

**ORSAY**

n° d'ordre : 5808

**UNIVERSITE DE PARIS-SUD**

**CENTRE D'ORSAY**

**THESE**

**Présentée**

**Pour obtenir**

**Le grade de DOCTEUR EN SCIENCE**

**Spécialité Physique des Solides**

Par

**Yves NOAT**

**SUJET: Réponse électrique et magnétique de systèmes  
mésoscopiques isolés**

Soutenue le 7 juillet 1999 devant la Commission d'examen :

MM.	L. Levy	Rapporteur
	Y. Gefen	Rapporteur
	M. Héritier	
	D. Mailly	
	B. Reulet	
	H. Bouchiat	



# Remerciements

*Cette thèse n'est pas uniquement le résultat d'un effort individuel mais aussi le fruit d'un véritable travail d'équipe avec Hélène Bouchiat et Bertrand Reulet. Quelques mots ne peuvent suffire pour les remercier pour tout le temps et l'énergie qu'ils m'ont consacrés. Je leur suis profondément reconnaissant de m'avoir fait partager cette vie d'équipe pendant trois années, et de m'avoir si bien transmis le goût de la recherche. Je souhaite sincèrement que le futur nous donnera à nouveau l'opportunité de collaborer ensemble.*

*A la fin de mon année de DEA, j'ai été largement guidé dans mon choix de la thèse par Monsieur M. Héritier. Je lui suis profondément reconnaissant pour ses conseils. De plus, je le remercie sincèrement d'avoir accepté d'être membre du Jury.*

*Je suis très reconnaissant à Messieurs L. Levy et Y. Gefen d'avoir accepté la tâche difficile de rapporteurs, ainsi qu'à Monsieur D. Mailly d'avoir accepté d'être membre du jury. Leurs nombreuses remarques et critiques m'ont permis d'entrevoir certains des points faibles de ce travail, et par la suite d'approfondir et améliorer le manuscrit par rapport à sa toute première version.*

*J'ai effectué au milieu de ma thèse un long séjour à l'Institut de Technologie Technion à Haifa, dans l'équipe d'Uri Sivan. Je le remercie sincèrement de m'avoir fait découvrir le monde de la nanofabrication, ainsi que pour tous les efforts qu'il n'a cessé de fournir afin que ce séjour en Israël me soit agréable et enrichissant.*

*Je suis très reconnaissant envers Monsieur Henri Alloul de m'avoir accueilli dans son groupe dont je remercie tous les membres pour les nombreux "coups de mains", presque quotidiens, donnés tout au long de la thèse.*

*Les problèmes cryogéniques que nous avons connus n'auraient pu être résolus sans la compétence et la tenacité de Monsieur Marc Nardonne, que je remercie chaleureusement.*

*Je remercie tous les membres de l'atelier aile nord, qui ont réalisé avec ingéniosité et minutie de nombreuses pièces essentielles à notre expérience.*

*Je remercie également tous les membres de l'administration pour leur aide efficace en maintes circonstances et leur contribution active à la bonne humeur au sein du laboratoire, en particulier J. Houeix, A. Warnet ainsi que Madame Dufour qui a effectué avec patience et gentillesse le tirage de cette thèse.*

*Ce travail a largement bénéficié de nombreuses discussions scientifiques intéressantes avec entre autres Michaël Pascaud, Richard Deblock, Gilles Montambaux, Frédéric Piéchon, Eric Akkermans, Denis Ullmo, Benoit Douçot.*

*Merci à Frédéric, Julien, Richard, Andrew pour leur aide au moment de préparer la soutenance. Merci encore à Catherine, Julien, Michaël et Richard pour les sympathiques pauses thé*

*passées ensemble.*

*Enfin, je remercie Béatrice pour son précieux soutien tout au long de la thèse.*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Qu'est-ce que la physique mésoscopique?</b>	<b>11</b>
1.1	Généralités . . . . .	11
1.1.1	De l'atome à $10^{23}$ particules . . . . .	11
1.1.2	Interférences électroniques . . . . .	12
1.1.3	Comment agir sur la phase électronique? . . . . .	13
1.1.4	Transport électronique dans les solides . . . . .	16
1.1.5	Cohérence de phase . . . . .	20
1.2	Problématique . . . . .	22
1.2.1	Les conductances d'un système mésoscopique . . . . .	22
1.2.2	Signatures de la cohérence de phase . . . . .	26
1.2.3	Du système connecté au système isolé . . . . .	36
1.2.4	Conclusion de l'introduction . . . . .	38
<b>2</b>	<b>Polarisabilité d'un système mésoscopique</b>	<b>41</b>
2.1	Qu'est ce que la polarisabilité? . . . . .	41
2.1.1	Définition et motivations . . . . .	41
2.1.2	Polarisabilité classique . . . . .	42
2.2	Polarisabilité quantique d'électrons sans interactions . . . . .	46
2.2.1	Position du problème . . . . .	46
2.2.2	Exemple: Cube "propre" . . . . .	47
2.3	Expression générale . . . . .	47
2.4	L'approximation de Thomas-Fermi . . . . .	49
2.4.1	Exemple: Approximation de Thomas-Fermi dans une plaque infinie . . . . .	50
2.5	Au delà de Thomas-Fermi . . . . .	51
2.6	Expression quantique de la polarisabilité . . . . .	52
2.6.1	Potentiel dépendant du temps . . . . .	52
2.7	Calcul de la correction quantique à la polarisabilité dans les différents régimes . . . . .	53
2.7.1	Discussion sur la dépendance en flux des éléments de matrice et du dénominateur d'énergie . . . . .	53
2.7.2	Ensemble Canonique . . . . .	56
2.7.3	Correction par les interactions dans l'ensemble canonique . . . . .	64
2.7.4	Discussion sur l'approximation de réponse linéaire . . . . .	65
2.8	Résumé des résultats . . . . .	66

