\text{IV.22})$$

$$\frac{d\tilde{K}_s}{dl} = -2\tilde{g}_s^2(l) \tilde{K}_s^2(l), \quad (\text{IV.23})$$

les équations standards du flot de Kosterlitz-Thouless [36]. La variable de couplage  $\tilde{g}_s$  part en couplage fort lorsque  $2\tilde{K}_s(l)$  est plus petit que 1. Puisque  $K_s(l)$  décroît toujours pendant la première étape du RG,  $\tilde{g}_s$  part en couplage fort et, finalement, un gap  $\Delta_s$  s'ouvre dans le secteur symétrique, à des échelles d'énergie très basses. Nous insistons sur le fait que l'ouverture du gap est non-triviale du point de vue du RG : tout d'abord, un premier gap s'ouvre dans le secteur antisymétrique (accrochant le champ  $\theta_a$ ), et dans un deuxième temps induit un gap dans le secteur symétrique (accrochage du champ  $\phi_s$ ). Le scaling du gap avec  $t_\perp$ , obtenu d'après la résolution numérique du flot du RG, apparaît dans la figure IV.5. Il dépend fortement de la valeur initiale de  $K$ . Pour des bosons de cœur dur –  $K = 1$  – le gap de charge croît exponentiellement lentement avec  $t_\perp$  :

$$\Delta_s \propto e^{-at/t_\perp}. \quad (\text{IV.24})$$

En effet, pendant la première étape du flot, pour  $l < l_\perp$ ,  $y_s$  n'est pas relevant et est renormalisé vers des valeurs plus faibles, tandis que  $K_s$  décroît vers une valeur plus petite mais proche de 1. Au début de la deuxième étape,  $y_s$  est devenue une perturbation relevante mais toujours très près de la marginalité. On pourrait imaginer une situation très différente avec  $K$  très en dessous de 1 – par exemple en ajoutant des

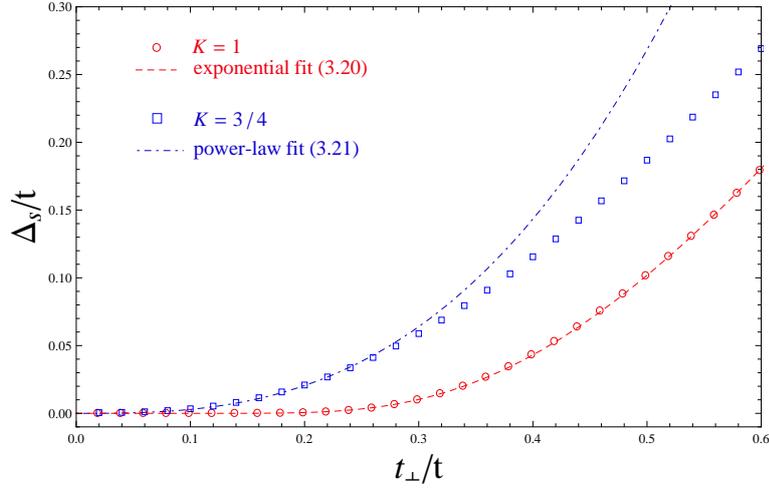


FIGURE IV.5: *Gap de charge obtenu par intégration numérique du flot du RG en deux étapes. Le scaling du gap dépend largement de la valeur initiale de  $K$ . Nous trouvons pour l'exposant de la loi de puissance, eq. (IV.25),  $b = 2.81$  en accord avec les résultats DMRG de l'équation (IV.37)*

interactions aux plus proches voisins dans (IV.13) – et  $y_s$  se trouverait beaucoup plus loin de la marginalité au début de la deuxième étape, induisant ainsi une ouverture beaucoup plus rapide – en loi de puissance – du gap (voir la figure IV.5),

$$\Delta_s \propto (t_{\perp}/t)^b. \quad (\text{IV.25})$$

Finalement, cette analyse par le RG montre que le gap dans le secteur symétrique s'ouvre dès que l'amplitude de saut transverse est non-nulle. Ce résultat est drastiquement différent du cas fermionique où un gap de bande apparaît seulement pour une valeur de  $t_{\perp}$  assez large.

#### IV.2.4 Comparaison avec les échelles de spin 1/2

Une échelle à deux montants de bosons de cœur dur est équivalente à une échelle de spin-1/2. En effet, les spins 1/2 satisfont des relations de commutation mixtes, lorsqu'on les exprime en fonction des  $S_{\alpha,j}^{\pm} = S_{\alpha,j}^x \pm iS_{\alpha,j}^y$ . En suivant Matsubara et Matsuda,[144], un boson de cœur dur sur un site donné correspond à un moment magnétique  $m^z = +1/2$  alors qu'un site vide correspond au moment opposé  $m^z = -1/2$ . Considérons le modèle de bosons de cœur dur que nous avons étudié jusque là et ajoutons des répulsions aux plus proches voisins le long des chaînes et entre les

chaînes. Ce modèle est équivalent à celui d'une échelle de spin 1/2

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \sum_{j,\ell} J [S_{\ell,j}^x S_{\ell,j+1}^x + S_{\ell,j}^y S_{\ell,j+1}^y] + J^z S_{\ell,j}^z S_{\ell,j+1}^z \\ & + \sum_{j=1}^L J_{\perp} [S_{1,j}^x S_{2,j}^x + S_{1,j}^y S_{2,j}^y] + J_{\perp}^z S_{1,j}^z S_{2,j}^z. \end{aligned} \quad (\text{IV.26})$$

Si  $J^z = J_{\perp}^z = 0$ , le Hamiltonien se réduit au modèle de l'équation (IV.1), avec  $t = J/2$  et  $t_{\perp} = J_{\perp}/2$ . L'analyse de couplage fort [145, 136, 137] conduit à image similaire : des singulets se forment sur chaque barre et un gap de spin (un plateau d'aimantation nulle) s'étend autour du champ magnétique nul. Une analyse de couplage faible conduit aux mêmes conclusions. Cependant le mécanisme pour la formation du plateau est différent de celui correspondant au cas des bosons de cœur dur à cause du terme d'échange  $J_{\perp}^z$ . Nous rappelons ci-dessous la forme bosonisée du Hamiltonien (IV.26). De manière similaire à la physique décrite dans la section IV.2.3, la dynamique se découple en deux modes, symétrique et antisymétrique tels qu'on puisse écrire  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_s + \mathcal{H}_a$  [146] avec

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_s &= \frac{v}{2\pi} \int dx \left[ K_s (\nabla \theta_s)^2 + \frac{1}{K_s} (\nabla \phi_s)^2 \right] + \frac{2g_s}{(2\pi a)^2} \int dx \cos[\sqrt{8}\phi_s], \quad (\text{IV.27}) \\ \mathcal{H}_a &= \frac{v}{2\pi} \int dx \left[ K_a (\nabla \theta_a)^2 + \frac{1}{K_a} (\nabla \phi_a)^2 \right] + \frac{2g_a}{(2\pi a)^2} \int dx \cos[\sqrt{8}\phi_a] \\ &+ \frac{2G_a}{(2\pi a)^2} \int dx \cos[\sqrt{8}\theta_a]. \end{aligned} \quad (\text{IV.28})$$

Ici,  $K_s = K \left(1 - \frac{KJ_{\perp}^z a}{2\pi v}\right)$ ,  $K_a = K \left(1 + \frac{KJ_{\perp}^z a}{2\pi v}\right)$ ,  $g_s = g_a = aJ_{\perp}^z$ ,  $G_a = \pi J_{\perp} a$ .  $K$  est le paramètre de Luttinger original d'une seule chaîne de spin et dépend de  $J^z$ , le paramètre d'anisotropie. Par exemple  $K = 1$  pour  $J^z = 0$  (bosons de cœur dur) et  $K = 1/2$  pour  $J^z = J$  (chaîne de Heisenberg). Notons que l'échange dans la direction  $z$  le long des chaînes devrait aussi mené à un terme umklapp de la forme

$$\mathcal{H}_u = \frac{2g_u}{(2\pi a)^2} \int dx \cos[\sqrt{8}\phi_s] \cos[\sqrt{8}\phi_a] \quad (\text{IV.29})$$

avec  $g_u \propto J^z$ . Cependant, dès que  $K > 1/2$  ce terme est toujours moins relevant que les autres interactions et n'ouvre aucun gap. Lorsque  $J_{\perp}^z$  s'annule, on devrait aussi inclure le terme  $\cos[\sqrt{2}\theta_a] \cos[2\sqrt{2}\phi_s]$  que nous avons étudié dans la section précédente. Pour  $J_{\perp}^z$  différent de zéro, il est de toutes façons moins relevant et le gap dans le secteur symétrique s'ouvre directement à cause de l'échange dans la direction  $z$ . En effet, pour tout  $J^z \leq 1$  et  $J_{\perp}^z \neq 0$ ,  $K_s < 1$  et  $g_s$  est relevant, ce qui ordonne le champ  $\phi_s$ . Le scaling du gap est connu de la solution du modèle de sine-Gordon

et dépend des conditions initiales pour  $K_s$  and  $g_s$ . Loin du point marginal, le gap de charge s'ouvre en loi de puissance

$$\Delta_s \simeq (J_\perp^z)^{\frac{1}{2-2K}}. \quad (\text{IV.30})$$

Par exemple, au point isotrope de Heisenberg,  $J^z = J$ ,  $K = 1/2$  et le gap s'ouvre linéairement avec  $J_\perp$ .

## IV.3 Résumé des résultats numériques

Dans cette section nous résumons les résultats numériques (DMRG et QMC) obtenus pour l'échelle de bosons de cœur dur. L'analyse numérique complète se trouve dans la référence [63]. Ces résultats confirment les arguments analytiques proposés dans la section précédente et permettent d'établir un diagramme de phase complet. De plus nous proposons dans la section suivante une interprétation de ces données, grâce à quelques arguments analytiques, ainsi que quelques pistes intéressantes pour les expériences.

### IV.3.1 Phase isolant de Mott sur barreaux

Les résultats de Monte-Carlo quantique ont été obtenu par Nicolas Lafforencie à l'aide de l'algorithme SSE (Stochastic Series Expansion) [147, 148, 149]. Les calculs sont effectués dans l'ensemble grand-canonique, où le nombre total de particules est libre de fluctuer. Les observables suivantes sont mesurées (i) la densité de particules

$$\rho = \frac{1}{2L} \sum_{j,\ell} \langle n_{j,\ell} \rangle, \quad (\text{IV.31})$$

(ii) la compressibilité

$$\kappa = \frac{\beta}{2L} \left[ \left\langle \left( \sum_{j,\ell} n_{j,\ell} \right)^2 \right\rangle - \left\langle \sum_{j,\ell} n_{j,\ell} \right\rangle^2 \right], \quad (\text{IV.32})$$

et (iii) la réponse superfluide (superfluid stiffness)

$$\Upsilon_{\text{sf}} = \frac{1}{2L} \left. \frac{\partial^2 E_0(\varphi)}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=0}. \quad (\text{IV.33})$$

avec  $E_0$  l'énergie de l'état fondamental.  $\beta$  est l'inverse de la température  $k_B T$ , et  $\varphi$  est une phase ajoutée sur tous les liens dans la direction longitudinale [150, 151]. Ces deux dernières quantités ont été introduites dans le chapitre II, dans la section II.2.

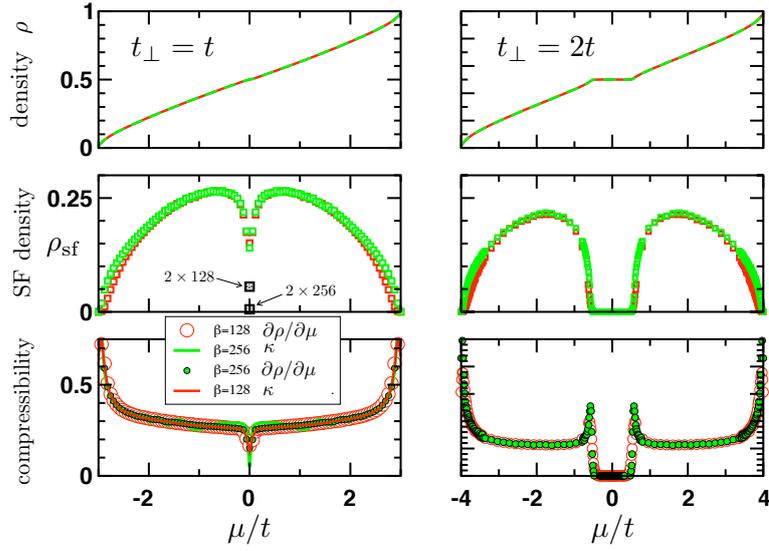


FIGURE IV.6: Résultats QMC pour la densité de particules  $\rho$  (panneau du haut), la densité superfluide  $\rho_{\text{sf}}$  (panneau du milieu) et la compressibilité  $\kappa$  (panneau du bas) obtenu sur une échelle de  $2 \times 64$  sites, avec  $t_{\perp} = t = 1$  (colonne de gauche) et  $t_{\perp} = 2t$  (colonne de droite), pour deux températures  $\beta = 128, 256$ . Dans la colonne de gauche ( $t_{\perp} = t$ ), les données pour la compressibilité sont obtenues soit par une mesure directe de  $\kappa$  [lignes pleines, équation (IV.32)], ou à partir de la dérivée de  $\rho(\mu)$  calculée numériquement [cercles]. Notez que pour  $t_{\perp} = t$  (à gauche), les données pour la densité superfluide sont aussi montrées pour  $L = 128$  et  $L = 256$  à  $\beta = 4 \times L$ .

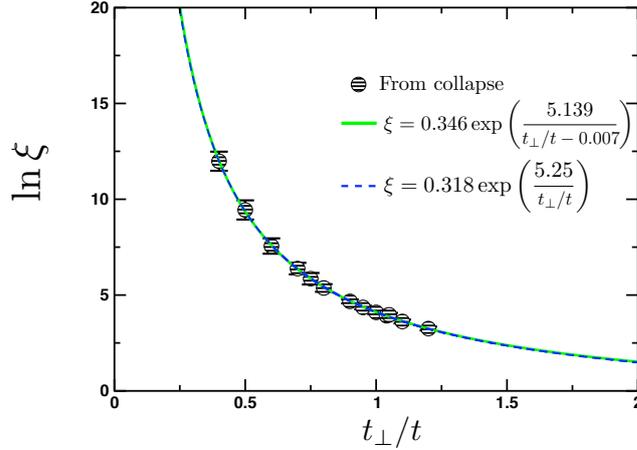


FIGURE IV.7: Longueur de corrélation pour l'échelle bosonique tracée en fonction de  $t_{\perp}$ . Les points sont obtenus par un data collapse [63] des données obtenues pour différentes tailles du système. Le fit par une loi exponentielle est en bon accord avec les résultats analytiques issus du RG.

Les données QMC sont montrées dans la figure IV.6 pour deux valeurs représentatives de l'amplitude de saut transverse  $t_{\perp} = t$  et  $t_{\perp} = 2t$ . Comme attendu pour les  $t_{\perp}$  grands, un plateau dans la densité au demi-remplissage est clairement visible pour  $t_{\perp} = 2t$  si  $-0.5\mu/t < 0.5$ , indiquant un état isolant incompressible, où la densité superfluide et la compressibilité s'annulent. Pour  $t_{\perp} = t$ , l'interprétation des données numériques pour un système de taille finie est plus délicate car le gap au demi-remplissage est beaucoup plus faible. Le plateau de densité n'est pas visible directement. En revanche, la compressibilité présente une chute brutale près du demi-remplissage, indiquant l'état isolant. La densité superfluide s'annule aussi, comme le montrent les données pour un système de taille plus grande,  $L = 256$  au lieu de 64.

Évidemment, lorsque  $t_{\perp}/t$  devient encore plus petit, il sera très difficile d'identifier la phase isolante directement à partir de  $\rho$  et  $\kappa$ , et d'en extraire par exemple la valeur du gap  $\Delta_s$  au demi-remplissage. Il faudrait en effet réaliser les simulations QMC dans l'état fondamental, c'est-à-dire pour des températures bien en dessous du gap, et également à la limite thermodynamique,  $L \gg \xi$  où  $\xi \sim 1/\Delta_s$  est la longueur de corrélation associée à l'ordre à courte portée de la phase isolante.

Une façon de contourner le problème est de s'intéresser plutôt à la réponse superfluide du système vérifiant la loi d'échelle  $\exp(-L/\xi)$ , dans la phase isolante. Le calcul de cette quantité pour différentes tailles du système et différentes valeurs de  $t_{\perp}$  permet, par une opération de *data collapse*, d'obtenir la forme de la longueur de corrélation  $\xi$  et, par là même, la taille du gap  $\Delta_s$  [63]. Les résultats sont résumés dans la figure IV.7.

Les simulations DMRG, effectuées à température nulle, sont plus compétitives pour évaluer de petits gaps. Nous rendons compte ici des résultats obtenus en ce sens par

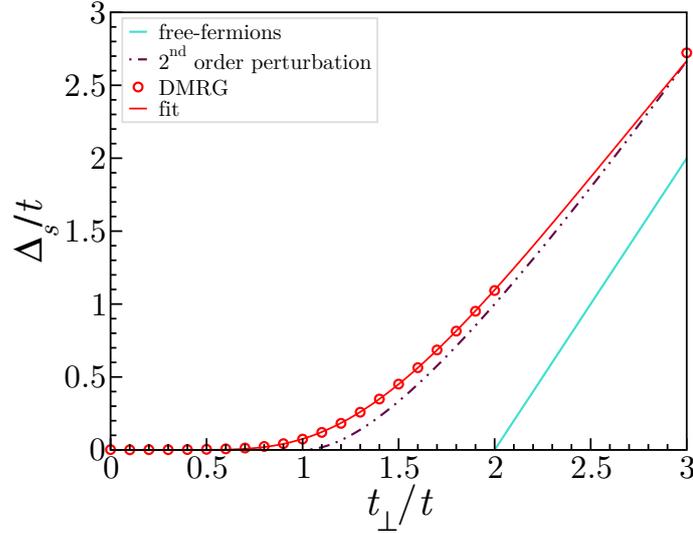


FIGURE IV.8: *Gap de charge du modèle d'échelle en fonction de l'amplitude de saut transverse, obtenu par des calcul DMRG, et comparé à la théorie de perturbation de l'équation (IV.4) pour les fermions libres et de l'équation (IV.8) pour les bosons de cœur dur dans la limite des barreaux forts. La courbe rouge est un fit de l'expression (IV.36)*

Guillaume Roux et présentés dans la référence [63].