<b>3</b>	<b>Dissipation électrique et magnétique</b>	<b>67</b>
3.1	Comment mesurer la conductance d'un système? . . . . .	67
3.1.1	Système connecté . . . . .	67
3.1.2	Système isolé . . . . .	68
3.1.3	Résultat classique . . . . .	70
3.1.4	Exploration des différents ensemble statistiques . . . . .	72
3.2	Calcul quantique de la susceptibilité . . . . .	73
3.2.1	Susceptibilité magnétique . . . . .	73
3.2.2	Susceptibilité électrique . . . . .	75
3.2.3	Ecriture générale . . . . .	75
3.2.4	Susceptibilité classique . . . . .	75
3.2.5	Correction quantique à la susceptibilité . . . . .	75
3.2.6	Comparaison entre la réponse électrique et magnétique . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Nanofabrication</b>	<b>79</b>
4.1	Notions élémentaires sur le GaAs . . . . .	79
4.1.1	Hétérojonctions . . . . .	81
4.2	Exemple de fabrication submicronique: Transistors à effet de champ en GaAs . . . . .	82
4.2.1	Qu'est-ce qu'un transistor à effet de champ? . . . . .	82
4.2.2	Fabrication des transistors . . . . .	87
4.2.3	Procédé de fabrication du transistor . . . . .	89
4.2.4	Fabrication de la Grille par lithographie électronique . . . . .	99
4.3	Fabrication d'un réseau de systèmes mésoscopiques isolés . . . . .	102
4.3.1	Gaz d'électrons bidimensionnel . . . . .	102
4.3.2	Fabrication . . . . .	103
<b>5</b>	<b>Méthode de mesure de la susceptibilité électrique ou magnétique d'un système isolé</b>	<b>105</b>
5.1	Introduction . . . . .	105
5.2	Principe de la mesure . . . . .	106
5.3	Choix du résonateur . . . . .	107
5.3.1	Description des contraintes . . . . .	107
5.3.2	Le résonateur: Une ligne bifilaire supraconductrice . . . . .	107
5.3.3	Montage de l'échantillon . . . . .	109
5.4	Rappel sur les circuits électriques résonants . . . . .	110
5.4.1	Cas idéal d'un générateur parfait . . . . .	110
5.4.2	Cas réel: Importance du couplage entre générateur et résonateur . . . . .	111
5.5	Couplage avec les échantillons . . . . .	112
5.5.1	Couplage magnétique . . . . .	113
5.5.2	Couplage électrique . . . . .	114
5.6	Calcul des coefficients de couplage entre la ligne et l'échantillon . . . . .	116
5.6.1	Coefficient d'induction mutuelle . . . . .	116
5.6.2	Couplage électrique . . . . .	117

5.6.3	Couplage magnétique et électrique . . . . .	119
5.7	Principe de la mesure du facteur de qualité et de la fréquence de résonance . . .	119
5.7.1	Rappel sur les lignes de transmission . . . . .	119
5.7.2	Mesure de la puissance réfléchie . . . . .	120
5.7.3	Asservissement du générateur sur la fréquence de résonance . . . . .	121
5.7.4	Mesure du facteur de qualité . . . . .	125
5.7.5	Mesure en fonction du champ magnétique . . . . .	126
5.7.6	Modulation du champ magnétique . . . . .	128
5.7.7	Dépendances en température . . . . .	129
5.7.8	Description du dispositif de refroidissement . . . . .	130
5.7.9	Le réfrigérateur à dilution . . . . .	130
<b>6</b>	<b>Susceptibilité de carrés et d'anneaux mésoscopiques isolés</b>	<b>133</b>
6.1	Motivation . . . . .	133
6.2	Caractérisation des échantillons . . . . .	134
6.2.1	Résistance d'un fil . . . . .	134
6.2.2	Anneau Aharonov-Bohm . . . . .	135
6.2.3	Résistance d'une grille . . . . .	137
6.3	Mesures sur des systèmes isolés . . . . .	137
6.3.1	Echantillons . . . . .	137
6.3.2	Description des résultats . . . . .	139
6.3.3	Comparaison avec les prédictions théoriques . . . . .	151
<b>7</b>	<b>Mesure de la magnétopolarisabilité à haute fréquence</b>	<b>155</b>
7.1	Motivation . . . . .	155
7.2	Principe de la mesure . . . . .	155
7.3	Effet de l'éclairement sur la résistance d'un anneau connecté . . . . .	157
7.4	Description des mesures . . . . .	158
7.4.1	Discussion sur l'ensemble statistique . . . . .	163
<b>A</b>	<b>Modèle d'Anderson</b>	<b>171</b>
<b>B</b>	<b>Effet d'un potentiel sur la phase</b>	<b>173</b>
<b>C</b>	<b>Grille en forme de T</b>	<b>175</b>
C.1	Motivation . . . . .	175
C.2	Procédé . . . . .	175
<b>D</b>	<b>Circuit <math>R,L,C</math> résonant</b>	<b>179</b>
<b>E</b>	<b>Fabrication de la ligne bifilaire</b>	<b>181</b>





# Introduction

Les interférences électroniques sont la signature de la nature quantique et ondulatoire des électrons. Celle-ci se manifeste dans le vide, mais également dans les solides sur une échelle caractéristique  $L_\phi$  qu'on nomme *longueur de cohérence de phase électronique*.  $L_\phi$  est limitée par les processus inélastiques (collisions électron-phonon, électron-électron), et plus généralement par ceux donnant lieu à un changement d'état du réservoir thermodynamique auquel est couplé l'échantillon (environnement). La longueur de cohérence de phase est typiquement de l'ordre du micron à  $T \sim 100mK$ . Grâce aux progrès de l'instrumentation en physique expérimentale, l'étude de ce domaine est de nos jours possible. La découverte du cryostat à dilution dans les années 60 a ouvert l'accès au monde des très basse température<sup>1</sup>. Par ailleurs, les techniques récentes de croissance et de nanolithographie, qui ne cessent de se développer et de s'améliorer, permettent aujourd'hui de réaliser des structures semiconductrices ou métalliques de très petite taille, micronique et submicronique.

La cohérence de phase donne lieu à de nombreux effets, parfois surprenants. Dans un anneau mésoscopique traversé par un flux magnétique, il existe un courant non-dissipatif dont la période est égale au quantum de flux  $\phi_0 = \frac{h}{e}$ . Par ailleurs, la résistance d'un même anneau connecté à des fils de mesure oscille en fonction du flux magnétique avec la même période. L'amplitude de ces oscillations est néanmoins très petite devant la conductance classique.

Les effets de cohérence dépendent de la façon dont le système est couplé aux appareils de mesure. En raison du fort couplage entre les réservoirs et le système proprement dit, les effets quantiques dans les systèmes connectés sont toujours petits en comparaison des effets classiques, typiquement de l'ordre de  $\frac{1}{g}$ , où  $g$  est la conductance adimensionnée<sup>2</sup>. Par ailleurs de tels systèmes ont un spectre des niveaux d'énergie continu, en raison du caractère infini des fils de mesure auxquels ils sont connectés.

Alors que de nombreux travaux expérimentaux ont été consacrés aux propriétés de transport des systèmes mésoscopiques ouverts, les systèmes isolés ont été l'objet de peu d'études. Contrairement aux systèmes ouverts, le couplage avec l'environnement dans les systèmes électriquement isolés peut être beaucoup plus faible, permettant ainsi d'explorer la limite du spectre discret. La conductance d'un système isolé représente la réponse en courant à une onde électromagnétique. Sa partie dissipative est une mesure de l'absorption du système. Le rapport entre l'élargissement des niveaux et l'écartement entre les niveaux  $\frac{\gamma}{\Delta}$ , joue un grand rôle. La conductance d'un système électriquement isolé est qualitativement et quantitativement très différente du cas

---

1. Les meilleurs cryostats à dilution permettent de refroidir des échantillons jusqu'à  $1mK$ .

2. La conductance adimensionnée est définie par  $g = \frac{G}{e^2/h}$ , où  $G$  est la conductance du système.

connecté. L'amplitude des oscillations de conductance est parfois du même ordre de grandeur que la conductance de Drude.

La première partie de ce travail est une étude théorique de la réponse d'un système mésoscopique à un champ électrique (polarisabilité électrique), qui n'avait pas été étudiée auparavant. La polarisabilité d'un conducteur classique est principalement déterminée par sa géométrie. Qu'en est-il pour un système quantiquement cohérent? Existe-il un effet de cohérence quantique à la polarisabilité d'un système mésoscopique?

Le chapitre suivant porte sur la réponse dissipative à un champ électrique alternatif. Tout corps conducteur placé dans un champ électrique alternatif dissipe de l'énergie. Que vaut cette dissipation pour un échantillon mésoscopique? Dans cette partie, nous comparons également la dissipation électrique et la dissipation magnétique.

Suit la partie expérimentale de la thèse. La principale difficulté de la mesure sur des systèmes mésoscopiques isolés tient dans la petitesse des signaux. Il faut donc une technique de mesure adaptée, dotée d'une très grande sensibilité. La méthode expérimentale qui nous permet de mesurer la réponse AC d'un échantillon fait l'objet du chapitre 5. L'échantillon étudié est couplé à un résonateur électromagnétique supraconducteur, dont les caractéristiques sont modifiées par la présence de l'échantillon.

La fabrication d'échantillons mésoscopiques fait appel à des techniques modernes de croissance et de nanolithographie. Je décris dans le chapitre 4 un exemple de nanofabrication dans les semiconducteurs: celui de transistors hautes fréquences en GaAs réalisés à l'Institut Technion de Haifa. La technique de fabrication de nos échantillons par D. Mailly est également évoquée. Nous présentons ensuite des résultats expérimentaux sur la mesure de la susceptibilité d'anneaux diffusif et de carrés ballistiques semiconducteurs. Pour ces derniers échantillons, il a été possible de varier continuellement le nombre d'électrons dans les carrés à l'aide d'une diode électroluminescente. Des changements de signe de la magnétoconductance se produisent en fonction de la densité électronique et de la fréquence. Nous proposons une interprétation de ces résultats en terme de statistique de niveaux.

Enfin, sont exposés les résultats de la mesure de la polarisabilité AC par une technique résonante. Nous montrons qu'ils sont en bon accord avec nos prédictions théoriques.

# Chapitre 1

## Qu'est-ce que la physique mésoscopique?

### 1.1 Généralités

#### 1.1.1 De l'atome à $10^{23}$ particules

Les propriétés d'un "corps solide" dépendent beaucoup de sa taille, et donc du nombre d'atomes  $N$  qui le constituent. Deux limites sont en particulier bien connues: celle de l'atome ou de la molécule, et celle du solide "macroscopique". Les propriétés d'un atome sont principalement régies par la physique quantique. La nature ondulatoire des électrons est alors prédominante. Le spectre d'énergie d'un atome strictement isolé est discret. La séparation entre deux niveaux d'énergie adjacents,  $\Delta_n = E_{n+1} - E_n$ , dépend dans la plupart des cas du niveau  $n$  considéré. En réalité, l'atome n'est jamais complètement isolé, mais est situé dans un certain environnement. Si le couplage entre l'atome et son environnement est fort, les fonctions d'onde atomiques ainsi que les énergies qui leur sont associées sont complètement modifiées. En cas de couplage faible, elles restent avec une bonne approximation fonction propre du système. Dans ce cas, le couplage a pour effet d'élargir les niveaux excités, qui acquièrent ainsi des temps de vie finis  $\tau_n \sim \frac{1}{\gamma_n}$ . La plupart des propriétés calculées en physique du solide concernent la limite opposée pour laquelle le nombre d'atomes dans le système est très grand devant 1. C'est ce qu'on appelle la "limite thermodynamique". Celle-ci est atteinte lorsque la taille du système est très supérieure à une longueur caractéristique, généralement microscopique. Un grand nombre des propriétés d'un solide macroscopique, comme la conductivité électrique ou thermique, peuvent être comprises en terme classiques<sup>1</sup>. En effet, la nature ondulatoire des électrons ne se manifeste que sur des longueurs très courtes. Dans un métal à température ambiante, les électrons gardent une phase déterminée sur quelques dizaines d'angström seulement. Les interférences quantiques ne sont donc pas observables dans un échantillon de taille macroscopique, à température ordinaire. Les techniques de mesure à très basse température associées aux méthodes modernes de fabrication d'échantillons ont (depuis les années 60-70) progressivement donné aux physiciens expérimentateurs la possibilité d'explorer une tout autre limite. Il s'agit d'un régime intermédiaire de transition entre le régime microscopique et le régime macroscopique, pour lequel la

---

1. Il existe toutefois des propriétés à l'échelle macroscopique qui ne peuvent être décrites en terme classique. C'est le cas par exemple de la supraconductivité.

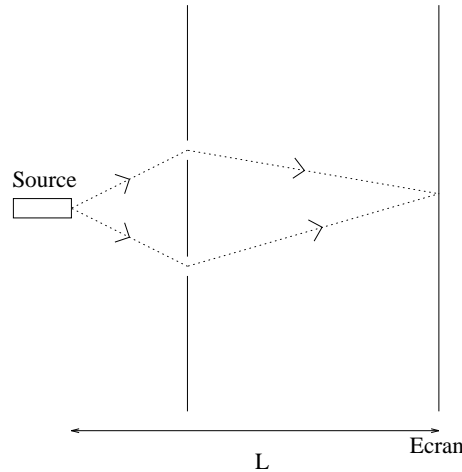


FIG. 1.1 – Schéma de principe de l'expérience des trous d'Young.

taille de l'échantillon est inférieure à la longueur de cohérence des électrons<sup>2</sup>. Ce régime est dénommé mésoscopique (pour une revue de ce domaine, voir [1, 2]) du grec “meso”, signifiant en grec “milieu”. Ce régime constitue le pont qui joint les deux limites.