Le gap est calculé à température nulle en utilisant la définition

$$\Delta_s = E_0(N+1) + E_0(N-1) - 2E_0(N), \quad (\text{IV.34})$$

où  $E_0(N)$  est l'énergie de l'état fondamental à  $N$  bosons, de telle sorte que  $\Delta_s$  soit directement la taille du plateau. Les résultats sont obtenus en utilisant l'ansatz suivant, déduit de l'analyse de taille finie du gap

$$\Delta_s(L) = \Delta_s + \frac{A}{L} e^{-L/\xi}. \quad (\text{IV.35})$$

Le résultat est tracé sur la figure IV.8 dans laquelle sont également tracés les résultats de couplage fort de la section IV.2.2.1 et des fermions libres à titre de comparaison. En suivant les prédictions issues de l'approche de bosonisation de la section IV.2.3, l'ouverture du gap avec  $t_\perp \leq 2t$  est fittée en utilisant la loi suivante

$$\Delta_s = \Delta_s^0 \exp\left(-a \frac{t}{t_\perp - t_\perp^c}\right), \quad (\text{IV.36})$$

avec  $\Delta_s^0$ ,  $a$  et  $t_\perp^c$  les paramètres de fit. Les valeurs obtenues sont respectivement  $\Delta_s^0 \simeq 15.624t$ ,  $a \simeq 5.294$  et  $t_\perp^c \simeq 0.0075t$ . La valeur critique obtenue est compatible

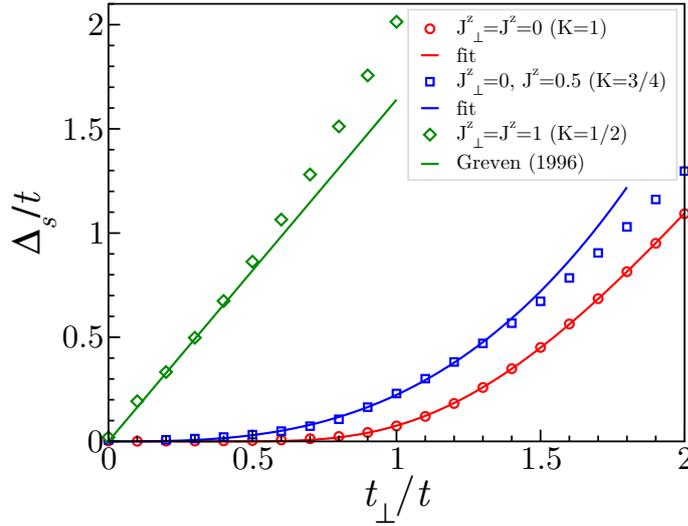


FIGURE IV.9: Comparaison du gap de l'échelle XXZ dans trois situations différentes. Les résultats DMRG sont comparés à l'équation (IV.36) pour les bosons de cœur dur, à l'équation (IV.37) pour les chaînes XXZ couplées, et au comportement linéaire trouvé par Greven et al. [152] dans le cas  $SU(2)$ .

avec  $t_{\perp}^c = 0$  aux erreurs numériques près. L'ouverture du gap est particulièrement lente mais atteint une valeur respectable  $0.074t \leq \Delta_s \leq t$  pour  $t \leq t_{\perp} \leq 2t$ .

La figure IV.9 compile les résultats obtenus en rajoutant des interactions aux plus proches voisins (ce qui revient à simuler l'échelle de spin de l'équation (IV.26)) afin de comparer les ouvertures de gap pour différentes valeurs des interactions. Comme prédit par le calcul de RG de la section IV.2.3, pour un couplage  $J^z$  intermédiaire, l'ouverture est bien fittée par une loi de puissance avec un exposant de l'ordre 3,

$$\Delta_s \simeq 0.2234 t \left( \frac{t_{\perp}}{t} \right)^{2.88}, \quad (\text{IV.37})$$

proche de l'exposant obtenu par le RG, et relié de manière non triviale au paramètre  $K$  (voir la figure IV.5). Le gap dans la limite isotrope reproduit bien les premiers résultats de la référence [152]. La loi contrôlant l'ouverture du gap est très sensible aux interactions, celles-ci augmentant largement la taille du gap.

Il est possible de comparer la longueur  $\xi$  obtenue en QMC avec l'inverse du gap  $1/\Delta_s$  tel qu'obtenu par les simulations DMRG (équation (IV.36) et figure IV.8). L'accord est excellent, montrant en particulier une valeur assez large du paramètre  $a \simeq 5.2(1)$ . La physique des corrélations à courte portée – typique des échelles de spins quantiques – n'est pas réalisée ici, exceptée dans la limite de couplage fort  $t_{\perp} \gg t$ . Il est assez instructif de comparer les résultats de  $\xi$  pour l'échelle bosonique avec la longueur de corrélation de l'échelle de Heisenberg  $SU(2)$  (voir la table IV.1),

$\frac{t_\perp}{t}$	$\xi$ [Échelle de bosons]	$\xi$ [Échelle SU(2)]
1	60(1)	1.99
0.9	106(2)	2.28
0.8	$2.15(5) \times 10^2$	2.65
0.7	$5.9(1) \times 10^2$	3.12
0.6	$1.9(1) \times 10^3$	3.76
0.5	$1.2(1) \times 10^4$	4.64
0.4	$1.6(1) \times 10^5$	5.93

TABLE IV.1: *Estimations QMC de la longueur de corrélation  $\xi$  pour l'échelle demi-remplie. À titre de comparaison, la troisième colonne montre la longueur de corrélation pour la phase singulets sur barreaux de l'échelle SU(2) [modèle de l'équation (IV.26)] avec  $J_\perp = J_\perp^z = t_\perp$  et  $J^z = J = t$  (voir aussi la figure IV.9).*

présentant des corrélations à très courte portée. Dans l'échelle bosonique, l'état isolant sur barreau présente des corrélations le long des montants s'étendant sur une très grande longueur  $\xi$ , même pour  $t_\perp \sim t$ , comme on peut le voir dans la table IV.1. En pratique, dans un réseau optique fait de quelques centaines de sites, deux chaînes faiblement couplées se comporteront comme un système sans gap (voir la discussion dans la section IV.5.3).

### IV.3.2 Phase liquide de Luttinger

Dans le cas des densités incommensurables, le paramètre de Luttinger  $K_s$  du mode symétrique sans gap, gouverne toutes les fonctions de corrélations. Il dépend de manière non triviale de la densité et de  $t_\perp$ , nécessitant des estimations non-perturbatives, accessibles par exemple par des simulations DMRG. Ces données sont apparues pour la première fois dans [153]. Les données présentées dans [63] sont néanmoins beaucoup plus précises et permettent une interprétation plus poussée.

$K_s$  est extrait du calcul des fonctions de corrélation en DMRG, avec des conditions aux limites ouvertes.  $K_s$  gouverne la décroissance algébrique des corrélateurs, et entre autres, du propagateur d'une paire de bosons créée sur un barreau

$$P(x, y) = \langle b_{1,x}^\dagger b_{2,x}^\dagger b_{1,y} b_{2,y} \rangle. \quad (\text{IV.38})$$

Ce corrélateur développé dans l'approximation du fluide harmonique est dominé par une décroissance algébrique avec un exposant  $1/K_s$ . Pour avoir les meilleures estimations possibles pour  $K_s$ , il faut prendre en compte les corrections dues à la taille finie. Les résultats de théorie conforme [153, 35] indiquent d'utiliser la forme suivante

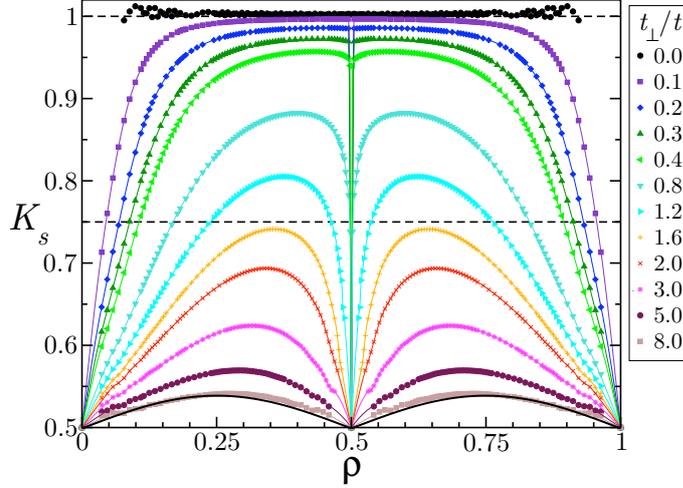


FIGURE IV.10: Résultats DMRG pour le paramètre de Luttinger  $K_s$  tracé en fonction de la densité  $\rho$ . Les différents symboles représentent les données pour différentes valeurs de  $t_{\perp}/t$ . La ligne noire représente le résultat analytique perturbatif de l'équation (IV.47) pour  $t_{\perp}/t = 8$ , dérivé dans la section IV.4.2.

pour fitter le corrélateur

$$P(x, y) = A \left[ \frac{\sqrt{d(2x|2L)d(2y|2L)}}{d(x+y|2L)d(x-y|2L)} \right]^{1/K_s}, \quad (\text{IV.39})$$

où  $y = L/2$ . Ici  $d(x|L) = \frac{L}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ . Les résultats sont présentés dans la figure IV.10, où  $K_s$  est tracé en fonction du remplissage  $\rho$  pour différentes valeurs de  $t_{\perp}$ . L'objet des prochaines sections est l'analyse de ces nouvelles données.

## IV.4 Cas limites pour le liquide de Luttinger : résultats analytiques

Comme nous l'avons rappelé plus tôt, le comportement de  $K_s$  près de la transition vers l'isolant de Mott au demi-remplissage est contrôlé par la transition Commensurable-Incommensurable (C-IC) [154, 155]. La valeur de  $K_s$  à la transition est égale à la moitié de la valeur critique du modèle (IV.21), et les corrections dues au dopage sont inversement proportionnelles à la taille du gap de Mott [156]. Comme nous l'avons montré, le gap s'ouvre exponentiellement lentement avec l'amplitude de saut transverse  $t_{\perp}$ , en accord avec les pentes observées pour  $K_s$ . Nous donnons ici trois arguments, un peu moins sophistiqués peut-être, qui, nous pensons peuvent être utiles pour comprendre l'évolution de  $K_s$ , en particulier dans la limite diluée tout comme dans la limite des barreaux forts.

### IV.4.1 Limite diluée pour le gaz de bosons

Dans la limite extrêmement diluée, la densité bosonique croît avec le potentiel chimique  $\mu$  comme le ferait la densité des fermions libres, pour le remplissage du bas de la bande 0 de l'équation (IV.3). Ceci est apparent dans la limite des barreaux forts, pour laquelle le Hamiltonien est équivalent à celui de pseudo-fermions sans spins dans l'équation (IV.12). Pour des densités faibles, on peut négliger interactions et sauts corrélés et les pseudo-fermions sont effectivement libres. Dans la limite de couplage faible, la forme des propagateurs bosoniques est utile pour tirer des conclusions analogues. Considérons les bosons symétriques  $b_{j,+} = (b_{j,1} + b_{j,2})/\sqrt{2}$  et antisymétriques  $b_{j,-} = (b_{j,1} - b_{j,2})/\sqrt{2}$ . On a

$$\langle b_+^\dagger(x)b_+(0) \rangle \sim \left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\frac{1}{4K_s}} \left\langle \cos\left(\frac{\theta_a(x)}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\theta_a(0)}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle, \quad (\text{IV.40})$$

et

$$\langle b_-^\dagger(x)b_-(0) \rangle \sim \left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\frac{1}{4K_s}} \left\langle \sin\left(\frac{\theta_a(x)}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\theta_a(0)}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle. \quad (\text{IV.41})$$

Puisque le terme de saut transverse est une perturbation pertinente, le champ  $\theta_a$  est gappé, la moyenne des cosinus décroît exponentiellement vers 1, sur une distance typique  $\xi_a$ , alors que la moyenne des sinus décroît exponentiellement vers 0 sur la même distance. Dans le prochain paragraphe, nous discutons en détail le comportement de cette longueur  $\xi_a$  en fonction de  $t_\perp$  et du remplissage  $\rho$ . Ici il est suffisant de remarquer que pour des remplissages très faibles, seul un mode sans gap survit, un liquide de Luttinger de bosons symétriques. Dans la figure IV.11, le calcul QMC du remplissage des bosons de cœur dur et des fermions libres sur une échelle avec  $t = t_\perp$  est représenté. Ils deviennent identiques dans la limite de dilution extrême, confirmant à la fois nos analyses de couplage fort et de couplage faible. Cela conduit à la forme suivante pour la densité

$$\rho(\mu) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu - \mu_c}{t}}, \quad (\text{IV.42})$$

et une compressibilité

$$\kappa(\mu) = \frac{1}{4\pi \sqrt{t(\mu - \mu_c)}}. \quad (\text{IV.43})$$

Aussi, pour des systèmes très dilués, il est naturel de s'attendre à ce que la fraction superfluide tende vers l'unité [157] :  $\rho_{\text{sf}}/\rho \rightarrow 1$ . De nouveau, ceci est illustré dans la figure IV.11 où  $\rho_{\text{sf}}/\rho_{\text{hcb}} \rightarrow 1$  lorsque  $\rho_{\text{hcb}} \rightarrow 0$ . Ainsi, dans cette limite la réponse  $\Upsilon_{\text{sf}} = 2t\rho_{\text{sf}}$  est simplement donnée par

$$\Upsilon_{\text{sf}} = \frac{t}{\pi} \sqrt{\frac{\mu - \mu_c}{t}} \quad (\text{IV.44})$$

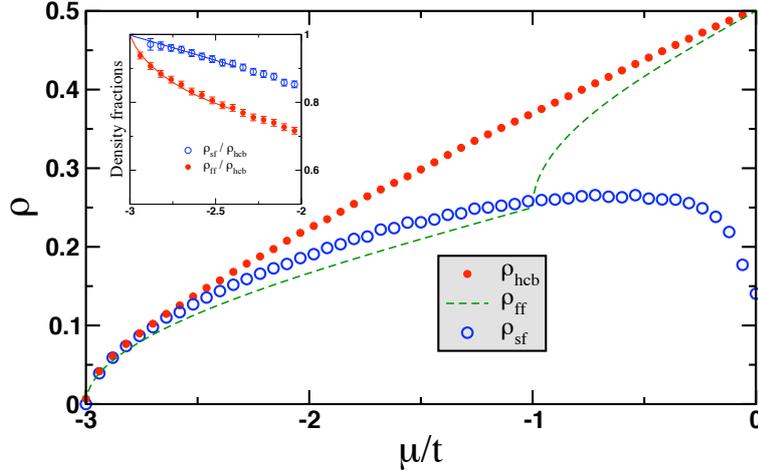


FIGURE IV.11: Différentes densités tracées en fonction de  $\mu/t$  pour  $t_{\perp} = t$  : bosons de cœur dur (QMC, disques rouges), fermions libres (exact, ligne pointillée), et la densité superfluide pour les bosons de cœur dur (QMC, cercles bleus). Résultats QMC obtenus pour des échelles de  $2 \times 64$  sites à la température  $\beta/t = 512$ . Inset : fraction superfluide  $\rho_{\text{sf}}/\rho_{\text{hcb}}$  (cercles bleus) et rapport des densités fermionique et bosonique  $\rho_{\text{ff}}/\rho_{\text{hcb}}$  (disques rouges) près du point critique  $\mu_c = -3t$ . Les lignes sont des guides pour les yeux.

ce qui, en utilisant la relation hydrodynamique pour le paramètre de Luttinger devient simplement

$$K_s = \frac{1}{2}. \quad (\text{IV.45})$$

Voici donc une différence importante entre les fermions libres et les bosons de cœur dur sur une échelle à deux montants : pour les premiers l'état du système est un liquide de Luttinger à un mode avec  $K = 1$ , même au voisinage de  $\rho = 0, 1$ . Notons que les bosons symétriques se comportent en effet comme des bosons de cœur dur unidimensionnels à très faible remplissage car leur propagateur est de la forme  $\langle b_{\perp}^{\dagger}(x)b_{\perp}(0) \rangle \sim x^{-1/2}$ . Sur la figure IV.11, nous remarquons aussi qu'au fur et à mesure que la densité augmente, l'inégalité suivante,  $\rho_{\text{hcb}} > \rho_{\text{sf}} > \rho_{\text{ff}}$ , est toujours vérifiée, impliquant  $K_s > 1/2$  à mesure que l'échelle se remplit en bosons.

#### IV.4.2 Isolant dopé : limite des barreaux forts

Le modèle effectif de pseudo-fermions sans spin dérivé dans la section IV.2.2.2 au second ordre en  $t/t_{\perp}$  – équation (IV.12) – permet de réduire le problème à celui d'une chaîne 1D, pour laquelle il est possible de calculer à la fois le paramètre de Luttinger  $\tilde{K}$  et la vitesse renormalisée  $\tilde{v}$  en utilisant les relations hydrodynamiques sur la compressibilité et la réponse de la phase à un changement des conditions aux

limites périodiques. Il est en effet facile de calculer l'énergie de l'état fondamental du Hamiltonien effectif, au premier ordre de perturbation en  $t/t_\perp$  (à ce sujet voir la référence [158] ainsi que l'annexe B.3). Nous trouvons

$$\tilde{K} = 1 + \frac{2t \sin(\pi\tilde{\rho})}{t_\perp \pi}, \quad (\text{IV.46})$$

avec  $\tilde{\rho} = 2(\rho - 0.5)$  la densité des pseudo-fermions, c'est-à-dire la densité de barreaux doublement occupés. Nous nous tournons maintenant vers la question de la relation entre  $\tilde{K}$  et  $K_s$  dans le système original. Comme nous l'avons suggéré plus tôt, l'intuition suggère que les pseudo-fermions dans le modèle effectif sont reliés aux bosons symétriques de l'échelle originale,  $b_+ = (b_1 + b_2)/\sqrt{2}$ , et, en se basant sur le propagateur adéquat (IV.40), nous avons vu que pour des distances assez longues,  $x \gg \xi_a$ , ces particules se comportent comme un liquide de Luttinger. Dans la limite de couplage fort, en utilisant les mappings de l'annexe B.2, nous trouvons que le propagateur décroît comme  $\langle b_+^\dagger(x)b_+(0) \rangle \sim x^{-1/(2\tilde{K})}$ . On peut alors faire l'identification  $\tilde{K} = 2K_s$  dans le régime de couplage fort et obtenir l'expression perturbative suivante

$$K_s = \frac{1}{2} + \frac{t \sin[2\pi(\rho - 0.5)]}{t_\perp \pi}. \quad (\text{IV.47})$$

Cette expression semble déjà une bonne approximation pour  $t_\perp = 8t$ , comme l'indique la figure IV.10. Notez qu'un calcul similaire a été mené par Cazalilla [158] dans un contexte différent. Dans cet article, l'auteur calcule le paramètre de Luttinger du modèle de Bose-Hubbard dans la limite de fortes interactions répulsives sur site en écrivant un modèle effectif de pseudo-fermions sans spin, avec des interactions attractives aux plus proches voisins et des sauts corrélés aux seconds voisins. Plusieurs analogies peuvent être tirées avec notre cas. On peut considérer que les bosons symétriques sont de cœur mou, puisque qu'il est possible d'en placer deux sur le même site (et faire un barreau occupé). Cependant il est important de noter qu'on ne peut pas en mettre plus de deux et qu'un calcul perturbatif sur le modèle de Bose-Hubbard pour des remplissages plus grands que un mènerait à un Hamiltonien effectif différent.