Grâce à la lithographie électronique associée à la lithographie optique, des îlots de quelques centaines d'électrons (voire moins) sont de nos jours réalisés. Ceux-ci sont de véritables molécules artificielles avec un spectre d'énergie discret.

Se pose alors le problème de la mesure de tels objets. Celle-ci implique toujours un couplage entre le système et un réservoir, de taille infini. Suivant la force et la nature du couplage, les états du système sont plus ou moins fortement modifiés. Nous verrons par la suite que dans le régime mésoscopique, la façon dont la mesure est réalisée détermine donc la grandeur mesurée.

### 1.1.2 Interférences électroniques

Les électrons, tout comme les photons, sont susceptibles de donner lieu à des interférences. Il est ainsi possible de reproduire avec des électrons dans le vide la célèbre expérience des trous d'Young, réalisée à l'origine avec de la lumière [3, 4].

Une source produit un flux d'électrons en direction d'une plaque percée de deux trous (fig. 1.1). Les électrons sont comptés en chaque point d'un plan, situé à une distance  $L$  de la source et l'intensité du signal  $I$  en un point donné  $r$  est proportionnel au carré de l'amplitude de la fonction d'onde en ce point:

$$I = n|\Psi(\mathbf{r})|^2 \quad (1.1)$$

où  $n$  est le nombre d'électrons par seconde, emis par la source. La fonction d'onde électronique est une somme des amplitudes de probabilité associée á chaque chemin.

$$\Psi = \psi_1 + \psi_2 \quad (1.2)$$

---

2. i.e la longueur maximale pour laquelle il est possible d'observer des interférences électroniques.

L'intensité comporte un terme d'interférence qui dépend de la différence de phase  $\Delta\phi = k\Delta r$  entre les deux chemins respectifs, où  $k$  est le module du vecteur d'onde des électrons et  $\Delta r$  est la différence de chemin entre les deux trajets

$$|\Psi|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + 2\Re[\psi_1^*\psi_2] \quad (1.3)$$

En notant  $\psi_l = |\psi_l| \exp(i\varphi_l)$ , où  $l = 1, 2$ , le terme d'interférence peut s'écrire:

$$I_Q = 2|\psi_1||\psi_2| \cos[(\varphi_1 - \varphi_2)] \quad (1.4)$$

Ce terme est responsable des oscillations d'intensité observés.

L'interaction entre l'électron et son "environnement" sur l'un des deux trajets peut donner lieu à un facteur de phase aléatoire additionnel  $\delta\phi_a$ . Comme chaque électron du faisceau accumule un facteur de phase différent, l'intensité mesurée par le détecteur est une moyenne sur cette phase aléatoire.

$$I_Q = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{N(T)} |\Psi_1^i| |\Psi_2^i| \cos(\Delta\phi + \delta\phi_a^i) \quad (1.5)$$

où  $T$  est un intervalle de temps, suffisamment grand pour moyenniser les fluctuations temporelles de  $I_Q$ , et  $N(T)$  le nombre d'électrons atteignant l'écran pendant cette période.

En cas de couplage fort entre l'électron et son environnement, l'incertitude sur la phase devient trop grande et provoque une disparition des interférences. Cela se produit typiquement quand  $\delta\phi_a \approx 2\pi$ . La distance entre la source et le détecteur au delà de laquelle les interférences disparaissent caractérise la *cohérence de phase électronique*.

### 1.1.3 Comment agir sur la phase électronique?

L'observation d'interférences électroniques dans un solide nécessite un moyen d'agir sur la phase de la fonction d'onde électronique. Les potentiels électrique et magnétiques sont pour cela les outils idéaux.

En physique classique, les particules sont sensibles aux champs. Ainsi, une particule chargée est accélérée par un champ électrique et déviée par un champ magnétique. En physique quantique, les potentiels vecteurs interviennent également [5]. Nous allons voir de quelle manière dans le paragraphe suivant.

#### Déphasage par un potentiel électrique

Considérons tout d'abord un électron à l'intérieur d'une boîte métallique, décrite par un hamiltonien  $H_0 = \frac{\mathbf{P}^2}{2m}$ . L'ensemble des fonctions propres  $|\Psi\rangle$  de ce système satisfait l'équation de Schrödinger:

$$H_0|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle \quad (1.6)$$

On porte maintenant la boîte à un potentiel dépendant du temps  $V(t)$  (fig. 1.2). Le nouveau hamiltonien du système s'écrit alors  $H = H_0 + V(t)$ . Le potentiel uniforme n'affecte pas la

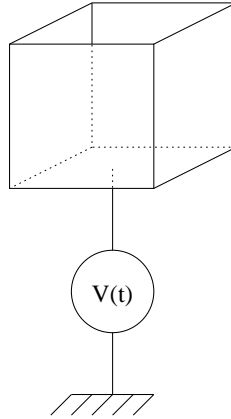


FIG. 1.2 – Boite métallique portée à un potentiel uniforme dépendant du temps.

densité de probabilité  $|\langle \mathbf{r} | \Psi \rangle|^2$ <sup>3</sup>. En revanche, les fonctions d'onde acquièrent un facteur de phase supplémentaire:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} \int V(t) dt} |\Psi_0\rangle \quad (1.7)$$

### Déphasage par un potentiel magnétique

Le hamiltonien d'une boite métallique, soumise à un potentiel magnétique  $\mathbf{A}$  tel que le champ magnétique  $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$  soit nul dans la boite est

$$H = \frac{(\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \quad (1.8)$$

où  $V(\mathbf{r})$  décrit le potentiel à l'intérieur de la boite. Tout comme le potentiel électrique, le potentiel magnétique déphase les fonctions d'onde électroniques. Au moyen d'un changement de jauge, l'équation de Schrödinger peut s'écrire en fonction du hamiltonien à champ nul  $H_0$ :

$$H_0 |\Psi_0\rangle = \epsilon_0 |\Psi_0\rangle \quad (1.9)$$

Les fonctions  $|\Psi_0\rangle$  s'expriment en fonction des vecteurs propres de  $H_0$ :

$$|\Psi\rangle = e^{\frac{ie}{\hbar} \int_{r_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{A} d\mathbf{r}} |\Psi_0\rangle \quad (1.10)$$

### Les expériences suggérées par Y. Aharonov et D. Bohm

Deux expériences ont été proposées par Y. Aharonov et D. Bohm destinées à mettre expérimentalement en évidence l'effet des potentiels électrique et magnétique sur la phase électronique.

– Effet Aharonov-Bohm électrostatique

---

3. Néanmoins, l'application d'un potentiel uniforme  $V$  modifie en principe le nombre d'électrons dans la boite. Celui-ci est relié à  $V$  par la relation:  $Q = CV$ , où  $C$  est la capacité propre de la boite.

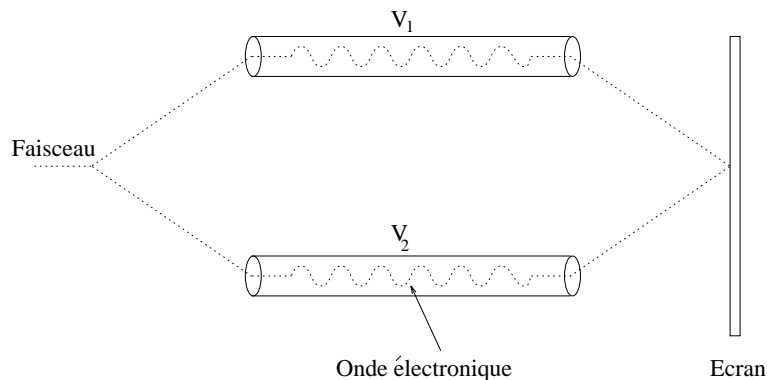


FIG. 1.3 – Schéma de principe de l'expérience proposée par Y. Aharonov et D. Bohm.

Le schéma de principe de l'expérience est présenté sur la figure 1.3. Une source émet des électrons auxquels se présentent deux trajectoire possibles. Chacune d'elles traverse un tube, porté à un potentiel constant, à l'intérieur duquel, en vertu du principe de la cage de Faraday, le champ électrique est nul. La phase accumulée sur chaque chemin  $i$  est:

$$\phi_i = \frac{e}{\hbar} \int_i V_i dt \quad (1.11)$$

Si les tubes sont portés à des potentiels différents, il existe alors une différence de phase  $\Delta\phi$  entre les deux trajets, proportionnel au temps de traversée du tube  $T$ :

$$\Delta\phi = \frac{e}{\hbar} (V_1 - V_2) T \quad (1.12)$$

Il en résulte que l'intensité du signal à la sortie des tubes est modulée en fonction de la différence de potentiel  $V_1 - V_2$ .

- La deuxième expérience est similaire mais les deux trajectoires enserrant cette fois-ci un flux magnétique  $\Phi$ , menant à un déphasage:

$$\Delta\phi = \frac{e}{\hbar} \int_1 \mathbf{A} d\mathbf{r} - \int_2 \mathbf{A} d\mathbf{r} \quad (1.13)$$

En vertu du théorème de Stokes, on a  $\oint \mathbf{A} d\mathbf{r} = \iint \nabla \wedge \mathbf{A} = \iint \mathbf{B} d\mathbf{S}$ . Par conséquent, la différence de phase se met sous la forme:

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (1.14)$$

où  $\Phi_0 = \frac{h}{e}$  est le quantum de flux.

Les effets Aharonov-Bohm magnétique [6] et électrostatique [7] ont tout deux été observés dans le vide. Est-il possible d'observer des interférences similaires dans un solide? Avant de répondre à cette question, nous allons rappeler comment s'effectue le transport électronique dans un solide.

### 1.1.4 Transport électronique dans les solides

#### Cristal parfait

Un solide est constitué d'atomes arrangés suivant un ordre périodique [8]. L'arrangement dépend bien entendu du solide considéré. Les atomes forment par exemple un réseau cubique à face centrée (exemple: Au, Cu, Ag, Al), ou encore cubique centré (Fe). Les propriétés de conduction électrique et thermique sont en grande partie déterminées par le remplissage des niveaux d'énergie de l'atome considéré quand il est isolé. A cause du principe de Pauli, interdisant à deux électrons d'être dans le même état quantique, les niveaux discrets de l'atome isolé deviennent dans un solide des bandes d'énergie électronique quasi-continues. A température nulle, les niveaux d'énergie sont remplis jusqu'à l'énergie de Fermi  $E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$ , où  $k_F$  est le vecteur d'onde de Fermi. Les solides avec une bande partiellement vide sont conducteurs. C'est le cas par exemple des métaux tels que le Cuivre, l'or ou l'argent. En effet, les électrons de valence, peu liés, peuvent se déplacer presque librement dans le cristal. Au contraire, les solides avec une bande pleine sont isolants ou semiconducteurs, suivant la largeur de la bande d'énergie interdite. La densité électronique dans les métaux est très élevée de l'ordre de  $10^{22} \text{cm}^{-3}$ . Dans les semiconducteurs, elle s'étend sur une large gamme  $10^{10} - 10^{19} \text{cm}^{-3}$ , et peut être contrôlée par l'intermédiaire du dopage ou à l'aide de grilles électrostatiques (voir chapitre 4). Dans un cristal parfait, les états propres du système sont les états de Bloch  $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ , qui satisfont la relation  $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{a}_i) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_i} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ , où  $a_i$  est un vecteur de Bravais, décrivant la périodicité du réseau cristallin.