Naurellement, en dopant l'isolant de Mott avec des trous, on retrouve une expression symétrique pour  $K_s$  lorsque  $\rho < 0.5$  :

$$K_s = \frac{1}{2} + \frac{t \sin[2\pi(0.5 - \rho)]}{t_\perp \pi}. \quad (\text{IV.48})$$

Ceci étant dit, nous avons maintenant une description quantitative du comportement de  $K_s$  à large  $t_\perp/t$ .

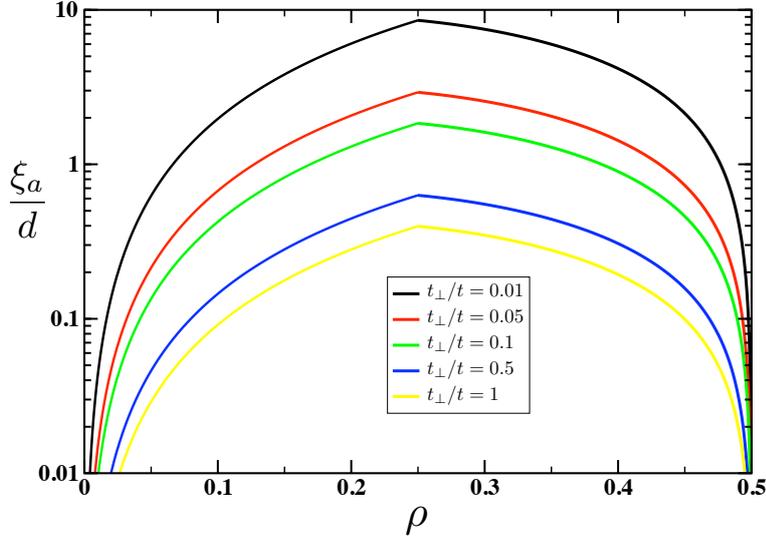


FIGURE IV.12: Rapport  $\xi_a/d$  en fonction de la densité  $\rho$  pour différentes valeurs de  $t_\perp/t$ .

### IV.4.3 Limite de couplage faible : asymétrie de $K_s$

Nous proposons maintenant un argument découlant du RG afin d'expliquer le comportement qualitatif de  $K_s$  à petit  $t_\perp/t$ , en particulier l'asymétrie assez grande autour du quart-remplissage. Pour  $t_\perp < t$ , la longueur  $\xi_a$  que nous avons introduite plus tôt peut être calculée par le RG

$$\xi_a \sim (t_\perp/v)^{-2K/(4K-1)}, \quad (\text{IV.49})$$

où  $v = 2t \sin(\pi\rho)$  est la vitesse du son le long des chaînes. Cette échelle de longueur est typiquement la distance au-delà de laquelle les phases superfluides des deux champs s'accrochent. Il est instructif de considérer le rapport  $\xi_a/d$ , où  $d$  est la distance pertinente moyenne entre particules. Par pertinente, nous entendons la distance entre bosons  $d \sim (2\rho)^{-1}$  pour  $0 < \rho < 1/4$ , ou entre trous  $d \sim (1 - 2\rho)^{-1}$  pour  $1/4 < \rho < 1/2$ . On distingue deux régimes intéressants. (i) Lorsque  $\xi_a \ll d$ , le système est en pratique unidimensionnel car les fluctuations transverses de la phase décroissent sur des distances plus petites que la distance inter-particule  $d$  : dans un tel régime, on s'attend à  $K_s \sim 1/2$ . (ii) Dans la limite opposée  $\xi_a \gg d$ , le système se comporte comme deux superfluides faiblement couplés et on s'attend à  $K_s \sim 1$ .

On peut tenir un raisonnement un petit plus quantitatif. En prenant  $K = 1$  dans l'équation (IV.49), on trouve

$$\frac{\xi_a}{d} = \min[(2\rho), (1 - 2\rho)] \times \left( 2 \sin(\pi\rho) \frac{t}{t_\perp} \right)^{2/3}. \quad (\text{IV.50})$$

Tracé dans la figure IV.12, ce rapport présente une asymétrie autour de  $\rho = 1/4$ , connectée au comportement asymétrique de  $K_s$  pour des petits  $t_\perp/t$  (figure IV.10). En particulier, le fait que  $\xi_a/d$  s'annule de manière beaucoup plus abrupte près du demi-remplissage que dans la limite diluée explique la décroissance abrupte de  $K_s$  vers  $1/2$  au demi-remplissage, pour les petites valeurs de  $t_\perp/t$ , alors que près du remplissage 0 ou 1,  $K_s$  décroît beaucoup plus lentement vers  $1/2$  (voir la figure IV.10). Aussi, lorsque  $t_\perp/t$  augmente,  $\xi_a/d$  devient très petit pour tous les remplissages, signalant que le modèle effectif unidimensionnel obtenu ci-dessus dans l'autre limite ( $t_\perp/t \gg 1$ ) devient une bonne description du système. Dans ce cas l'asymétrie tend à disparaître, comme nous l'avons déjà remarqué.

#### IV.4.4 Vitesse du son

Nous terminons cette discussion par l'analyse de la vitesse du son  $v$  discutée ci-dessus. Cette vitesse peut être interprétée comme la vitesse critique superfluide  $v_c$  associée à la branche linéaire du spectre d'excitations. En utilisant les mêmes relations hydrodynamiques que précédemment, on trouve pour la vitesse

$$v_c = \sqrt{\frac{\Upsilon_{\text{sf}}}{\kappa}}. \quad (\text{IV.51})$$

Les résultats de Monte-Carlo quantique sont représentés dans la figure IV.13 pour  $v_c$  en fonction de la densité  $\rho$  dans différents cas limites  $t_\perp = 0.4t, t, 2t, 10t$ . Pour un très petit couplage entre chaînes, on s'attend à ce que le résultat standard pour les chaînes découplées soit valable, soit

$$v_c = 2t \sin(\pi\rho) \quad \text{si } t_\perp \ll t, \quad (\text{IV.52})$$

alors que dans la limite des barreaux forts, le modèle effectif 1D de l'équation (IV.12) avec le terme de saut corrélé conduit à une vitesse des excitations différente, telle que

$$v_c = 2t |\sin(2\pi\rho)| \left[ 1 - \frac{4t}{t_\perp} (1 - \rho) \cos(2\pi\rho) \right] \quad \text{si } t_\perp \gg t. \quad (\text{IV.53})$$

La dernière expression a été obtenue en suivant le calcul menant à l'expression perturbative pour  $K_s$ , équation (IV.47). Nous avons calculé la compressibilité et la réponse à un changement des conditions aux limites périodiques du modèle effectif et utilisé la relation hydrodynamique (IV.51). L'accord entre ces deux cas limite et les estimations du calcul Monte-Carlo quantique pour  $v_c$  est plutôt bon, surtout pour les deux limites  $t_\perp = 0.4t$  and  $t_\perp = 10t$ . Entre les deux, pour  $t_\perp = 2t$ , la forme de  $v_c(\rho)$  est clairement non-universelle, et asymétrique.

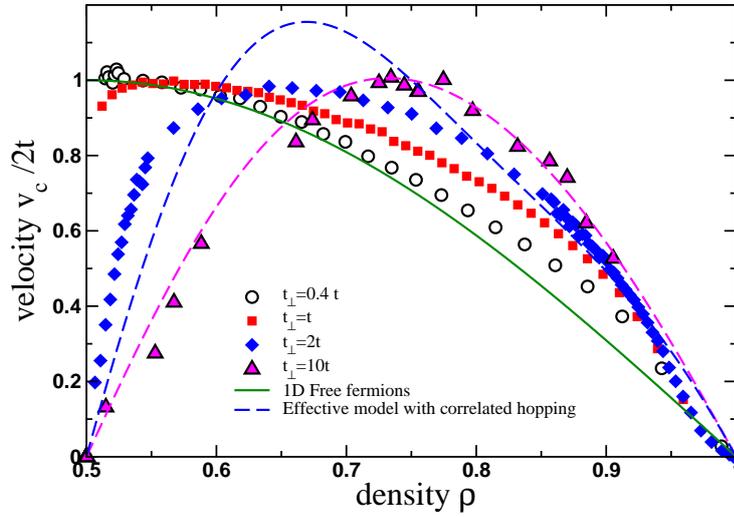


FIGURE IV.13: Vitesse  $v_c/2t$ , extraite des simulations QMC utilisant l'équation (IV.51), tracée en fonction de la densité  $\rho$  pour différentes valeurs du couplage entre chaînes  $t_\perp$ , et comparée aux deux cas limites (voir texte) : (IV.52) dans la limite de couplage faible (ligne verte), et (IV.53) dans la limite de couplage fort (ligne rose pointillée).

## IV.5 Discussions

### IV.5.1 Diagramme des phases

Avant de discuter deux implications importantes de nos résultats, à savoir les effets d'un désordre faible sur la transition superfluide et les conséquences pour les expériences, nous présentons le diagramme de phase général pour le modèle de bosons de cœur dur sur une échelle à deux montants, eq. (IV.1). La figure IV.14 représente une carte de niveaux du paramètre de Luttinger  $K_s$  du mode symétrique sans gap, dans le plan [densité  $\rho$ ] — [ $t_\perp/(t + t_\perp)$ ]. Excepté le long de la ligne  $\rho = 1/2$ , lieu de l'isolant de Mott sur barreau, le système est dans une phase superfluide avec  $K_s$  variant dans l'intervalle  $[1/2, 1]$ . Cette carte est le fruit des calculs DMRG de Guillaume Roux [63]. Tous les cas limites discutés ci-dessus, sont visibles ici :  $K_s = 1/2$  le long de  $\rho = 0, 1/2$  et pour tous les remplissages lorsque  $t_\perp/t \rightarrow \infty$ ; et  $K_s = 1$  dans la limite  $t_\perp/t \rightarrow 0$ .

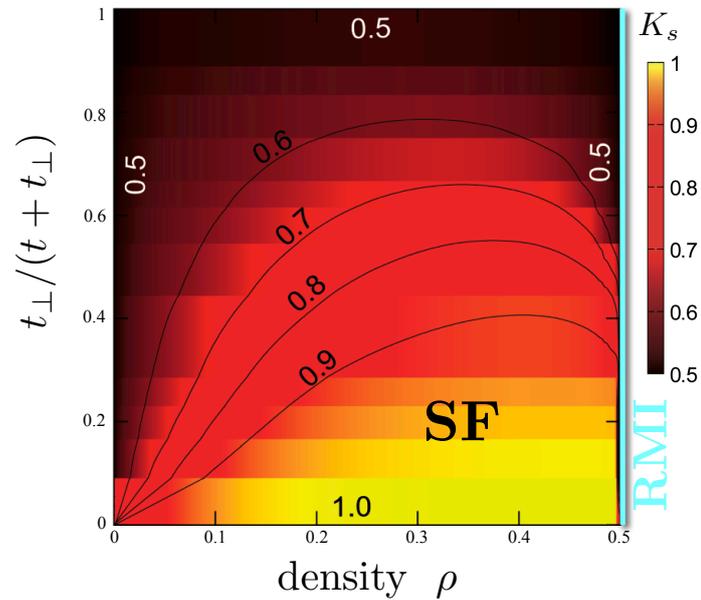


FIGURE IV.14: Diagramme des phases pour des bosons de cœur dur sur l'échelle du modèle de l'équation (IV.1) dans le plan densité  $\rho$  - amplitude de saut transverse  $t_{\perp}/(t + t_{\perp})$ . La carte des valeurs du paramètre de Luttinger du mode symétrique  $K_s$  est obtenue à partir des simulations DMRG. Pour  $\rho = 1/2$  le système est dans une phase Rung Mott Insulator (ligne cyan) gappée. Pour toutes les autres densités incommensurables, le système est superfluide et  $K_s \in [1/2, 1]$ .

## IV.5.2 Effets du désordre

### IV.5.2.1 Désordre faible

Dans cette section nous discutons brièvement l'accrochage par un potentiel aléatoire par un gaz de boson sur une échelle à deux montants. En suivant la référence [60], nous considérons un potentiel chimique aléatoire le long des deux chaînes. Dans le continu

$$\mathcal{H}_{\text{dis}} = \int dx [V_1(x)\rho_1(x) + V_2(x)\rho_2(x)]. \quad (\text{IV.54})$$

On choisit des distributions Gaussiennes pour  $V_1$ ,  $V_2$  et supposons que ces potentiels ne sont pas corrélés, c'est-à-dire,  $\overline{V_1(x)V_1(x')} = \overline{V_2(x)V_2(x')} = D\delta(x-x')$  et  $\overline{V_1(x)V_2(x')} = 0$ . Le RG mène à deux résultats très différents si  $t_\perp$  est très fort ou très faible. Dans le cas de chaînes découplées ( $t_\perp = 0$ ), le gaz de Bose est accroché sur chaque chaîne par la composante de Fourier à  $2\pi\rho$  du potentiel aléatoire, tant que  $K < 3/2$ , et pour un désordre très faible on peut estimer la longueur de localisation comme étant

$$\xi_{\text{loc}}^{1\text{D}} = a \left( \frac{\pi v^2}{2Da} \right)^{\frac{1}{3-2K}}. \quad (\text{IV.55})$$

La phase localisée est le *verre de Bose* [159, 57, 52] que nous avons déjà évoqué au chapitre précédent. Le long de la ligne  $t_\perp/t = 0$ , les chaînes sont découplées et la phase BG (Bose Glass) consiste en deux BG unidimensionnels, strictement indépendants, dans lesquels la densité est accrochée à  $2\pi\rho$ , de telle sorte que nous surnomons cette phase  $BG_{2\pi\rho}$ . La longueur de localisation diverge à  $K = 3/2$ , l'accrochage étant déstabilisé par les fluctuations quantiques.

Au contraire, pour les très grands  $t_\perp$ , les sauts transverses induisent de la cohérence de phase à longue portée (dans le mode antisymétrique), et la phase superfluide est stable vis-à-vis du désordre faible pourvu que  $K_s > 3/4$ . En effet, d'après la référence [61], comme la phase quantique du champ antisymétrique  $\theta_a$  s'ordonne, le champ conjugué  $\phi_a$  devient complètement désordonné et le couplage de la densité à la composante de Fourier  $2\pi\rho$  du potentiel aléatoire s'annule effectivement. Cependant le mode à  $4\pi\rho$  du potentiel aléatoire peut toujours se coupler à la densité à travers un terme d'ordre 4, proportionnel à  $D^2$ . Sur la carte de  $K_s$  (voir la figure IV.14), il apparaît que pour des  $t_\perp/t$  modérés (grossoirement, plus petits que 1.5) il existe une région de densité pour laquelle  $K_s$  est en effet sous la valeur critique 3/4, rendant le système insensible à un faible potentiel chimique aléatoire. Dans la figure IV.15, nous montrons la frontière  $K_s = 3/4$  séparant les régions où le faible désordre  $D = 0^+$  est pertinent (pour  $K_s < 3/4$  :  $BG_{4\pi\rho}$ ) ou non (pour  $K_s > 3/4$  : SF). Dans cette limite, la longueur de cohérence transverse  $\xi_a$  introduite dans la section IV.4.2 est très petite, et on s'attend à ce que la composante de Fourier à  $4\pi\rho$  du potentiel aléatoire accroche le gaz de Bose, d'où la dénomination  $BG_{4\pi\rho}$ .

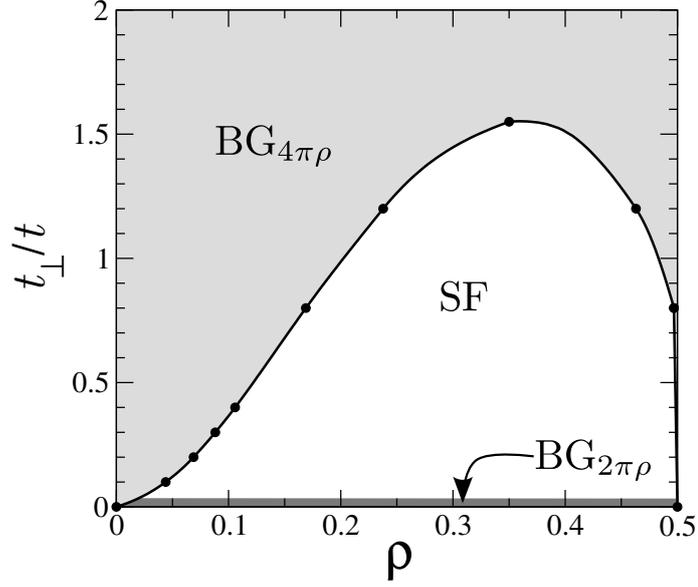


FIGURE IV.15: Frontière  $K_s = 3/4$  (déduite des données DMRG) séparant les régions où le désordre faible est pertinent (pour  $K_s < 3/4$  :  $BG_{4\pi\rho}$ ) ou non (pour  $K_s > 3/4$  : SF). Le long de la ligne  $t_{\perp}/t = 0$ , les chaînes sont découplées et on attend deux BG à  $2\pi\rho$  découplés.

#### IV.5.2.2 Désordre fini et transition SF-BG

On peut utiliser le critère  $K_s > 3/4$  pour étudier la stabilité de la phase SF vis-à-vis du désordre faible pour représenter trois cas représentatifs pour des valeurs de  $t_{\perp}/t$  faible, intermédiaire et forte. Par exemple, pour des  $t_{\perp}/t$  forts,  $K_s$  reste sous la valeur critique de  $3/4$  quelque soit le remplissage et on s'attend à ce que la phase superfluide soit instable quelque soit l'intensité du désordre. Ce cas de figure est représenté sur le panneau de droite de la figure IV.16, pour  $t_{\perp}/t = 3$ . Plus précisément, nous nous attendons, d'après les résultats DMRG pour  $K_s$  à ce que le désordre faible localise immédiatement le gaz de bosons de cœur dur, quelque soit  $t_{\perp}/t \approx 1.5$  (soit  $K_s < 3/4$ ). Ce résultat doit être contrasté avec les résultats numériques récents sur les échelles de bosons désordonnés [160]. Nous pensons que de forts effets de taille finie (en particulier pour des densités faibles) peuvent être un obstacle à une interprétation propre des résultats numériques. Pour une amplitude de saut transverse intermédiaire,  $t_{\perp} = 1.2t$ , nous nous attendons à une dôme superfluide stable pour un intervalle de remplissages. Pour le troisième cas, une petite amplitude  $t_{\perp}/t$ , la phase superfluide doit être plus étendue en terme de remplissage mais avec un désordre critique maximum réduit. L'asymétrie de  $K_s$  en fonction de  $\rho$  se traduit par une asymétrie similaire pour le maximum du dôme  $D_c$ . Pour des petites densités, puisque  $K_s \rightarrow 1/2$ , nous nous attendons à ce que la phase BG s'étende, pour le

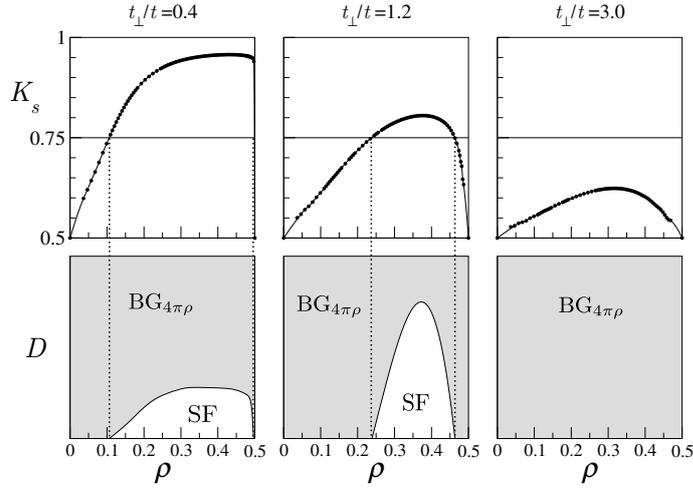


FIGURE IV.16: *Trois situations typiques pour deux chaînes couplées de bosons de cœur dur (amplitudes de saut transverse faible, intermédiaire et forte). Sur la ligne du haut, le paramètre de Luttinger  $K_s$  est tracé, à partir des résultats DMRG, en fonction de la densité  $\rho$ . La ligne critique à  $K_s^* = 3/4$  est aussi représentée. Ligne du bas : diagramme des phases schématisés dans le plan densité  $\rho$  - désordre  $D$ . Deux phases apparaissent, une phase superfluide ( $SF$ ) et une phase  $BG$  à  $4\pi\rho$ .*

désordre faible, jusqu'à une concentration critique  $\rho_c$ . Près de la phase gapée, bien que  $K_s$  tende vers  $1/2$  beaucoup plus rapidement, nous nous attendons néanmoins à une fenêtre de taille mais beaucoup plus petite où une phase  $BG$  s'intercale entre la phase  $SF$  et la phase  $MI$  [52, ?].

Contrairement au cas fermionique, où le désordre faible localiserait immédiatement les particules, les bosons de cœur dur sur une échelle à deux montants constitue un modèle très simple où une transition de phase entre une phase superfluide et des phases verre de Bose est attendue pour des remplissages incommensurables. Ce modèle est par conséquent assez intéressant dans l'optique de simulations numériques de grande échelle afin de tester précisément la classe d'universalité de la transition  $SF$ - $BG$ . Notamment, la question du caractère universel du paramètre de Luttinger à la transition pour un désordre fini, semble être importante [57, 161], et pour être testé pour ce système bien contrôlé numériquement. De plus, il présente une analogie assez forte avec le modèle du gaz de bosons  $1D$  désordonnés, avec  $t_{\perp}$  jouant le rôle de l'interaction  $U_b$  entre bosons.

### IV.5.3 Conséquences expérimentales

Une contrainte nécessaire pour sonder ce diagramme des phases expérimentalement avec des atomes froids est tout d'abord d'obtenir des structures en échelles à partir

d'un réseau optique. Cet objectif peut être atteint en réalisant un réseau de double-puits, obtenu en superposant deux réseaux planaires de périodicité  $\lambda$  et  $\lambda/2$ . Un tel réseau de double-puits a été proposé dans la référence [162] et récemment dans les références [163, 62]. Un résultat notable de notre étude est le diagramme des phases dépeint dans la figure IV.2, où nous prédisons l'existence d'un isolant de Mott sur barreaux, au demi-remplissage, et ce quelque soit l'amplitude de saut transverse.

Cependant, nous avons montré que le gap de charge se comporte comme  $\Delta_s \sim \exp(-at/t_\perp)$ , ce qui est exponentiellement petit avec l'amplitude de saut transverse. Ainsi, afin que cette phase soit observée, la condition  $\Delta_L \ll \Delta_s$  doit être satisfaite, avec  $\Delta_L \sim \hbar v/L$  et  $L$  la taille longitudinale du piège en cigare et  $v$  la vitesse du son le long d'une chaîne. Puisque cette taille est finie cela implique une contrainte sur la valeur minimale du paramètre  $t_\perp$ , afin d'observer l'isolant de Mott sur barreaux. Pratiquement, une valeur assez large,  $t_\perp/t \sim 1$  est nécessaire pour observer expérimentalement cette phase dans une expérience d'atomes froids. Une telle phase est caractérisée par la présence d'un atome par barreau et devrait être détectable en utilisant les techniques d'imagerie par fluorescence, avec résolution atomique, récemment utilisées pour détecter un isolant de Mott 2D [164, 129].

Techniquement, il semble possible d'atteindre le régime de Tonks-Girardeau [5] pour deux gaz de Bose 1D couplés, comme par exemple dans [62]. Le système (de taille totale  $L$ ) étant piégé dans un piège harmonique, le potentiel chimique varie de site en site,  $\mu_j = V(j - L/2)^2$ . Ainsi, en prenant comme référence de potentiel chimique le centre du piège  $j = L/2$ , l'état de Mott ayant un gap en énergie  $\Delta_s$  doit s'étendre sur une longueur typique

$$\ell_{\text{Mott}} \approx \sqrt{\frac{\Delta_s}{V}}. \quad (\text{IV.56})$$

Par exemple, pour un potentiel de confinement de l'ordre de 100 Hz [7], un réseau optique longitudinal de longueur d'onde 826 nm, de hauteur  $V_0 = 2E_R$ , et un confinement transverse  $V_\perp = 40E_R$  [7], on trouve pour le Rubidium 87 une amplitude de saut  $t \sim \frac{4}{\sqrt{\pi}} E_R \left(\frac{V_0}{E_R}\right)^{1/4} \left(\frac{V_\perp}{E_R}\right)^{1/2} e^{-2\sqrt{V_0/E_R}} \simeq 22\text{kHz}$  (qui est de l'ordre de l'énergie de recul dans ce cas), Soit  $V/t \simeq 0.005$  et, pour  $t_\perp = 2.5t$ ,  $\ell_{\text{Mott}} = 23$  sites. Ainsi l'état de Mott serait détectable près du centre du piège sur une vingtaine de sites. Cependant, pour des valeurs plus petites  $t_\perp/t$ , l'état incompressible sera pratiquement indétectable car  $\ell_{\text{Mott}}$  décroît assez vite ( $\Delta_s \sim e^{-a/t_\perp}$ ).

## IV.6 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté une étude exhaustive du comportement de bosons de cœur dur sur une échelle. Un tel réseau en échelle présente la géométrie minimale permettant l'échange de particules, contrairement aux chaînes strictement

1D limitées à des sauts aux plus proches voisins et les effets de la statistique deviennent important. L'interprétation des nouvelles données numériques, publiées dans [63], par différentes approches analytiques, permet d'obtenir explicitement le diagramme des phases de bosons de cœur dur sur une échelle, en fonction du remplissage  $\rho$  et de l'amplitude de saut transverse  $t_{\perp}/t$ , et d'exhiber les nombreuses différences avec le cas des fermions libres (voir la figure IV.2).

La différence la plus flagrante apparaît à demi-remplissage et petite amplitude de saut transverse où les bosons de cœur dur sont dans une phase isolant de Mott sur barreau alors que les fermions restent dans une phase métallique. En dehors du demi-remplissage, les bosons de cœur dur sont dans une phase superfluide caractérisée par un paramètre de Luttinger  $K_s$  variant considérablement avec la densité entre 1/2 et 1. Ce résultat est résumé dans la figure IV.14, où  $K_s$  est tracé en fonction de la densité et de l'amplitude de saut transverse. Le paramètre de Luttinger gouverne les fonctions de corrélation et détermine également si le système est sensible à un désordre faible ou non. La détermination quantitative de  $K_s$  permet alors de tracer qualitativement le diagramme des phases pour les bosons de cœur dur sur une échelle soumise à un désordre faible (voir les figures IV.15 et IV.16). Contrairement au cas des fermions libres qui seraient immédiatement localisés par le désordre faible, ce modèle de bosons de cœur dur fournit un exemple simple de transition entre une phase superfluide et une phase localisée pour les densités incommensurables.



# Conclusion

Dans cette thèse nous avons étudiés quelques propriétés de gaz quantiques en basse dimensionnalité. Motivés par l'essor des expériences d'atomes froids et la capacité des expérimentateurs à simuler et caractériser des systèmes fortement corrélés, nous nous sommes penchés sur deux problèmes : un mélange Bose-Fermi 1D en présence de désordre, et une échelle de bosons de cœur dur. Ces deux systèmes étant tous deux des systèmes (quasi)-1D à deux composantes, ils partagent plusieurs points communs, transparaissant à quelques endroits de la thèse.

Le mélange Bose-Fermi, en l'absence de potentiel extérieur, est bien décrit (si les interactions Bose-Fermi ne sont pas trop fortes) par un liquide de Luttinger à deux composantes. Les deux modes propres (+ et -) mélangent, dans le cas général, les excitations bosoniques et fermioniques. Dans la limite de cœur dur, et si  $v_f$  et  $v_b$  sont égales (ce qui est a priori possible en ajustant les densités) on retrouve la séparation spin-charge, bien connue des systèmes électroniques unidimensionnels. Nous avons considéré uniquement le cas de densités incommensurables. Le potentiel aléatoire se couple alors aux fermions et aux bosons séparément en essayant d'accrocher chacune des ondes de densité. L'essentiel de la physique mise en jeu est bien résumé par l'approche du groupe de renormalisation en deux étapes que nous avons présentée. Deux échelles de longueurs détermine la physique : les longueurs de localisation des deux espèces,  $L_f$  et  $L_b$ . Dans le cas où  $L_f > L_b$ , par exemple, on a identifié la hiérarchie de comportements suivante, en fonction des distances sur lesquelles on sonde le système (en mesurant la distribution d'impulsion où la réponse dynamique). Pour des distances plus petite que  $L_f$ , le système se comporte comme un liquide de Luttinger à deux composantes, non localisé. Sur des distances comprises entre  $L_f$  et  $L_b$ , le système apparaît comme un liquide de Luttinger à une composante (ici les bosons) couplés à des fermions localisés. Enfin sur des distances plus grandes que  $L_b$  le système apparaît comme complètement localisé, toutes les fonctions de corrélations décroissant exponentiellement. Dans la phase totalement localisée, les interactions provoque une forte augmentation de la longueur de localisation de l'espèce lente.

Dans le cas de l'échelle, un couplage transverse  $t_\perp$  arbitrairement faible perturbe le Luttinger à deux composantes (composé d'un mode symétrique et d'un mode antisymétrique), en ouvrant un gap dans le mode antisymétrique. Les phases quantiques des deux chaînes s'alignent et la cohérence de phase à longue portée

est établie. Le cas du demi-remplissage présente une forte analogie avec la situation du mélange désordonné. Une fois le mode antisymétrique gappé, le modèle effectif est celui d'une onde de densité (ici l'onde de densité du mode symétrique) accrochée par le potentiel périodique, commensurable. Cette perturbation n'est relevante qu'à des énergies très basses (selon le raisonnement du RG en deux étapes). Le champ symétrique est bien gappé mais le gap croît exponentiellement lentement avec  $t_{\perp}$ . La longueur de corrélation associée est de ce fait très grande, de manière similaire à la longueur de localisation des bosons dans le mélange.

Les deux systèmes offrent des perspectives intéressantes. Dans les deux cas, des simulations numériques pourraient apporter un éclairage fort, notamment dans les zones hors de portée des méthodes analytiques présentées dans cette thèse. Dans le cas du mélange, nous n'avons pas évoqué le cas du désordre fort. On pourrait imaginer que pour des fermions localisés sur des distances très courtes le couplage avec les phonons du gaz de bosons puisse donner lieu à des phénomènes de types *variable range hopping*. Au contraire, de très fortes interactions Bose-Fermi, pourraient forcer la localisation de paires (particule-particule) ou (particule-trou). Notons que dernier cas de figure peut déjà intervenir, au niveau de la théorie hydrodynamique, pour des densités égales. Les termes d'appariement entrent en compétition avec les termes de désordre et des phases de Mott pourraient très bien se former au sein de phases désordonnées. Pour les échelles de cœur dur, les résultats numériques sur le paramètre de Luttinger  $K_s$  laissent entrevoir une transition à désordre fini entre une phase superfluide et une phase localisée, pour des densités incommensurables. Nous avons aussi évoqué le fait que  $t_{\perp}$  joue ici le rôle que tiennent les interactions dans le cas de la chaîne de bosons désordonné, permettant une comparaison qualitative de la physique des deux systèmes. Des simulations numériques directes apporteront sûrement un éclairage supplémentaire sur la physique des échelles désordonnées. Elles pourraient confirmer l'approche hydrodynamique déployée dans la littérature et appliquée dans cette thèse en complément des données numériques.

# Annexe A

## Méthodes variationnelles

Dans cet appendice, nous détaillons les calculs variationnels menés au chapitre III. Nous abordons la méthode variationnelle pour le modèle de Sine-Gordon (approximation harmonique auto-cohérente), puis pour le problème désordonné où nous dérivons les équations auto-cohérentes dans l'espace des répliques. Nous détaillons ensuite la nature des solutions, avec ou sans brisure de la symétrie des répliques.

### A.1 Méthode variationnelle gaussienne pour le modèle de sine-Gordon

Dans cette section, on considère le modèle de sine-Gordon (quantique) défini par la densité Hamiltonienne

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\Pi(x)^2 + [\nabla\phi(x)]^2) - g \cos[2\eta\sqrt{\pi K}\phi(x)]. \quad (\text{A.1})$$

Par rapport aux notations standards de la théorie du liquide de Luttinger [34, 36] introduites à la section II.2 du chapitre II, on a procédé à la redéfinition suivante des champs,  $\phi \rightarrow \phi/\sqrt{\pi K}$  et  $\Pi \rightarrow \sqrt{\pi K}\Pi$ , et posé  $v = 1$ . On rappelle que  $\phi$  et  $\Pi$  sont deux champs bosoniques satisfaisant  $[\Pi(x), \phi(x')] = i\delta(x - x')$ . L'approche du RG pour le modèle de sine-Gordon évoquée en III.2.1 consiste à intégrer les modes de grands vecteurs d'onde,  $\phi^>(x)$ , au niveau de la fonction de partition (voir à ce sujet le calcul détaillé en III.3.3.1), en traitant le terme  $g \cos[2\eta\sqrt{\pi K}\phi(x)]$  en perturbation. L'hypothèse est de considérer la partie quadratique de  $\mathcal{H}$  comme la *théorie libre* du problème et le cosinus comme les interactions.<sup>1</sup>

Néanmoins, cette séparation entre théorie libre et interactions n'est pas forcément la plus profitable [32]. Lorsque que le cosinus est relevant au sens du RG (pour  $K < 2/\eta^2$ ),  $\phi(x)$  est une fonction constante dans l'état fondamental (ici  $\phi(x) = 0, \pm\pi/\eta, \pm 2\pi/\eta, \dots$ ) et les excitations deviennent massives.<sup>2</sup> [165, 166, 32] Un point

---

1. Dans le calcul du RG, l'ordre normal, nécessaire pour soustraire les divergences de la théorie, est pris par rapport à cette théorie libre sans masse.

2. Ce sont les solitons, ou anti-solitons, faisant passer  $\phi$  d'un minimum de potentiel à un autre. Pour  $1/\eta^2 > K > 1/(2\eta^2)$  les solitons et anti-solitons sont répulsifs. Ils deviennent attractifs pour  $K < 1/(2\eta^2)$  et peuvent former des états liés, appelés *breathers*. L'état lié ayant la plus petite masse, correspond aux oscillations autour d'un minimum de  $\phi$ .

de départ alternatif pour traiter les interactions peut alors être une théorie libre *massive*. Pour cela, on récrit la densité Hamiltonienne  $\mathcal{H}$  dans l'ordre normal après avoir décomposé  $\phi(x)$  et  $\Pi(x)$  en modes propres selon

$$\phi(x) = \int \frac{dq}{2\pi} \left[ \frac{1}{2\omega(q)} \right]^{1/2} [b_q e^{-iqx} + b_q^\dagger e^{iqx}] \quad (\text{A.2})$$

$$\Pi(x) = i \int \frac{dq}{2\pi} \left[ \frac{\omega(q)}{2} \right]^{1/2} [b_q e^{-iqx} - b_q^\dagger e^{iqx}] \quad (\text{A.3})$$

avec  $\omega(q) = \sqrt{q^2 + m^2}$  où  $m$  est la masse des excitations, inconnue à ce stade, et  $[b_q, b_{q'}^\dagger] = \delta_{qq'}$ . L'opération d'ordre normal consiste ici à faire en sorte que les opérateurs  $b_q^\dagger$  soient toujours à la gauche des opérateurs  $b_q$ . La densité Hamiltonienne devient, à une constante additive près,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (: \Pi(x)^2 : + : [\nabla\phi(x)]^2 :) - g \left( \frac{m^2}{\Lambda^2} \right)^{K/2} : \cos[2\eta\sqrt{\pi K}\phi(x)] :, \quad (\text{A.4})$$

où on a introduit le cut-off  $\Lambda$  pour régulariser la théorie à courte distance, et  $: \dots :$  désigne l'ordre normal. Sous cette forme, on peut développer l'opérateur cosinus en série et calculer le propagateur  $\langle \mathcal{T}\phi(x, \tau)\phi(0, 0) \rangle^3$  en perturbation. L'approximation harmonique auto-cohérente consiste à négliger tous les termes de cette série sauf le terme quadratique, ce qui mène à l'équation auto-cohérente suivante :

$$m^2 = g \left( \frac{m^2}{\Lambda^2} \right)^{K/2}. \quad (\text{A.5})$$

n'admettant de solution non-nulle que pour  $K < 2$ .