#### Solide désordonné

En pratique, un solide est toujours plus ou moins désordonné, à cause de la présence de défauts tels que des atomes étrangers, des lacunes<sup>4</sup>, ou encore des déformations du réseau cristallin, telles que des dislocations. Le mouvement des électrons est modifié par rapport au cristal parfait. Les états de Bloch  $|\mathbf{k}\rangle$  ne sont plus des vecteurs propres du système. Un électron initialement dans un tel état est diffusé par les défauts, et acquiert un temps de vie  $\tau_{\mathbf{k}}$  [9][10], défini par l'échelle de décroissance de la fonction:

$$P(t) = \left| \langle \mathbf{k} | e^{\frac{iHt}{\hbar}} | \mathbf{k} \rangle \right|^2 \quad (1.15)$$

où  $H$  est le hamiltonien du système désordonné. Celle-ci représente la probabilité de retrouver l'électron dans le même état après un temps  $t$ . La connaissance de la probabilité  $P_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  d'une telle collision permet d'exprimer  $\tau_{\mathbf{k}}$ :

$$\frac{1}{\tau_{\mathbf{k}}} = \int d\mathbf{k}' P_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (1.16)$$

Dans la limite de faible désordre, la règle d'or de Fermi donne l'expression de  $P_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  en fonction du potentiel de diffusion des impuretés  $U(\mathbf{r})$ :

---

4. Atomes manquants dans le réseau cristallin.



$$P_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \mathbf{k} | U(r) | \mathbf{k}' \rangle|^2 \delta(\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}'}) \quad (1.17)$$

Pour un potentiel à très courte portée,  $U(r) = U \sum_i \delta(r - r_i)$ , le temps élastique est inversement proportionnel à la densité d'états par unité de volume de l'échantillon  $\nu$ <sup>5</sup>:

$$\frac{\hbar}{\tau_k} \sim U^2 n_i \nu \quad (1.18)$$

où  $n_i$  dénote le nombre d'impuretés par unité de volume dans le solide. La dépendance de  $\tau_k$  avec le vecteur d'onde  $k$  ou l'énergie électronique dépend de la dimension du système. Comme  $\nu \sim k^{d-2}$ , le temps élastique est indépendant de l'énergie en dimension deux.

La distance moyenne entre deux collisions est appelée le *libre parcours moyen élastique*  $l_e$ . Dans le cas général<sup>6</sup>, elle est toujours très supérieure à la distance moyenne entre impuretés  $d_i = \left(\frac{1}{n_i}\right)^{\frac{1}{3}}$ .  $l_e$  varie typiquement de quelques dizaines d'Angström dans les métaux, à quelques microns dans les semiconducteurs, dans lesquels il peut même atteindre plusieurs dizaines de microns dans certains échantillons.

**Faible désordre** A faible désordre, c'est à dire pour  $l_e \gg \lambda_F$ , le système est conducteur<sup>7</sup>. A des corrections quantiques près, dont nous parlerons ultérieurement (voir section 1.2.2), la conductance du système est égale à la conductance classique et dépend de la longueur du système et de sa dimension  $d$ .

$$G = C_d L^{d-2} \quad (1.19)$$

où  $C_d$  est une constante qui dépend de la dimension du système. Plusieurs régimes se distinguent suivant la valeur du libre parcours moyen élastique comparé à la taille de l'échantillon.

– Système ballistique:  $L \ll l_e$

Quand la taille de l'échantillon est très petite devant le libre parcours moyen élastique, un électron peut traverser l'échantillon sans subir de collisions avec des impuretés: C'est le régime *ballistique*. Il peut en revanche diffuser sur les bords de l'échantillon.

– Système Diffusif:  $L > l_e$

Si  $L$  est très grand devant  $l_e$ , une trajectoire électronique consiste en une marche aléatoire, caractéristique d'un processus de diffusion.  $\lambda_F^d$  représente, en dimension  $d$ , l'espace occupé par un électron. Plusieurs échelles de temps (ou d'énergie) peuvent être distinguées dans ce régime (fig. 1.4):

5. Un potentiel à portée finie tel qu'un potentiel écranté de la forme  $U(r) = \frac{1}{r} e^{-\frac{r}{r_s}}$  ne change pas ce résultat. En revanche, on néglige dans cette approche l'effet de l'écrantage du potentiel des impuretés par les électrons. Sa prise en compte mène à une dépendance de  $\tau_k$  avec la densité électronique.

6. Le libre parcours moyen élastique est de l'ordre de la distance entre impuretés  $d_i$ , dans le cas particulier pour lequel  $U \sim \sqrt{\frac{v_F \hbar}{\nu}}$ , où  $v_F$  est la vitesse électronique au niveau de Fermi, et  $\nu$  la densité d'états par unité de volume (ou de surface) de l'échantillon. A  $3d$  cette condition donne  $U \sim \frac{\hbar^2}{m} d_i$ .

7. Ce n'est en principe vrai que pour un échantillon tridimensionnel. A plus basse dimension, 1d et 2d, le système est localisé.

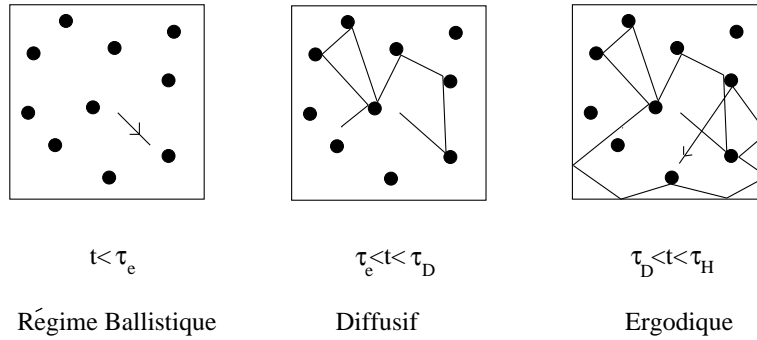


FIG. 1.4 – Les différentes échelles de temps dans un système diffusif.

–  $t < \tau$ : Régime ballistique

Pour un temps inférieur au temps de collision élastique, l'électron n'a pas encore subi de collision et son mouvement est donc ballistique.

–  $\tau < t < \tau_D$ : Régime diffusif

Au bout d'un temps  $\tau$ , l'électron commence à diffuser sur les impuretés du réseau, jusqu'au temps de diffusion  $\tau_D$ , qui est le temps typique de traversée de l'échantillon. A ce temps est associée l'échelle d'énergie de Thouless [12, 13], définie par:

$$E_c = \frac{\hbar}{\tau_D} = \frac{\hbar D}{L^2} \quad (1.20)$$

où  $D = \frac{v_F l_e}{d}$  est le coefficient de diffusion électronique, et  $d$  la dimension du système.

–  $\tau_D < t$ : Régime ergodique

Au delà du temps  $\tau_D$ , l'électron explore les bords de l'échantillon: c'est le régime ergodique<sup>8</sup>.