On retrouve ce résultat par un raisonnement variationnel, selon la méthode introduite par Feynman [167]. Le paramètre variationnel est le propagateur  $G(x, \tau) = \langle \mathcal{T}\phi(x, \tau)\phi(0, 0) \rangle$ , que l'on cherche sous la forme de celui d'un boson libre massif. Pour cela, on introduit l'action quadratique  $S_G$  suivante, écrite dans l'espace de Fourier

$$S_G = \frac{1}{2} \frac{1}{\beta L} \sum_{q, i\omega_n} \phi(q, i\omega_n) G^{-1}(q, i\omega_n) \phi(-q, -i\omega_n). \quad (\text{A.6})$$

L'énergie libre est donnée par  $F = -1/\beta \log Z$ , avec  $Z = \text{Tr}_{[\phi]} e^{-S}$ , où  $S$  est l'action correspondant au modèle de sine-Gordon. En utilisant le fait que  $e^{-S} = e^{-S_G} \times e^{S_G - S}$ , alors

$$F = -\frac{1}{\beta} \log \text{Tr}_{[\phi]} e^{-S_G} - \frac{1}{\beta} \log \langle e^{S_G - S} \rangle_G, \quad (\text{A.7})$$

---

3. C'est une fonction de Green de Matsubara,  $\tau$  est le temps imaginaire et  $\mathcal{T}$  désigne l'opérateur ordonnant les fonctions dans le temps.

avec

$$\langle A \rangle_G = \frac{\text{Tr}_{[\phi]} A e^{-S_G}}{\text{Tr}_{[\phi]} e^{-S_G}}. \quad (\text{A.8})$$

La convexité de la fonction exponentielle implique également que

$$\langle e^{S_G - S} \rangle_G > e^{-\langle S_G - S \rangle_G}, \quad (\text{A.9})$$

soit

$$F \leq -\frac{1}{\beta} \log \text{Tr}_{[\phi]} e^{-S_G} + \frac{1}{\beta} \langle S_G - S \rangle_G. \quad (\text{A.10})$$

On cherche alors la fonction  $G$  minimisant l'énergie libre variationnelle,

$$F_{\text{var}} = F_G + \frac{1}{\beta} \langle S_G - S \rangle_G \quad (\text{A.11})$$

où  $F_G$  désigne le premier terme dans le membre de droite de l'équation (A.10). On trouve une équation auto-cohérente sur  $G$ ,

$$G^{-1}(q, i\omega_n) = \omega_n^2 + q^2 + 16g \exp \left[ \frac{\pi}{2} \eta^2 K \sum_{q, \omega_n} G(q, \omega_n) \right], \quad (\text{A.12})$$

en fait identique à l'équation (A.5).

## A.2 Méthode variationnelle gaussienne dans l'espace des répliques

Dans le chapitre III on applique la méthode variationnelle gaussienne à l'action  $S_{\text{rep}}$ , définie aux équations III.57 et III.58. On cherche à approximer l'action répliquée  $S_{\text{rep}}$  par une action quadratique  $S_G$  telle que

$$S_G = \frac{1}{2} \frac{1}{\beta L} \sum_{q, i\omega_n} \phi_\alpha^a(q, i\omega_n) (G^{-1})_{\alpha\beta}^{ab}(q, i\omega_n) \phi_\beta^b(-q, -i\omega_n), \quad (\text{A.13})$$

Ici, le propagateur  $G$  est une matrice  $2n \times 2n$  (2 composantes pour le mélange,  $n$  répliques), présentant la structure suivante

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} [G^{-1}]_{ff}^{ab} & [G^{-1}]_{fb}^{ab} \\ [G^{-1}]_{bf}^{ab} & [G^{-1}]_{bb}^{ab} \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

où  $[G^{-1}]_{\alpha\beta}$ ,  $\alpha, \beta = f, b$ , est donc une matrice  $n \times n$ . Comme dans le cas du modèle de sine-Gordon, on minimise l'action variationnelle

$$F_{\text{var}} = F_G + \frac{1}{\beta} \langle S_G - S \rangle_G \quad (\text{A.15})$$

par rapport à la fonction de Green  $G$ . On calcule d'abord chaque contribution dans  $F_{\text{var}}$  :

$$F_G = -\frac{1}{2\beta} \sum_{q, i\omega_n} \text{Tr} \log[G(q, i\omega_n)] \quad (\text{A.16})$$

$$\langle S_0 \rangle_G = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \sum_{q, i\omega_n} (G_0^{-1})_{\alpha\beta}(q, i\omega_n) \text{Tr}[G_{\alpha\beta}(q, i\omega_n)], \quad (\text{A.17})$$

$$\langle S_{\text{dis}} \rangle_G = -\sum_{a,b} \beta L \int d\tau \left[ \frac{\rho_f^2 D_f}{\hbar} e^{-2F^{ab}(\tau)} + \frac{\rho_b^2 D_b}{\hbar} e^{-2B^{ab}(\tau)} \right], \quad (\text{A.18})$$

avec

$$F^{ab}(\tau) = G_{ff}^{aa}(0, 0) + G_{ff}^{bb}(0, 0) - 2G_{ff}^{ab}(0, \tau), \quad (\text{A.19})$$

$$B^{ab}(\tau) = G_{bb}^{aa}(0, 0) + G_{bb}^{bb}(0, 0) - 2G_{bb}^{ab}(0, \tau). \quad (\text{A.20})$$

On rappelle également que le propagateur libre est de la forme

$$G_0^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{v_f}{\pi K_f} \left[ \frac{\omega_n^2}{v_f^2} + q^2 \right] 1_n & \frac{U_{bf}}{\pi^2} q^2 1_n \\ \frac{U_{bf}}{\pi^2} q^2 1_n & \frac{v_b}{\pi K_b} \left[ \frac{\omega_n^2}{v_b^2} + q^2 \right] 1_n \end{pmatrix} \quad (\text{A.21})$$

Finalement,

$$\begin{aligned} F_{\text{var}} &= -\frac{1}{2\beta} \sum_{q, i\omega_n} \text{Tr} \log[G(q, i\omega_n)] + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \sum_{q, i\omega_n} (G_0^{-1})_{\alpha\beta}(q, i\omega_n) \text{Tr}[G_{\alpha\beta}(q, i\omega_n)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{a,b} L \int d\tau (V_F[F^{ab}(\tau)] + V_B[B^{ab}(\tau)]). \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

On a introduit deux fonctions,  $V_F$  and  $V_B$ , telles que  $V_F(x) = -2\frac{\rho_f^2 D_f}{\hbar} e^{-2x}$  et  $V_B(x) = -2\frac{\rho_b^2 D_b}{\hbar} e^{-2x}$ . Dans le cas d'un désordre statique, les quantités hors-diagonales (par exemple,  $F^{ab}$  ou  $B^{ab}$  avec  $a \neq b$ ) ne dépendent pas du temps [58], ceci parce que dans chaque réalisation du désordre, le potentiel aléatoire ne dépend pas de  $\tau$ . Avant

de moyenner sur le désordre, les différentes répliques ne sont pas couplées dans le Hamiltonien, et les fonctions de Green correspondantes ne dépendent pas du temps. La moyenne sur les réalisations du désordre ne doit pas modifier cette observation. L'équation  $\delta F_{var} = 0$  (en différenciant  $F_{var}$  par rapport à  $G$ ) conduit aux équation auto-cohérentes suivantes

$$\left. \begin{aligned} (G^{-1})_{ff}^{ab}(q, i\omega_n) &= -2\beta\delta_{n,0}V'_F(F^{ab}) \\ (G^{-1})_{bb}^{ab}(q, i\omega_n) &= -2\beta\delta_{n,0}V'_B(B^{ab}) \end{aligned} \right\} a \neq b, \quad (\text{A.23})$$

avec

$$\left. \begin{aligned} F^{ab} &= \frac{1}{\beta L} \sum_{q, i\omega_n} [G_{ff}^{aa}(q, i\omega_n) + G_{ff}^{bb}(q, i\omega_n)] - \frac{2}{\beta L} \sum_q G_{ff}^{ab}(q, \omega_n = 0) \\ B^{ab} &= \frac{1}{\beta L} \sum_{q, i\omega_n} [G_{bb}^{aa}(q, i\omega_n) + G_{bb}^{bb}(q, i\omega_n)] - \frac{2}{\beta L} \sum_q G_{bb}^{ab}(q, \omega_n = 0) \end{aligned} \right\} a \neq b, \quad (\text{A.24})$$

et

$$\begin{aligned} (G^{-1})_{ff}^{aa}(q, i\omega_n) &= (G_0^{-1})_{ff}(q, i\omega_n) + 2 \int_0^\beta d\tau (1 - \cos[\omega_n\tau]) V'_F(F^{aa}(\tau)) \\ &+ 2 \int_0^\beta d\tau \sum_{b \neq a} V'_F[F^{ab}], \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned} (G^{-1})_{bb}^{aa}(q, i\omega_n) &= (G_0^{-1})_{bb}(q, i\omega_n) + 2 \int_0^\beta d\tau (1 - \cos[\omega_n\tau]) V'_B(B^{aa}(\tau)) \\ &+ 2 \int_0^\beta d\tau \sum_{b \neq a} V'_B[B^{ab}], \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

avec

$$F^{aa} = \frac{2}{\beta L} \sum_{q, i\omega_n} G_{ff}^{aa}(q, i\omega_n) (1 - \cos[\omega_n\tau]) \quad (\text{A.27})$$

$$B^{aa} = \frac{2}{\beta L} \sum_{q, i\omega_n} G_{bb}^{aa}(q, i\omega_n) (1 - \cos[\omega_n\tau]). \quad (\text{A.28})$$

Les éléments de matrices mélangeant les différentes espèces ne sont pas affectés :

$$(G^{-1})_{fb}^{ab}(q, i\omega_n) = (G^{-1})_{bf}^{ab}(q, i\omega_n) = (G_0^{-1})_{bf}(q, i\omega_n)\delta_{a,b} \quad (\text{A.29})$$

Une fois résolues les équations auto-cohérente, il faut encore prendre la limite  $n \rightarrow 0$  pour calculer l'énergie libre moyenne, ainsi que les diverses fonctions de corrélation d'intérêt. Pour cela on introduit la notation de Parisi pour les matrices  $0 \times 0$ . Soit  $A$  une matrice dans l'espace des répliques. À l'origine c'est une matrice  $n \times n$ , avec des

éléments de matrice  $A_{ab}$ . À la limite  $n \rightarrow 0$ , la matrice  $A$  est décrite par un couple  $(\tilde{a}, a(u))$ , où  $\tilde{a}$  correspond aux anciens éléments diagonaux et  $a(u)$  est une fonction de  $u \in [0, 1]$  paramétrisant les éléments hors-diagonaux. La self-énergie est une matrice s'écrivant alors

$$\sigma(q, \omega_n = 0) = \begin{pmatrix} [\tilde{\sigma}_f, \sigma_f(u)] & 0 \\ 0 & [\tilde{\sigma}_b, \sigma_b(u)] \end{pmatrix} \quad (\text{A.30})$$

L'énergie libre, calculée pour la solution extrémale, est une fonctionnelle de  $G$ , invariante sous l'échange de deux lignes ou deux colonnes, dans chacun des quatre blocs définis en A.14. Le groupe des permutations à  $n$  éléments est donc une symétrie du problème [127] – c'est la *symétrie des répliques*. La solution qui semble la plus naturelle est la solution *symétrique*, celle pour laquelle la self-énergie est donnée par  $\sigma^{ab} = \text{cte}, \forall a \neq b$ , soit  $\sigma(u) = \text{cte} \forall u \in [0, 1]$  une fois prise la limite  $n \rightarrow 0$ . Typiquement, une solution symétrique avec  $\sigma(u) = 0, \forall u \in [0, 1]$  peut décrire une phase superfluide où le désordre n'est pas pertinent (dans une telle phase la self-énergie s'annule). Dans le cas d'une espèce dans un potentiel aléatoire, la solution symétrique n'est pas stable dans l'ensemble du diagramme de phase. En particulier elle cesse d'exister pour  $K < 3/2$  [58]. L'hypothèse avancée par Parisi [127] est que dans ce type de situation il est nécessaire de chercher une solution brisant la symétrie des répliques pour décrire le reste du diagramme de phase (ici la phase localisée). Les solutions proposées par Parisi brise la symétrie de la manière suivante. On divise les  $n$  répliques en  $n/m_1$  sous-groupes de  $m_1$  répliques ( $m_1$  est un entier naturel), et on suppose que  $G^{ab}$  prend des valeurs différentes si  $a$  et  $b$  appartiennent au même sous-groupe ou à des sous-groupes différents. On répète ensuite l'opération : chaque sous groupe de  $m_1$  répliques est divisé en  $m_1/m_2$  groupes de  $m_2$  répliques, avec une prescription analogue pour les éléments de matrice, et ainsi de suite, jusqu'à épuisement de tous les éléments de matrices. En prenant la limite  $n \rightarrow 0$  cette structure hiérarchique transparait dans la fonction  $G(u)$ , et plus particulièrement dans la self-énergie  $\sigma(u)$ . Les solutions brisant la symétrie des répliques sont classées selon leur rang dans la hiérarchie. Une solution 1RSB (pour *Replica Symmetry Breaking de niveau 1*) correspond à la toute première opération décrite ci-dessus et  $\sigma(u)$  est une fonction marche. Pour une solution 2RSB,  $\sigma(u)$  est une fonction à deux marches et ainsi de suite jusqu'à la solution FRBSB (*Full Replica Symmetry Breaking*), où  $\sigma(u)$  est une fonction continue et croissante correspondant à la limite d'une infinité de marches. D'après [58], la phase localisée est décrite par une solution 1RSB.

Dans le cas d'un mélange à deux composantes, la situation est tout à fait similaire mais il faut prendre en compte le caractère matriciel ( $\sigma(u)$  est une matrice  $2 \times 2$ ) du problème. Dans la phase *liquide de Luttinger* où le désordre n'est pertinent pour aucune des deux espèces, alors on cherche une solution symétrique avec  $\sigma_f(u) = \sigma_b(u) = 0$ . Dans les phases où une des deux espèces est localisée, on cherche

une solution symétrique dans un des secteurs et 1RSB dans l'autre. Dans la phase totalement localisée, on cherche une solution brisant la symétrie des répliques dans les deux secteurs.

### A.3 Solution 1RSB

Afin de décrire la phase avec des fermions localisés et des bosons superfluide on cherche donc une solution 1RSB dans le secteur fermionique et symétrique dans le secteur bosonique. La brisure de symétrie de niveau 1 implique qu'il existe un nombre  $u_1 \in [0, 1]$  tel que  $\sigma_f(u < u_1) = 0$  and  $\sigma_f(u > u_1) = \sigma_f$ , ou, de manière équivalente,  $F(u < u_1) = \infty$  et  $F(u > u_1) = F$ .  $u_1$  est un paramètre variationnel supplémentaire. La self-énergie bosonique est identiquement nulle ici,  $\sigma_b(u) = 0$ .

En suivant les notations de [58] on récrit les fonctions de Green,  $\widetilde{G}_{\alpha\beta}^{-1}$  et  $G_{\alpha\beta}^{-1}(u)$  avec  $\alpha, \beta = f, b$ . Pour cela on introduit les fonctions  $I_F(\omega_n)$  et  $I_B(\omega_n)$  définies comme

$$I_F(\omega_n) = 2 \int_0^\beta d\tau (1 - \cos[\omega_n \tau]) (V'_F[\widetilde{F}(\tau)] - V'_F[F]), \quad (\text{A.31})$$

$$I_B(\omega_n) = 2 \int_0^\beta d\tau (1 - \cos[\omega_n \tau]) V'_B[\widetilde{B}(\tau)], \quad (\text{A.32})$$

ainsi qu'un terme de masse  $\Sigma_f$  tel que

$$\Sigma_F = 2\beta u_1 V'_F[F]. \quad (\text{A.33})$$

Il vient alors :

$$\widetilde{G}_{ff}^{-1}(q, \omega_n) = (G_0^{-1})_{ff}(q, i\omega_n) + I_F(\omega_n) + \Sigma_f - \sigma_f \delta_{n,0} \quad (\text{A.34})$$

$$\widetilde{G}_{bb}^{-1}(q, \omega_n) = (G_0^{-1})_{bb}(q, i\omega_n) + I_B(\omega_n) \quad (\text{A.35})$$

$$G_{ff}^{-1}(u) = -\delta_{n,0} \sigma_f \Theta(u - u_1), \quad (\text{A.36})$$

$$G_{bb}^{-1}(u) = 0. \quad (\text{A.37})$$

$\Theta(u)$  est la fonction marche de Heaviside. On donne aussi deux égalités utiles par la suite :

$$\widetilde{G}_{ff}^{-1} - G_{ff}^{-1}(1) = (G_0^{-1})_{ff}(q, i\omega_n) + I_F(\omega_n) + \Sigma_F, \quad (\text{A.38})$$

$$\widetilde{G}_{ff}^{-1} - \int_0^1 du G_{ff}^{-1}(u) = (G_0^{-1})_{ff}(q, i\omega_n) + I_F(\omega_n) + \Sigma_F(1 - \delta_{n,0}). \quad (\text{A.39})$$

En procédant à l'inversion de la matrice  $(G^{-1})_{\alpha\beta}$  on peut récrire les équations auto-cohérentes comme des équations portant sur  $\sigma_f$  and  $I_F, I_B$ . Le point important ici est que les matrices de Parisi commutent entre elles (voir à ce sujet les formules de

multiplication et d'inversion données dans [128]) et on peut inverser la matrice ( $G^{-1}$ ) par blocs. On trouve

$$F = \frac{2}{\beta L} \sum_{q, i\omega_n} \frac{\pi K_f}{v_f} \frac{\frac{\omega_n^2}{v_b^2} + q^2 + \hat{I}_B(\omega_n)}{\left(\frac{\omega_n^2}{v_b^2} + q^2 + \hat{I}_B(\omega_n)\right) \left(\frac{\omega_n^2}{v_f^2} + q^2 + \hat{I}_F(\omega_n) + \hat{\Sigma}_f\right) - g^2 q^4} \quad (\text{A.40})$$

$$\tilde{F}(\tau) = \frac{2}{\beta L} \sum_{q, i\omega_n} \frac{\pi K_f}{v_f} \frac{(1 - \cos[\omega_n \tau]) \left(\frac{\omega_n^2}{v_b^2} + q^2 + \hat{I}_B(\omega_n)\right)}{\left(\frac{\omega_n^2}{v_b^2} + q^2 + \hat{I}_B(\omega_n)\right) \left(\frac{\omega_n^2}{v_f^2} + q^2 + \hat{I}_F(\omega_n) + \hat{\Sigma}_f\right) - g^2 q^4} \quad (\text{A.41})$$

$$\tilde{B}(\tau) = \frac{2}{\beta L} \sum_{q, i\omega_n} \frac{\pi K_b}{v_b} \frac{(1 - \cos[\omega_n \tau]) \left(\frac{\omega_n^2}{v_f^2} + q^2 + \hat{I}_F(\omega_n) + \hat{\Sigma}_f\right)}{\left(\frac{\omega_n^2}{v_b^2} + q^2 + \hat{I}_B(\omega_n)\right) \left(\frac{\omega_n^2}{v_f^2} + q^2 + \hat{I}_F(\omega_n) + \hat{\Sigma}_f\right) - g^2 q^4} \quad (\text{A.42})$$

On peut vérifier que le terme correspondant à  $B$  vaut bien l'infini, et  $\sigma_b = 0$ . On a introduit  $\hat{I}_F = \frac{\pi K_f}{v_f} I_F$ ,  $\hat{\Sigma}_F = \frac{\pi K_f}{v_f} \Sigma_F$  et  $\hat{I}_B = \frac{\pi K_b}{v_b} I_B$ . Notez que  $\hat{\Sigma}_F$  a la même dimension que  $q^2$ . Le système d'équations auto-cohérentes se réduit à :

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_F &= 2\beta \frac{\pi K_f}{v_f} u_1 V'_F[F], \\ \hat{I}_F(\omega_n) &= 2 \frac{\pi K_f}{v_f} \int_0^\beta d\tau (1 - \cos[\omega_n \tau]) (V'_F[\tilde{F}(\tau)] - V'_F[F]), \\ \hat{I}_B(\omega_n) &= 2 \frac{\pi K_b}{v_b} \int_0^\beta d\tau (1 - \cos[\omega_n \tau]) V'_B[\tilde{B}(\tau)]. \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Le système n'est fermé qu'une fois  $u_1$  fixé. L'équation supplémentaire est obtenue en vérifiant que la solution que nous étudions est bien un minimum de l'énergie libre variationnelle. En particulier il est nécessaire que la matrice de stabilité (la matrice des dérivées secondes autour de la solution) soit (définie-)positive [127, 128, 58]. On développe alors, l'énergie libre au deuxième ordre, autour de la solution des équations auto-cohérente, en écrivant  $G(q, i\omega_n) = G^{(0)}(q, i\omega_n) + g(q)$ , où  $G^{(0)}$  est cette solution. Pour alléger les notations on note ses éléments de matrice comme

$$[G^{(0)}]^{-1}(q, i\omega_n = 0) = \begin{pmatrix} (\tilde{\Gamma}_f, \Gamma_f(u)) & (\tilde{\Gamma}_{fb}, 0) \\ (\tilde{\Gamma}_{fb}, 0) & (\tilde{\Gamma}_b, 0) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.44})$$

De même,

$$g(q) = \begin{pmatrix} (0, g_f(q, u)) & (0, g_{fb}(q, u)) \\ (0, g_{bf}(q, u)) & (0, g_b(q, u)) \end{pmatrix} \quad (\text{A.45})$$

Notez que la brisure de symétrie n'affecte que le mode  $\omega_n = 0$ , et qu'il suffit de perturber ce mode seulement. On trouve l'expression suivante

$$\begin{aligned} \delta^2 F_{var} &= \frac{1}{4\beta} \sum_q \text{Tr} [[G^{(0)}(q)]^{-1} g(q)]^2 \\ &\quad - n \frac{1}{\beta L} \int_0^1 du \sum_{q,q'} [g_f(q,u)g_f(q',u)V_F''[F(u)] + g_b(q,u)g_b(q',u)V_B''[B(u)]] . \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

En pratique, on se concentre sur un seul de ces modes (le mode replicon, que l'on définit plus bas) et on impose à la valeur propre correspondante d'être nulle (ce qui entraîne nécessairement que les valeurs propres des autres modes sont positives). C'est le *critère de marginalité du mode replicon* [58, 168], et il est à vrai dire plutôt choisi en fonction de considérations physiques pratiques (il redonne le bon comportement basse fréquence de la conductivité pour des fermions désordonnés par exemples) que d'une compréhension claire de sa physique intrinsèque. En tous les cas, la matrice de stabilité se simplifie grandement pour le mode replicon, pour lequel, par définition,  $\int_0^{u_1} du g(u) = 0$  et  $\int_{u_1}^1 du g(u) = 0$ . Dans ce cas on trouve une matrice de stabilité symétrique :

- pour  $u < u_f$ ,

$$\begin{aligned} M(q, q', u, u') &= \\ -\frac{1}{4\beta} \delta(u - u') &\begin{pmatrix} (\tilde{\Gamma}_f - \langle \Gamma_f \rangle)^2 \delta_{qq'} & \tilde{\Gamma}_{fb}^2 \delta_{qq'} & (\tilde{\Gamma}_f - \langle \Gamma_f \rangle) \tilde{\Gamma}_{fb} \delta_{qq'} & (\tilde{\Gamma}_f - \langle \Gamma_f \rangle) \tilde{\Gamma}_{fb} \delta_{qq'} \\ * & \tilde{\Gamma}_b^2 \delta_{qq'} & \tilde{\Gamma}_b \tilde{\Gamma}_{fb} \delta_{qq'} & \tilde{\Gamma}_b \tilde{\Gamma}_{fb} \delta_{qq'} \\ * & * & \tilde{\Gamma}_{fb}^2 \delta_{qq'} & (\tilde{\Gamma}_f - \langle \Gamma_f \rangle) \tilde{\Gamma}_b \delta_{qq'} \\ * & * & * & \tilde{\Gamma}_{fb}^2 \delta_{qq'} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

- pour  $u > u_f$ ,

$$\begin{aligned} M(q, q', u, u') &= \\ -\frac{1}{4\beta} \delta(u - u') &\begin{pmatrix} (\tilde{\Gamma}_f - \Gamma_f)^2 \delta_{qq'} + \frac{4}{L} V_F''[F] & \tilde{\Gamma}_{fb}^2 \delta_{qq'} & (\tilde{\Gamma}_f - \Gamma_f) \tilde{\Gamma}_{fb} \delta_{qq'} & (\tilde{\Gamma}_f - \Gamma_f) \tilde{\Gamma}_{fb} \delta_{qq'} \\ * & \tilde{\Gamma}_b^2 \delta_{qq'} & \tilde{\Gamma}_b \tilde{\Gamma}_{fb} \delta_{qq'} & \tilde{\Gamma}_b \tilde{\Gamma}_{fb} \delta_{qq'} \\ * & * & \tilde{\Gamma}_{fb}^2 \delta_{qq'} & (\tilde{\Gamma}_f - \Gamma_f) \tilde{\Gamma}_b \delta_{qq'} \\ * & * & * & \tilde{\Gamma}_{fb}^2 \delta_{qq'} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

avec

$$\delta^2 F_{var} = \sum_{q,q'} \int_0^1 du \int_0^1 du' [g]^T(q, u) M(q, q', u, u') [g](q, u) \quad (\text{A.49})$$

et  $[g]^T = [g_f, g_b, g_{fb}, g_{bf}]$ . Pour ce mode la condition de marginalité s'écrit

$$\sum_{q'} M(q, q', u, u) [g(q', u)] = 0 \quad (\text{A.50})$$

Pour  $u < u_1$  on trouve une condition triviale,  $g(u) = 0$  ou  $U_{bf}/\pi\sqrt{K_f K_b/(v_f v_b)} = 1$ , tandis que pour  $u > u_1$  on trouve :

$$-\frac{4}{L} \left( \frac{\pi K_f}{v_f} \right)^2 V_F''(F) \sum_q \frac{1}{[q^2(1-g^2) + \hat{\Sigma}_f]^2} = 1, \quad (\text{A.51})$$

qui devient à la limite  $L \rightarrow \infty$ ,

$$\hat{\Sigma}_f^{3/2} = - \left( \frac{\pi K_f}{v_f} \right)^2 \frac{V_F''(F)}{\sqrt{1-g^2}}, \quad (\text{A.52})$$

et ferme effectivement le système d'équations auto-cohérentes.

## A.4 Solution 2RSB

Pour décrire la phase totalement localisée on cherche des solutions RSB dans les deux secteurs, fermionique et bosonique. Nous avons trouvé qu'il est impossible de trouver un système d'équations auto-cohérentes avec des solutions 1RSB dans chaque secteur. En revanche, il est possible d'écrire un tel système en supposant une brisure 2RSB dans un des secteurs et 1RSB dans l'autre. Nous procédons selon les mêmes lignes que dans la section précédente, avec maintenant deux points  $u_1$  et  $u_2$  repérant les deux marches.

$$\begin{aligned} \sigma_f(u < u_1) &= 0, \\ \sigma_f(u_1 < u < u_2) &= \sigma_f^{(1)} \equiv 2\beta V_F'[F^{(1)}], \\ \sigma_f(u_2 < u < 1) &= \sigma_f^{(2)} \equiv 2\beta V_F'[F^{(2)}], \\ \sigma_b(u < u_2) &= 0, \\ \sigma_b(u_2 < u < 1) &= \sigma_b^{(2)} \equiv 2\beta V_B'[B^{(2)}]. \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

On définit également

$$\hat{I}_F(\omega_n) = 2 \frac{\pi K_f}{v_f} \int_0^\beta d\tau (1 - \cos[\omega_n \tau]) (V_F'[\tilde{F}(\tau)] - V_F'[F^{(2)}]), \quad (\text{A.54})$$

$$\hat{I}_B(\omega_n) = 2 \frac{\pi K_b}{v_b} \int_0^\beta d\tau (1 - \cos[\omega_n \tau]) (V_B'[\tilde{B}(\tau)] - V_B'[B^{(2)}]), \quad (\text{A.55})$$

$$\hat{\Sigma}_F = 2\beta \frac{\pi K_f}{v_f} [u_1 V_F'[F^{(1)}] + u_2 (V_F'[F^{(2)}] - V_F'[F^{(1)}])], \quad (\text{A.56})$$

$$\hat{\Sigma}_B = 2\beta \frac{\pi K_b}{v_b} u_2 V_B'[B^{(2)}] \quad (\text{A.57})$$

L'inversion du propagateur conduit à

$$B^{(2)} = \frac{2}{\beta L} \sum_{q, i\omega_n} \frac{\pi K_b}{v_b} \frac{\frac{\omega_n^2}{v_f^2} + q^2 + \hat{I}_F(\omega_n) + \hat{\Sigma}_F}{\left(\frac{\omega_n^2}{v_b^2} + q^2 + \hat{I}_B(\omega_n)\right) \left(\frac{\omega_n^2}{v_f^2} + q^2 + \hat{I}_F(\omega_n) + \hat{\Sigma}_f\right) - g^2 q^4} \quad (\text{A.58})$$

$$F^{(2)} = \frac{2}{\beta L} \sum_{q, i\omega_n} \frac{\pi K_f}{v_f} \frac{\frac{\omega_n^2}{v_b^2} + q^2 + \hat{I}_B(\omega_n) + \hat{\Sigma}_B}{\left(\frac{\omega_n^2}{v_b^2} + q^2 + \hat{I}_B(\omega_n)\right) \left(\frac{\omega_n^2}{v_f^2} + q^2 + \hat{I}_F(\omega_n) + \hat{\Sigma}_f\right) - g^2 q^4} \quad (\text{A.59})$$

$$F^{(2)} - F^{(1)} = -2\pi \frac{K_f}{v_f} \frac{1}{u_2 \beta L} \sum_q \frac{(q^2 + \hat{\Sigma}_B) \Delta \hat{\Sigma}_F^{(2)} + g^2 q^2 \Sigma_B}{\left((q^2 + \hat{\Sigma}_B)(q^2 + \hat{\Sigma}_F) - g^2 q^4\right) \left(q^2(1 - g^2) + \hat{\Sigma}_F^{(1)}\right)} \quad (\text{A.60})$$

où nous avons introduit  $\Delta \hat{\Sigma}_F^{(2)} = 2\beta \frac{\pi K_f}{v_f} u_2 (V'_F[F^{(2)}] - V'_F[F^{(1)}])$  et  $\hat{\Sigma}_F^{(1)} = 2\beta \frac{\pi K_f}{v_f} u_1 V'_F[F^{(1)}] -$  tels que  $\hat{\Sigma}_F = \hat{\Sigma}_F^{(1)} + \Delta \hat{\Sigma}_F^{(2)}$ . Comme dans la section précédente nous avons besoin de deux équations supplémentaires pour déterminer  $u_1$  et  $u_2$  et clore le système. On utilise, par analogie, le même critère de stabilité, à savoir la condition de marginalité du mode replicon caractérisé par  $\int_0^{u_1} du g(u) = 0$ ,  $\int_{u_1}^{u_2} du g(u) = 0$  et  $\int_{u_2}^1 du g(u) = 0$ . La matrice de stabilité s'écrit

- pour  $u < u_1$ ,  $M(q, q', u, u') = -\frac{1}{4\beta} \delta(u - u') \times$

$$\begin{pmatrix} (\tilde{\Gamma}_f - \langle \Gamma_f \rangle)^2 \delta_{qq'} & \tilde{\Gamma}_{fb}^2 \delta_{qq'} & (\tilde{\Gamma}_f - \langle \Gamma_f \rangle) \tilde{\Gamma}_{fb} \delta_{qq'} & (\tilde{\Gamma}_f - \langle \Gamma_f \rangle) \tilde{\Gamma}_{fb} \delta_{qq'} \\ \star & (\tilde{\Gamma}_b - \langle \Gamma_b \rangle)^2 \delta_{qq'} & (\tilde{\Gamma}_b - \langle \Gamma_b \rangle) \tilde{\Gamma}_{fb} \delta_{qq'} & (\tilde{\Gamma}_b - \langle \Gamma_b \rangle) \tilde{\Gamma}_{fb} \delta_{qq'} \\ \star & \star & \tilde{\Gamma}_{fb}^2 \delta_{qq'} & (\tilde{\Gamma}_f - \langle \Gamma_f \rangle) (\tilde{\Gamma}_b - \langle \Gamma_b \rangle) \delta_{qq'} \\ \star & \star & \star & \tilde{\Gamma}_{fb}^2 \delta_{qq'} \end{pmatrix}$$

- pour  $u_1 < u < u_2$ ,

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 & \tilde{\Gamma}_{fb}^2 \delta_{qq'} & (\tilde{\Gamma}_f - \Gamma_f^{(2)} + \Delta \Gamma_f^{(2)}) \tilde{\Gamma}_{fb} \delta_{qq'} & (\tilde{\Gamma}_f - \Gamma_f^{(2)} + \Delta \Gamma_f^{(2)}) \tilde{\Gamma}_{fb} \delta_{qq'} \\ \star & (\tilde{\Gamma}_b - \langle \Gamma_b \rangle)^2 \delta_{qq'} & (\tilde{\Gamma}_b - \langle \Gamma_b \rangle) \tilde{\Gamma}_{fb} \delta_{qq'} & (\tilde{\Gamma}_b - \langle \Gamma_b \rangle) \tilde{\Gamma}_{fb} \delta_{qq'} \\ \star & \star & \tilde{\Gamma}_{fb}^2 \delta_{qq'} & (\tilde{\Gamma}_f - \Gamma_f^{(2)} + \Delta \Gamma_f^{(2)}) (\tilde{\Gamma}_b - \langle \Gamma_b \rangle) \delta_{qq'} \\ \star & \star & \star & \tilde{\Gamma}_{fb}^2 \delta_{qq'} \end{pmatrix} \quad (\text{A.61})$$

- pour  $u_2 < u < 1$ ,

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_2 & (\tilde{\Gamma}_f - \Gamma_f^{(2)}) \tilde{\Gamma}_{fb} \delta_{qq'} & (\tilde{\Gamma}_f - \Gamma_f^{(2)}) \tilde{\Gamma}_{fb} \delta_{qq'} & (\tilde{\Gamma}_b - \Gamma_b^{(2)}) \tilde{\Gamma}_{fb} \delta_{qq'} \\ \star & (\tilde{\Gamma}_b - \Gamma_b^{(2)})^2 \delta_{qq'} + \frac{4}{L} V_B''[B^{(2)}] & (\tilde{\Gamma}_b - \Gamma_b^{(2)}) \tilde{\Gamma}_{fb} \delta_{qq'} & (\tilde{\Gamma}_b - \Gamma_b^{(2)}) \tilde{\Gamma}_{fb} \delta_{qq'} \\ \star & \star & \tilde{\Gamma}_{fb}^2 \delta_{qq'} & (\tilde{\Gamma}_f - \Gamma_f^{(2)}) (\tilde{\Gamma}_b - \Gamma_b^{(2)}) \delta_{qq'} \\ \star & \star & \star & \tilde{\Gamma}_{fb}^2 \delta_{qq'} \end{pmatrix}$$

(A.62)

Par commodité dans les matrices on a noté

$$\mathcal{A}_1 = \left( \tilde{\Gamma}_f - \Gamma_f^{(2)} + \Delta\Gamma_f^{(2)} \right)^2 \delta_{qq'} + \frac{4}{L} V_F''[F^{(1)}]. \quad (\text{A.63})$$

$$\mathcal{A}_2 = \left( \tilde{\Gamma}_f - \Gamma_f^{(2)} \right)^2 \delta_{qq'} + \frac{4}{L} V_F''[F^{(2)}] \quad (\text{A.64})$$

Comme précédemment, sur le premier intervalle la condition de marginalité conduit à une condition triviale. Sur le second intervalle on trouve

$$-\frac{4}{L} \left( \frac{\pi K_f}{v_f} \right)^2 V_F''[F^{(1)}] \sum_q \frac{1}{\left[ q^2(1-g^2) + \hat{\Sigma}_f^{(1)} \right]^2} = 1, \quad (\text{A.65})$$

et sur le troisième

$$\left[ 4 \left( \frac{\pi K_f}{v_f} \right)^2 V_F''[F^{(2)}] A_{ff} + 1 \right] \left[ 4 \left( \frac{\pi K_f}{v_f} \right)^2 V_B''[B^{(2)}] A_{bb} + 1 \right] = \quad (\text{A.66})$$

$$16 \left( \frac{\pi K_f}{v_f} \right)^2 \left( \frac{\pi K_b}{v_b} \right)^2 V_F''[F^{(2)}] V_B''[B^{(2)}] A_{fb}^2, \quad (\text{A.67})$$

avec

$$A_{ff} = \frac{1}{L} \sum_q \frac{\left( q^2 + \hat{\Sigma}_b \right)^2}{\left[ \left( q^2 + \hat{\Sigma}_f \right) \left( q^2 + \hat{\Sigma}_b \right) - g^2 q^4 \right]^2},$$

$$A_{bb} = \frac{1}{L} \sum_q \frac{\left( q^2 + \hat{\Sigma}_f \right)^2}{\left[ \left( q^2 + \hat{\Sigma}_f \right) \left( q^2 + \hat{\Sigma}_b \right) - g^2 q^4 \right]^2},$$

$$A_{fb} = \frac{1}{L} \sum_q \frac{\pi^2 g^2 q^4}{\left[ \left( q^2 + \hat{\Sigma}_f \right) \left( q^2 + \hat{\Sigma}_b \right) - g^2 q^4 \right]^2}.$$

Ces deux conditions ferment effectivement le système d'équations auto-cohérentes.