**Fort désordre: Régime localisé** A très fort désordre ( $l_e > \lambda_F$ ), un système tridimensionnel subit une *transition de phase quantique métal-isolant*. Les réflexions multiples des électrons sur le potentiel aléatoire conduisent à des interférences destructives, qui se traduisent par une décroissance exponentielle des fonctions d'onde sur une échelle  $\xi$ , appelée *longueur de localisation* [11][14].

$$\Psi(\mathbf{r}) \sim e^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{\xi}} \quad (1.21)$$

La transition, qui a été observée expérimentalement [15] est illustrée par la figure 1.5, sur laquelle est représentée le module au carré d'une fonction d'onde électronique à demi-remplissage, calculée pour un carré désordonné de côté  $L = 10$ , simulé par le modèle d'Anderson (appendice A), pour deux valeurs de désordre  $W$ . Pour  $W = 1$ , la fonction d'onde est délocalisée sur tout l'échantillon.  $|\Psi(x,y)|^2$  est pratiquement constant sur tout l'échantillon, et par conséquent est

<sup>8</sup>. On distingue parfois également le régime quantique, qui correspond au cas  $t > \tau_H = \frac{\hbar}{\Delta}$ . Dans ce régime l'électron ne peut plus être décrit en terme de trajectoires semi-classiques.

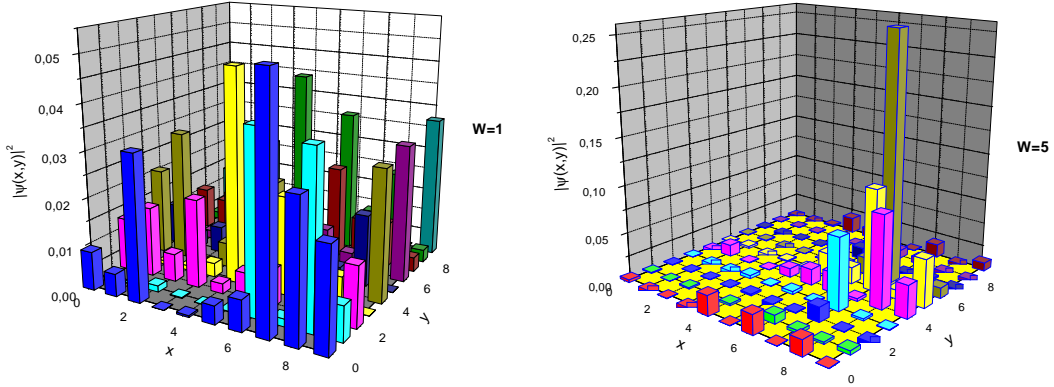


FIG. 1.5 – Fonction d'onde dans un système désordonné calculée à l'aide du modèle d'Anderson, dans un carré  $10 \times 10$ , pour  $W = 1$  et  $W = 5$ .

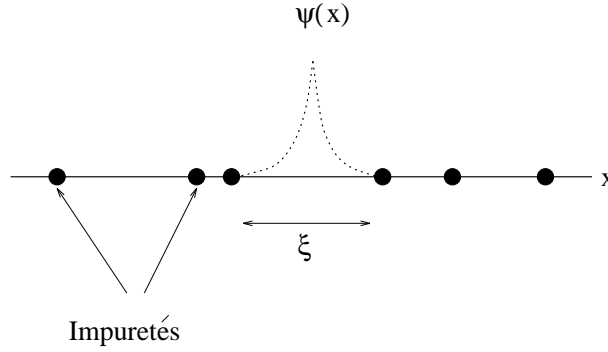


FIG. 1.6 – Localisation dans un système unidimensionnel: la longueur de localisation est égale au libre parcours moyen élastique.

de l'ordre de  $|\Psi|^2 \sim \frac{1}{L^2}$ . En revanche, pour  $W = 5$ , la fonction d'onde est localisée autour d'un point donné:  $|\Psi(x = 7, y = 6)|^2 \sim 0.25$ .

Dans le régime localisé, la conductance se comporte comme  $e^{-\frac{L}{\xi}}$ , de sorte que le système n'est rigoureusement un isolant que si sa longueur est plus grande que la longueur de localisation. Un système unidimensionnel est toujours localisé. De manière euristique, l'électron est piégé entre deux impuretés (fig. 1.6) et la longueur de localisation est simplement égale au libre parcours moyen élastique. Les différentes échelles de longueur qui interviennent dans le régime mésoscopiques sont résumées sur la figure 1.7. Des mesures récentes [16] ont peut être mis en lumière l'existence d'une transition à deux dimensions et mettraient ainsi en défaut la théorie d'échelle à un paramètre de la localisation [14]. La transition métal isolant n'a lieu que si le système est quantiquement cohérent, autrement dit si la taille de l'échantillon est inférieure à  $L_\phi$ . Nous allons maintenant voir les processus qui sont susceptible de détruire la cohérence électronique.



FIG. 1.7 – Les différentes échelles de longueur dans le régime mésoscopique.  $a_0$  est le rayon de Bohr,  $\lambda_F$  la longueur d’onde de Fermi,  $l_e$  le libre parcours moyen élastique,  $\xi$  la longueur de localisation,  $L$  la taille de l’échantillon.

### 1.1.5 Cohérence de phase

Les interférences électroniques résultent du caractère ondulatoire des électrons. L’existence de deux trajectoires électroniques possibles donne lieu à un terme d’inférence qui dépend de la différence de phase entre ces deux trajets. Cette manifestation de la nature quantique des électrons est observable à condition que cette différence de phase soit *reproductible*. Dans une mesure de transport, cela signifie qu’un électron injecté après un autre dans le même état quantique va suivre exactement la même trajectoire que l’électron précédent et accumuler une phase identique. Comme les impuretés sont statiques, elles préservent la cohérence de phase. L’énergie de l’électron est conservée (processus élastique). Dans l’approximation semi-classique, la phase accumulée le long d’un trajet déterminé  $i$  vaut [39]:

$$\varphi = \int_i \mathbf{k} d\mathbf{l} \quad (1.22)$$

En revanche, il existe d’autres processus qui affectent la cohérence de phase. Il s’agit en particulier des processus inélastiques, ou plus généralement qui induisent un changement d’état du réservoir [17] [18].