## Annexe B

# Échelles de bosons de coeur dur dans la limite $t_{\perp} \gg t$

### B.1 Gap au demi-remplissage

Nous traçons ici les grandes lignes du calcul perturbatif au second ordre en  $t/t_{\perp}$  menant à l'expression de la taille du plateau au demi-remplissage. Le point de départ est la limite des barreaux découplées  $t/t_{\perp} = 0$ . Le Hamiltonien *fondamental* s'écrit

$$\mathcal{H}_0 = -t_{\perp} \sum_j (b_{1,j}^{\dagger} b_{2,j} + \text{h.c.}). \quad (\text{B.1})$$

Quatre états sont disponibles sur un barreau donné  $j$  : un état vide  $|0\rangle_j$ , deux états à une particule  $|1\pm\rangle_j = (|j, 1\rangle \pm |j, 2\rangle) / \sqrt{2}$ , et un état à deux particules  $|2\rangle_j$ . Au demi-remplissage,  $N = L$ , l'état fondamental est un produit tensoriel de  $L$  états symétriques  $|L^{(0)}\rangle = |1+, 1+, \dots, 1+\rangle$  et l'énergie de l'état fondamental est  $E_L^{(0)} = -t_{\perp} L$ . On ajoute maintenant au problème une amplitude de saut longitudinal non-nulle mais faible  $t \ll t_{\perp}$ . Le Hamiltonien de perturbation s'écrit

$$\mathcal{H}_1 = -t \sum_{j,\ell} (b_{\ell,j}^{\dagger} b_{\ell,j+1} + \text{h.c.}). \quad (\text{B.2})$$

En agissant sur l'état  $|L^{(0)}\rangle$ ,  $\mathcal{H}_1$  crée  $2L$  excitations particule-trou sur des barreaux plus proches voisins,

$$H_1 |L^{(0)}\rangle = -t \sum_{j=1}^L \left[ |1+, 1+, \dots, \underset{(j)}{2}, 0, \dots, 1+\rangle + |1+, 1+, \dots, \underset{(j)}{0}, 2, \dots, 1+\rangle \right] \quad (\text{B.3})$$

Il n'y a pas de correction au premier ordre à l'énergie du fondamental puisque  $\langle L^{(0)} | H_1 | L^{(0)} \rangle = 0$ . La correction au second ordre est de la forme [138]

$$E_L^{(2)} = \langle L^{(0)} | H_1 Q_0 \frac{1}{E_L^{(0)} - H_0} Q_0 H_1 | L^{(0)} \rangle, \quad (\text{B.4})$$

où  $Q_0$  est un projecteur, projetant sur l'espace complémentaire au sous-espace fondamental (composé ici d'un état non-dégénéré). Cette formule a une forme très intuitive :  $H_1$  crée des excitations particule-trou, sélectionnée par  $Q_0$ . Puis  $H_1$  agit

une seconde fois, sur cet état excité. Une correction non-nulle est obtenue seulement si le second processus ramène le système dans le sous-espace fondamental. Ici les états excités ont une énergie  $-t_{\perp}(L-2)$  et  $Q_0[E_L^{(0)} - H_0]^{-1}Q_0$  peut être remplacée par  $Q_0/(2t_{\perp})$ . La correction au second ordre est alors  $E_L^{(2)} = -2Lt^2/(2t_{\perp})$ , et nous trouvons pour l'énergie de l'état à  $L$  particules

$$E_L = -t_{\perp}L - 2L \frac{t^2}{2t_{\perp}}. \quad (\text{B.5})$$

Nous nous occupons maintenant des états à  $L+1$  particules. Elles sont  $L$  fois dégénérées et s'écrivent dans la base des impulsions selon

$$|(L+1)_k^{(0)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{j=1}^L e^{ikj} |1+, 1+, \dots, 1+, \underset{(j)}{2}, 1+, \dots, 1+\rangle. \quad (\text{B.6})$$

Leur énergie fondamentale est  $E_{L+1}^{(0)} = -t_{\perp}(L-1)$ .  $H_1$  peut soit déplacer la particule supplémentaire (sur les barreaux voisins) soit créer  $2(L-1)$  excitations particule-trou.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 |(L+1)_k^{(0)}\rangle = & \\ - \frac{t}{\sqrt{2L}} \sum_{j=1}^L e^{ikj} & \left( |1+, 1+, \dots, 1+, \underset{(j+1)}{2}, 1+, \dots, 1+\rangle + |1+, 1+, \dots, 1+, \underset{(j-1)}{2}, 1+, \dots, 1+\rangle \right) \\ + \sum_{p \neq j, j-1} & \left[ |1+, 1+, \dots, \underset{(p)}{2}, 0, \dots, \underset{(j)}{2}, 1+, \dots, 1+\rangle + |1+, 1+, \dots, \underset{(p)}{0}, 2, \dots, \underset{(j)}{2}, 1+, \dots, 1+\rangle \right] \\ & + |1+, 1+, \dots, 1+, \underset{(j-2)}{2}, \underset{(j-1)}{0}, \underset{(j)}{2}, 1+, \dots, 1+\rangle \\ & + |1+, 1+, \dots, 1+, \underset{(j)}{2}, \underset{(j+1)}{0}, \underset{(j+2)}{2}, 1+, \dots, 1+\rangle \Big). \quad (\text{B.7}) \end{aligned}$$

La première ligne résulte du saut de la particule supplémentaire sur les barreaux voisins et apporte une correction au premier ordre à l'énergie de l'état à  $L+1$  particules,  $E_{L+1}^{(1)}(k) = -2t \cos(k)$ . La seconde et troisième ligne implique des états excités apportant une correction au second ordre

$$E_{L+1}^{(2)} = \langle (L+1)_k^{(0)} | H_1 Q_0 \frac{1}{E_{L+1}^{(0)} - H_0} Q_0 H_1 | (L+1)_k^{(0)} \rangle,$$

Les états excités ont ici une énergie de  $-t_{\perp}(L-3)$  et on peut remplacer  $Q_0[E_{L+1}^{(0)} - H_0]^{-1}Q_0$  par  $Q_0/(2t_{\perp})$ . En agissant une seconde fois  $H_1$  décale l'énergie d'une constante (en agissant sur les états de la seconde ligne) comme pour l'énergie de l'état à  $L$  particules.  $H_1$  déplace aussi la particule supplémentaire sur les barreaux deuxième voisin (en agissant sur les états de la troisième ligne). La correction de

second ordre est finalement  $E_{L+1}^{(2)}(k) = -2(L-2)t^2/(2t_\perp) - 2t^2/(2t_\perp) \cos(2k)$ , et l'énergie corrigée pour l'état à  $L+1$  particules est

$$E_{L+1}(k) = -t_\perp(L-1) - 2t \cos(k) - 2(L-2) \frac{t^2}{2t_\perp} - 2 \frac{t^2}{2t_\perp} \cos(2k). \quad (\text{B.8})$$

Notez que l'on pourrait faire exactement le même calcul pour l'énergie de l'état à  $L-1$  particules, pour trouver la même énergie. Ainsi, la taille du plateau au demi-remplissage est donnée par  $\Delta_s = 2[E_{L+1}(0) - E_L]$  :

$$\Delta_s = 2t_\perp - 4t + \frac{2t^2}{t_\perp}. \quad (\text{B.9})$$

## B.2 Modèle effectif

On peut aussi utiliser une méthode quelque peu différente pour obtenir le Hamiltonien effectif au second ordre en perturbation pour les remplissages incommensurables [136, 137]. Le point de départ est le modèle original que l'on récrit sous la forme  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$ , avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= -t \sum_{j,\ell} \left( b_{\ell,j}^\dagger b_{\ell,j+1}^\dagger + \text{h.c.} \right) - (\mu - \mu_c) \sum_{j,\ell} n_{\ell,j} \\ \mathcal{H}_0 &= -t_\perp \sum_j \left( b_{1,j}^\dagger b_{2,j}^\dagger + \text{h.c.} \right) - \mu_c \sum_{j,\ell=1,2} n_{\ell,j} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

et  $\mu_c = t_\perp$ . Pour le Hamiltonien fondamental  $\mathcal{H}_0$ , les états  $|1\rangle_j$  et  $|2\rangle_j$  ont la même énergie  $E_0 = -2t_\perp$ . Appelons  $P_0$  le projecteur sur le sous-espace fondamental, constitué de  $2^L$  états. Dans ce sous-espace,  $|1\rangle_j$  and  $|2\rangle_j$  sont les seuls états autorisés sur un barreau donné  $j$ . Appelons  $Q_0$  le projecteur sur l'espace complémentaire. Le Hamiltonien effectif au second ordre est

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = P_0 \mathcal{H}_1 P_0 + P_0 \mathcal{H}_1 Q_0 [E - H_0]^{-1} Q_0 \mathcal{H}_1 P_0, \quad (\text{B.11})$$

avec  $E$  la valeur propre du sous-espace dégénéré en considération. Ici, étant donné le sous-espace dégénéré et la forme de  $\mathcal{H}_1$ , l'état excité *virtuel* est un état avec un barreau vide. Alors, dans tout ce qui suit,  $Q_0 [E - H_0]^{-1} Q_0 = Q_0 [-2t_\perp L + 2t_\perp (L-1)]^{-1} Q_0 = -Q_0 / (2t_\perp)$ . Dans la contribution au premier ordre, l'action des projecteurs  $P_0$  peut être implémentée en utilisant des opérateurs de spin 1/2 au lieu des bosons

$$b_{j,1}^\dagger = b_{j,2}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_j^+, \quad (\text{B.12})$$

$$b_{j,1} = b_{j,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_j^-, \quad (\text{B.13})$$

$$n_{j,1} = n_{j,2} = \frac{1}{2} \left[ \left( \sigma_j^z + \frac{1}{2} \right) + 1 \right]. \quad (\text{B.14})$$

Alors,

$$P_0 \mathcal{H}_1 P_0 = -t \sum_j (\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + H.c.) - (\mu - \mu_c) \sum_j \left( \sigma_j^z + \frac{3}{2} \right). \quad (\text{B.15})$$

Il nous faut maintenant calculer  $P_0 \mathcal{H}_1 Q_0 \mathcal{H}_1 P_0$ . Nous avons vu dans le calcul précédent que la seule manière de créer un état excité est de laisser  $\mathcal{H}_1$  vider un barreau occupé par une particule. Soit  $j$  un tel barreau. Le terme intéressant dans  $Q_0 \mathcal{H}_1 P_0$  est de la forme

$$(1 - n_{j,1} - n_{j,2})(b_{j+1,1}^{\dagger} b_{j,1} + b_{j+1,2}^{\dagger} b_{j,2}) P_0 \quad (\text{B.16})$$

Maintenant on doit appliquer  $P_0 \mathcal{H}_1 Q_0$  sur ce terme et ramener le système dans le sous-espace fondamental. Comme nous l'avons déjà vu, il y a deux façons de le faire

**a)** Agir avec  $P_0(b_{j,1}^{\dagger} b_{j+1,1} + b_{j,2}^{\dagger} b_{j+1,2})(n_{j+1,1} + n_{j+1,2} - 1)$  et retrouver l'état initial. La contribution correspondante à la correction du second ordre est une interaction attractive aux plus proches voisins, de la forme

$$-\frac{t^2}{t_{\perp}} \sum_j \left[ \frac{1}{2} - \sigma_j^z \right] \left[ \frac{1}{2} - \sigma_{j+1}^z \right] \quad (\text{B.17})$$

où nous avons utilisé les opérateurs de spin 1/2 pour forcer la projection.

**b)** Agir avec  $P_0(b_{j,1}^{\dagger} b_{j-1,1} + b_{j,2}^{\dagger} b_{j-1,2})(n_{j-1,1} + n_{j-1,2} - 1)$ . Ce terme génère un terme de saut aux seconds voisins de la forme

$$-\frac{t^2}{2t_{\perp}} \sum_j \sigma_{j+1}^+ \left[ \frac{1}{2} - \sigma_j^z \right] \sigma_{j-1}^- \quad (\text{B.18})$$

Une transformation de Jordan-Wigner transforme ce Hamiltonien en le Hamiltonien d'une bande de fermions sans spin avec des sauts aux plus proches voisins et des interactions attractives

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}} &= -t \sum_j \left[ c_j^{\dagger} c_{j+1} + H.c. \right] - (\mu - \mu_c) \sum_j (n_j + 1) \\ &\quad - \frac{t^2}{2t_{\perp}} \sum_j \left[ c_{j-1}^{\dagger} (1 - n_j) c_{j+1} + H.c. \right] \\ &\quad - \frac{t^2}{t_{\perp}} \sum_j (1 - n_j)(1 - n_{j+1}) \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

### B.3 Calcul de $K_s$ et $v_c$ dans la limite de couplage fort

Nous esquissons brièvement le calcul conduisant aux expressions perturbatives (IV.47) et (IV.53) pour  $K_s$  et  $v_c$ . Nous commençons du Hamiltonien effectif de l'équation (IV.12), dérivé dans la section IV.2.2.2, et extrayons les paramètres de Luttinger  $\tilde{v}$  and  $\tilde{K}$ . La forme de basse énergie du Hamiltonien est [81] :

$$H = \frac{\hbar}{2\pi} \int dx [v_J(\nabla\theta)^2 + v_N(\nabla\Phi)^2], \quad (\text{B.20})$$

où les deux vitesses  $v_N$  et  $v_J$  sont reliées à l'énergie du fondamental

$$v_N = \frac{L}{\hbar\pi} \left( \frac{\partial^2 E_{GS}}{\partial N^2} \right)_{N_0, \varphi=0}, \quad (\text{B.21})$$

$$v_J = \frac{L\pi}{\hbar} \left( \frac{\partial^2 E_{GS}}{\partial \varphi^2} \right)_{N_0, \varphi=0}, \quad (\text{B.22})$$

où  $\varphi$  est un angle imposé sur les conditions aux limites périodiques selon  $c_{j+L}^\dagger = e^{i\varphi} c_j^\dagger$  et  $N_0$  est le nombre de particules. En suivant Cazalilla [35], l'énergie du fondamental est calculé perturbativement en  $t/t_\perp$  comme  $E_{GS} = \langle H_0 \rangle_0 + \langle H_1 \rangle_0$ , avec

$$H_0 = -t \sum_j [c_j^\dagger c_{j+1} + \text{h.c.}] \quad (\text{B.23})$$

$$H_1 = -\frac{t^2}{2t_\perp} \sum_j [c_{j-1}^\dagger (1 - n_j) c_{j+1} + \text{h.c.}] \\ - \frac{t^2}{t_\perp} \sum_j (1 - n_j)(1 - n_{j+1}) \quad (\text{B.24})$$

En utilisant le théorème de Wick,

$$E_{GS} = -tL(f_1 + f_{-1}) \\ - \frac{t^2}{2t_\perp} L [(1 - f_0)(f_2 + f_{-2}) + (f_1 - f_{-1})^2 + 2f_0^2], \quad (\text{B.25})$$

avec  $f_p = \langle c_{j+p}^\dagger c_j \rangle_0$ . Notez que  $f_0 = \tilde{\rho} = N_0/L$  est la densité des fermions sans spin. Nous trouvons, après un peu d'algèbre et dans la limite  $L \rightarrow \infty$  :

$$v_N = 2t \sin(\pi\tilde{\rho}) + \frac{2t^2}{\pi t_\perp} \cos(2\pi\tilde{\rho}) - \frac{2t^2}{\pi t_\perp} \\ + \frac{2t^2}{t_\perp} (1 - \tilde{\rho}) \sin(2\pi\tilde{\rho}), \quad (\text{B.26})$$

$$v_J = 2t \sin(\pi\tilde{\rho}) + \frac{4t^2}{\pi t_\perp} \sin^2(\pi\tilde{\rho}) + \frac{2t^2}{t_\perp} (1 - \tilde{\rho}) \sin(2\pi\tilde{\rho}). \quad (\text{B.27})$$

Finalement, nous identifions les paramètres de Luttinger  $\tilde{v}$  et  $\tilde{K}$  en utilisant les relations  $\tilde{v}\tilde{K} = v_J$  et  $\tilde{u}/\tilde{K} = v_N$  et trouvons

$$\tilde{K} = 1 + \frac{2t \sin(\pi\tilde{\rho})}{t_{\perp} \pi}, \quad (\text{B.28})$$

$$\tilde{v} = 2t \sin(\pi\tilde{\rho}) \left[ 1 + \frac{2t}{t_{\perp}} (1 - \tilde{\rho}) \cos(\pi\tilde{\rho}) \right]. \quad (\text{B.29})$$

Nous établissons dans le chapitre IV que pour des grandes valeurs de  $t_{\perp}/t$  l'identification correcte pour les paramètres de Luttinger originaux est  $K_s = \tilde{K}/2$  and  $v_c = \tilde{v}$ .

## Bibliographie

- [1] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch, and I. Bloch, *Nature* **415**, 39 (2002).
- [2] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885 (2008).
- [3] M. Greiner, I. Bloch, O. Mandel, T. W. Hänsch, and T. Esslinger, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 160405 (2001).
- [4] H. Moritz, T. Stöferle, M. Köhl, and T. Esslinger, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 250402 (2003).
- [5] B. Paredes *et al.*, *Nature* **429**, 277 (2004).
- [6] T. Kinoshita, T. Wenger, and D. S. Weiss, *Science* **305**, 1125 (2004).
- [7] T. Stöferle, H. Moritz, C. Schori, M. Köhl, and T. Esslinger, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 130403 (2004).
- [8] B. L. Tolra *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 190401 (2004).
- [9] C. D. Fertig *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 120403 (2005).
- [10] H. Moritz, T. Stöferle, K. Günter, M. Köhl, and T. Esslinger, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 210401 (2005).
- [11] T. Kinoshita, T. Wenger, and D. S. Weiss, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 190406 (2005).
- [12] E. Haller *et al.*, *Nature* **466**, 597 (2010).
- [13] S. Dettmer *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 160406 (2001).
- [14] A. Görlitz *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 130402 (2001).
- [15] F. Schreck *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 080403 (2001).
- [16] J. Billy *et al.*, *Nature* **453**, 891 (2008).
- [17] R. Folman *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4749 (2000).
- [18] A. H. van Amerongen, J. J. P. van Es, P. Wicke, K. V. Kheruntsyan, and N. J. van Druten, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 090402 (2008).
- [19] K. L. Hur and T. M. Rice, *Annals of Physics* **324**, 1452 (2009), July 2009 Special Issue.
- [20] P. W. Anderson, *Phys. Rev.* **109**, 1492 (1958).
- [21] S. Trotzky *et al.*, *Nat Phys* **6**, 998 (2010).
- [22] X.-G. Wen, *Advances in Physics* **44**, 405 (1995).
- [23] M. P. A. Fisher and L. I. Glazman, arXiv :9610037 (1996).

- [24] C. L. Kane and E. J. Mele, Phys. Rev. Lett. **95**, 226801 (2005).
- [25] C. Wu, B. A. Bernevig, and S.-C. Zhang, Phys. Rev. Lett. **96**, 106401 (2006).
- [26] C. Kane, L. Balents, and M. P. A. Fisher, Phys. Rev. Lett. **79**, 5086 (1997).
- [27] D. J. C. Bourbonnais *Physics of Organic Superconductors and Conductors* Vol. 110 (Springer, Heidelberg, 2008), arXiv :0904.0617v1.
- [28] G. Chaboussant *et al.*, Phys. Rev. B **55**, 3046 (1997).
- [29] M. Klanjšek *et al.*, Phys. Rev. Lett. **101**, 137207 (2008).
- [30] C. Rüegg *et al.*, Phys. Rev. Lett. **101**, 247202 (2008).
- [31] P. Bouillot *et al.*, Phys. Rev. B **83**, 054407 (2011).
- [32] S. Coleman, Phys. Rev. D **11**, 2088 (1975).
- [33] H. P. Büchler, G. Blatter, and W. Zwerger, Phys. Rev. Lett. **90**, 130401 (2003).
- [34] F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **47**, 1840 (1981).
- [35] M. A. Cazalilla, J. Phys. B **37**, S1 (2004).
- [36] T. Giamarchi, *Quantum Physics in One Dimension* (Oxford University Press, 2004).
- [37] G. Roati *et al.*, Nature **453**, 895 (2008).
- [38] L. Fallani, J. E. Lye, V. Guarrera, C. Fort, and M. Inguscio, Phys. Rev. Lett. **98**, 130404 (2007).
- [39] B. Deissler *et al.*, Nature **6**, 354 (2010).
- [40] G. A. S. Aubry, Ann. Israel Phys. Soc. **3**, 133 (1980).
- [41] G. Roux *et al.*, Phys. Rev. A **78**, 023628 (2008).
- [42] M. Albert and P. Leboeuf, Phys. Rev. A **81**, 013614 (2010).
- [43] D. Basko, I. Aleiner, and B. Altshuler, Annals of Physics **321**, 1126 (2006).
- [44] I. L. Aleiner, B. L. Altshuler, and G. V. Shlyapnikov, Nat Phys **6**, 900 (2010).
- [45] P. Lugan *et al.*, Phys. Rev. Lett. **98**, 170403 (2007).
- [46] L. Sanchez-Palencia *et al.*, Phys. Rev. Lett. **98**, 210401 (2007).
- [47] P. Lugan, D. Clément, P. Bouyer, A. Aspect, and L. Sanchez-Palencia, Phys. Rev. Lett. **99**, 180402 (2007).
- [48] P. Lugan *et al.*, Phys. Rev. A **80**, 023605 (2009).
- [49] G. M. Falco, T. Nattermann, and V. L. Pokrovsky, Phys. Rev. B **80**, 104515 (2009).
- [50] R. Vosk and E. Altman, arXiv :1104.2063 (2011).
- [51] C. Gaul and C. A. Müller, Phys. Rev. A **83**, 063629 (2011).
- [52] M. P. A. Fisher, P. B. Weichman, G. Grinstein, and D. S. Fisher, Phys. Rev. B **40**, 546 (1989).

- 
- [53] R. T. Scalettar, G. G. Batrouni, and G. T. Zimanyi, Phys. Rev. Lett. **66**, 3144 (1991).
- [54] W. Krauth, N. Trivedi, and D. Ceperley, Phys. Rev. Lett. **67**, 2307 (1991).
- [55] L. Pollet, N. V. Prokof'ev, B. V. Svistunov, and M. Troyer, Phys. Rev. Lett. **103**, 140402 (2009).
- [56] V. Gurarie, L. Pollet, N. V. Prokof'ev, B. V. Svistunov, and M. Troyer, Phys. Rev. B **80**, 214519 (2009).
- [57] T. Giamarchi and H. J. Schulz, Phys. Rev. B **37**, 325 (1988).
- [58] T. Giamarchi and P. Le Doussal, Phys. Rev. B **53**, 15206 (1996).
- [59] F. Crépin, G. Zaránd, and P. Simon, Phys. Rev. Lett. **105**, 115301 (2010).
- [60] E. Orignac and T. Giamarchi, Phys. Rev. B **57**, 11713 (1998).
- [61] E. Orignac and T. Giamarchi, Phys. Rev. B **57**, 5812 (1998).
- [62] Y.-A. Chen, S. D. Huber, S. Trotzky, I. Bloch, and E. Altman, Nature Physics **7**, 61 (2011).
- [63] F. Crépin, N. Laflorencie, G. Roux, and P. Simon, ArXiv e-prints (accepté dans Phys. Rev. B) (2011).
- [64] A. Leggett, *Quantum Liquids, Bose Condensation and Cooper Pairing in Condensed-Matter Systems* (Oxford University Press, 2006).
- [65] P. Nozières and D. Pines, *Theory of quantum liquids : Superfluid bose liquids*, Advanced Book Classics No. vol. 2 (Perseus, 1999).
- [66] L. Landau, E. Lifshits, and L. Pitaevskii, *Statistical physics*, Statistical Physics No. vol. 2 (Butterworth-Heinemann, 1980).
- [67] H. Bruus and K. Flensberg, *Many-body quantum theory in condensed matter physics : an introduction* Oxford graduate texts in mathematics (Oxford University Press, 2004).
- [68] Y. Castin, J. Phys. IV France **116**, 89 (2004).
- [69] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999).
- [70] W. Ketterle and N. J. van Druten, Phys. Rev. A **54**, 656 (1996).
- [71] S. Sachdev, *Quantum phase transitions* (Cambridge University Press, 2001).
- [72] N. D. Mermin and H. Wagner, Phys. Rev. Lett. **17**, 1133 (1966).
- [73] P. C. Hohenberg, Phys. Rev. **158**, 383 (1967).
- [74] N. N. Bogoliubov, J. Phys. (USSR) **11** **23**, 23 (1947).
- [75] V. Popov, *Functional integrals and collective excitations* Cambridge monographs on mathematical physics (Cambridge University Press, 1987).
- [76] E. H. Lieb and W. Liniger, Phys. Rev. **130**, 1605 (1963).

- [77] E. H. Lieb, Phys. Rev. **130**, 1616 (1963).
- [78] M. Girardeau, J. Math. Phys. **1**, 516 (1960).
- [79] M. D. Girardeau, Phys. Rev. **139**, 500 (1965).
- [80] M. A. Cazalilla, R. Citro, T. Giamarchi, E. Orignac, and M. Rigol, arXiv :1101.5337 (2011).
- [81] F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **45**, 1358 (1980).
- [82] P. Jordan and E. Wigner, Z. Phys. **47**, 631 (1928).
- [83] M. A. Cazalilla and A. F. Ho, Phys. Rev. Lett. **91**, 150403 (2003).
- [84] L. Mathey, D.-W. Wang, W. Hofstetter, M. D. Lukin, and E. Demler, Phys. Rev. Lett. **93**, 120404 (2004).
- [85] A. Imambekov and E. Demler, Phys. Rev. A **73**, 021602 (2006).
- [86] A. Imambekov and E. Demler, Annals of Physics **321**, 2390 (2006).
- [87] L. Mathey, Phys. Rev. B **75**, 144510 (2007).
- [88] L. Mathey and D.-W. Wang, Phys. Rev. A **75**, 013612 (2007).
- [89] G. Refael and E. Demler, Phys. Rev. B **77**, 144511 (2008).
- [90] E. Orignac, M. Tsuchiizu, and Y. Suzumura, Phys. Rev. A **81**, 053626 (2010).
- [91] L. Pollet, M. Troyer, K. Van Houcke, and S. M. A. Rombouts, Phys. Rev. Lett. **96**, 190402 (2006).
- [92] P. Sengupta and C. D. Batista, Phys. Rev. Lett. **98**, 227201 (2007).
- [93] F. Hébert, F. Haudin, L. Pollet, and G. G. Batrouni, Phys. Rev. A **76**, 043619 (2007).
- [94] F. Hébert, G. G. Batrouni, X. Roy, and V. G. Rousseau, Phys. Rev. B **78**, 184505 (2008).
- [95] X. Barillier-Pertuisel, S. Pittel, L. Pollet, and P. Schuck, Phys. Rev. A **77**, 012115 (2008).
- [96] Z. Hadzibabic *et al.*, Phys. Rev. Lett. **88**, 160401 (2002).
- [97] K. Günter, T. Stöferle, H. Moritz, M. Köhl, and T. Esslinger, Phys. Rev. Lett. **96**, 180402 (2006).
- [98] C. Ospelkaus, S. Ospelkaus, K. Sengstock, and K. Bongs, Phys. Rev. Lett. **96**, 020401 (2006).
- [99] S. Ospelkaus *et al.*, Phys. Rev. Lett. **96**, 180403 (2006).
- [100] F. Ferlaino, E. de Mirandes, G. Roati, G. Modugno, and M. Inguscio, Phys. Rev. Lett. **92**, 140405 (2004).
- [101] T. Best *et al.*, Phys. Rev. Lett. **102**, 030408 (2009).
- [102] M. A. Cazalilla, A. F. Ho, and T. Giamarchi, New Journal of Physics **8**, 158 (2006).

- 
- [103] M. Olshanii, Phys. Rev. Lett. **81**, 938 (1998).
- [104] J. Voit and H. J. Schulz, Phys. Rev. B **34**, 7429 (1986).
- [105] J. Voit and H. J. Schulz, Phys. Rev. B **36**, 968 (1987).
- [106] J. Voit and H. J. Schulz, Phys. Rev. B **37**, 10068 (1988).
- [107] L. Pollet, C. Kollath, U. Schollwöck, and M. Troyer, Phys. Rev. A **77**, 023608 (2008).
- [108] E. Burovski, G. Orso, and T. Jolicoeur, Phys. Rev. Lett. **103**, 215301 (2009).
- [109] G. Orso, E. Burovski, and T. Jolicoeur, Phys. Rev. Lett. **104**, 065301 (2010).
- [110] G. Roux, E. Burovski, and T. Jolicoeur, Phys. Rev. A **83**, 053618 (2011).
- [111] T. Roscilde, C. Degli Esposti Boschi, and M. Dalmonte, arXiv :1105.1314 .
- [112] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan, Phys. Rev. Lett. **42**, 673 (1979).
- [113] N. F. Mott, J. Non-Crystal. Solids **1**, 1 (1968).
- [114] N. F. Mott, Rev. Mod. Phys. **40**, 677 (1968).
- [115] B. Sacepe *et al.*, Nat Phys **7**, 239 (2011).
- [116] A. Bezryadin, C. N. Lau, and M. Tinkham, Nature **404**, 971 (2000).
- [117] M. P. A. Fisher, Phys. Rev. Lett. **65**, 923 (1990).
- [118] A. M. Finkel'stein, JETP Lett. **45**, 46 (1987).
- [119] M. White *et al.*, Phys. Rev. Lett. **102**, 055301 (2009).
- [120] L. Fallani, J. E. Lye, V. Guarrera, C. Fort, and M. Inguscio, Phys. Rev. Lett. **98**, 130404 (2007).
- [121] A. Sanpera, A. Kantian, L. Sanchez-Palencia, J. Zakrzewski, and M. Lewenstein, Phys. Rev. Lett. **93**, 040401 (2004).
- [122] V. Ahufinger, L. Sanchez-Palencia, A. Kantian, A. Sanpera, and M. Lewenstein, Phys. Rev. A **72**, 063616 (2005).
- [123] M. Kohl, H. Moritz, T. Stoferle, C. Schori, and T. Esslinger, Journal of Low Temperature Physics **138**, 635 (2005), 10.1007/s10909-005-2273-4.
- [124] Y. Suzumura and H. Fukuyama, Journal of the Physical Society of Japan **52**, 2870 (1983).
- [125] Y. Imry and S.-k. Ma, Phys. Rev. Lett. **35**, 1399 (1975).
- [126] S.-k. Ma, Rev. Mod. Phys. **45**, 589 (1973).
- [127] M. Mézard, G. Parisi, and M. A. Virasoro, *Spin Glass Theory and Beyond* (World Scientific, Singapore, 1987).
- [128] Marc Mézard and Giorgio Parisi, J. Phys. I France **1**, 809 (1991).
- [129] J. F. Sherson *et al.*, Nature **467**, 68 (2010).

- [130] E. Altman, E. Demler, and M. D. Lukin, Phys. Rev. A **70**, 013603 (2004).
- [131] M. Olshanii and V. Dunjko, Phys. Rev. Lett. **91**, 090401 (2003).
- [132] N. Fabbri, D. Clément, L. Fallani, C. Fort, and M. Inguscio, Phys. Rev. A **83**, 031604 (2011).
- [133] M. Azzouz, L. Chen, and S. Moukouri, Phys. Rev. B **50**, 6233 (1994).
- [134] X. Dai and Z.-b. Su, Phys. Rev. B **57**, 964 (1998).
- [135] H. Horii and S. Yamamoto, Journal of the Physical Society of Japan **73**, 549 (2004).
- [136] F. Mila, Eur. Phys. J. B **6**, 201 (1998).
- [137] K. Totsuka, Phys. Rev. B **57**, 3454 (1998).
- [138] A. Messiah, *Quantum Mechanics Volume II* (Elsevier Science B.V., 1961).
- [139] K. P. Schmidt, J. Dorier, A. M. Läuchli, and F. Mila, Phys. Rev. Lett. **100**, 090401 (2008).
- [140] J. Picon *et al.*, Phys. Rev. B **78**, 184418 (2008).
- [141] A. Fabricio Albuquerque, N. Laflorencie, J. Picon, and F. Mila, (2010).
- [142] E. H. Kim and J. Sólyom, Phys. Rev. B **60**, 15230 (1999).
- [143] P. Donohue and T. Giamarchi, Phys. Rev. B **63**, 180508 (2001).
- [144] T. Matsubara and H. Matsuda, Prog. Theoret. Phys. **16**, 569 (1956).
- [145] T. Barnes, E. Dagotto, J. Riera, and E. S. Swanson, Phys. Rev. B **47**, 3196 (1993).
- [146] S. P. Strong and A. J. Millis, Phys. Rev. Lett. **69**, 2419 (1992).
- [147] A. W. Sandvik and J. Kurkijärvi, Phys. Rev. B **43**, 5950 (1991).
- [148] A. W. Sandvik, Phys. Rev. B **59**, 14157 (1999).
- [149] O. F. Syljuåsen and A. W. Sandvik, Phys. Rev. E **66**, 046701 (2002).
- [150] N. Byers and C. N. Yang, Phys. Rev. Lett. **7**, 46 (1961).
- [151] B. S. Shastry and B. Sutherland, Phys. Rev. Lett. **65**, 243 (1990).
- [152] M. Greven, R. J. Birgeneau, and U. J. Wiese, Phys. Rev. Lett. **77**, 1865 (1996).
- [153] T. Hikihara and A. Furusaki, Phys. Rev. B **63**, 134438 (2001).
- [154] G. I. Japaridze and A. Nersisyan, JETP Lett. **27**, 334 (1978).
- [155] H. J. Schulz, Phys. Rev. B **22**, 5274 (1980).
- [156] T. Giamarchi, Phys. Rev. B **44**, 2905 (1991).
- [157] A. J. Leggett, Journal of Statistical Physics **93**, 927 (1998).
- [158] M. A. Cazalilla, Phys. Rev. A **70**, 041604 (2004).
- [159] T. Giamarchi and H. J. Schulz, EPL **3**, 1287 (1987).

- [160] J. Carrasquilla, F. Becca, and M. Fabrizio, Phys. Rev. B **83**, 245101 (2011).
- [161] E. Altman, Y. Kafri, A. Polkovnikov, and G. Refael, Phys. Rev. B **81**, 174528 (2010).
- [162] J. Sebby-Strabley, M. Anderlini, P. S. Jessen, and J. V. Porto, Phys. Rev. A **73**, 033605 (2006).
- [163] P. J. Lee *et al.*, Phys. Rev. Lett **99**, 020402 (2007).
- [164] W. S. Bakr *et al.*, Science **329**, 547 (2010).
- [165] R. Rajaraman, *Solitons and instantons : an introduction to solitons and instantons in quantum field theory* North-Holland personal library (North-Holland, 1987).
- [166] A. Gogolin, A. Nersesyan, and A. Tsvelik, *Bosonization and strongly correlated systems* (Cambridge University Press, 2004).
- [167] R. Feynman, *Statistical mechanics : a set of lectures* Advanced book classics (Westview Press, 1998).
- [168] A. Georges, O. Parcollet, and S. Sachdev, Phys. Rev. B **63**, 134406 (2001).