- Collisions avec les vibrations du réseaux cristallin (phonons) [20]
- Collisions électron-électron [21, 22, 24, 25]
- Collisions avec les impuretés magnétiques, avec renversement du spin de l’impureté. [23]

Les phonons, les impuretés magnétiques ou les autres électrons constituent l’environnement d’un électron. Celui-ci perturbe le système. En présence d’un couplage avec l’environnement, un état du système électronique  $|\Psi_0\rangle$  acquiert une durée de vie finie,  $\tau_\epsilon$ , qui dépend à priori de son énergie  $\epsilon$ .

$$\left| \langle \Psi_0 | e^{\frac{iHt}{\hbar}} | \Psi_0 \rangle \right|^2 \sim \exp\left(-\frac{t}{\tau_\epsilon}\right) \quad (1.23)$$

où  $H$  est le hamiltonien du système, couplé au réservoir thermodynamique. Par ailleurs, il induit une incertitude sur la phase de la fonction d’onde, qui est de l’ordre de  $2\pi$  au bout d’un temps caractéristique appelé *temps de cohérence de phase*. L’électron parcourt pendant le temps  $\tau_\phi$ , une distance  $L_\phi$ , appelé la longueur de cohérence de phase, qui représente l’échelle maximale sur laquelle il est possible d’observer des interférences électroniques. Celle-ci est simplement reliée à  $\tau_\phi$ :

$$L_\phi = \begin{cases} v_F \tau_\phi & \tau_\phi < \tau \\ \sqrt{D\tau\phi} & \tau_\phi > \tau \end{cases}$$

Un électron au niveau de Fermi perd la mémoire de sa phase lorsqu'il échange de l'énergie avec l'environnement. A température nulle, un tel échange ne peut avoir lieu et le temps de cohérence de phase est par conséquent infini.  $\tau_\phi$  diminue avec la température<sup>9</sup>. La décroissance dépend du processus considéré, et de la dimension du système. A basse température, la longueur de cohérence est essentiellement déterminée par les collisions électron-électron.

---

<sup>9</sup> Ces dépendances ont été vérifiées sur plusieurs systèmes. En particulier en dimension  $d = 1$ , pour laquelle  $\tau_\phi \sim T^{-2/3}$  a été l'objet de nombreux travaux dans des systèmes métalliques [26, 27, 28], ou semiconducteurs [29, 30].

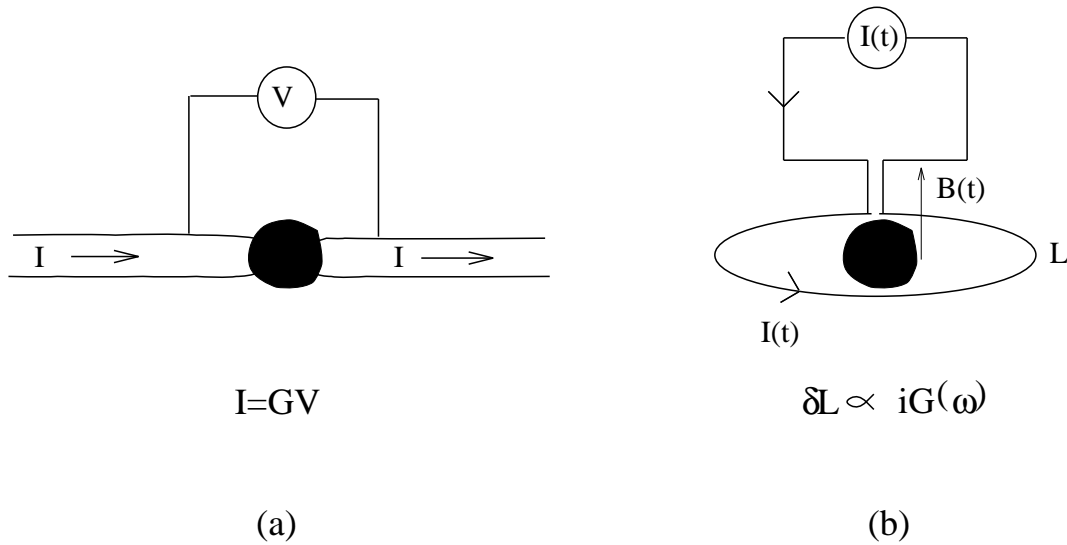


FIG. 1.8 – Deux types de mesure de la conductance: Conductance d'un système connecté (a). Conductance d'un système isolé (b).

## 1.2 Problématique

### 1.2.1 Les conductances d'un système mésoscopique

#### Existe-il plusieurs conductances?

Il existe plusieurs façons de mesurer la conductance d'un système. La méthode usuelle consiste à connecter le conducteur à des fils de mesure. Deux fils de part et d'autre de l'échantillon sont reliés à un voltmètre et à un générateur de courant (fig. 5.1 a). Par définition, la conductance relie le courant circulant dans l'échantillon à la différence de potentiel à ses bornes:

$$I = GV \quad (1.24)$$

La conductance du même échantillon s'obtient également au moyen d'une mesure par influence réalisée à fréquence finie. Le principe est de placer le conducteur au centre d'une boucle d'inductance (fig. 5.1 b), dans laquelle on fait circuler un courant alternatif. L'inductance est modifiée par la présence de l'échantillon, et acquiert une partie résistive reliée à sa conductance:

$$\frac{\delta L}{L} \propto \frac{G}{i\omega} \quad (1.25)$$

A la limite macroscopique, et à basse fréquence<sup>10</sup>, ces deux méthodes de mesure sont parfaitement équivalentes. Ce n'est pas toujours le cas pour un système mésoscopique, ou atomique. Prenons l'exemple d'une molécule de benzène ( $C_6H_6$ ), formée par un anneau de six atomes de Carbone (fig. 1.9). Celle-ci a des niveaux d'énergie discrets quand elle est isolée. Si on la connecte à des fils de mesure, ses états propres s'hybrident avec les états électroniques dans

<sup>10</sup>. Nous précisons ce point dans le chapitre 3.

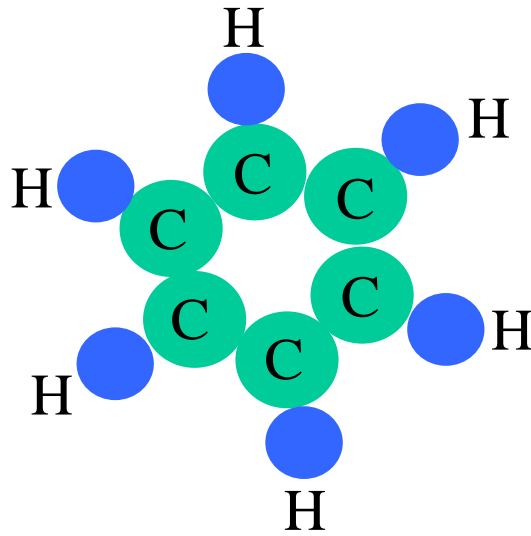


FIG. 1.9 – Schéma d'une molécule de Benzène.

les fils, donnant lieu à une conductance électrique non nulle. Par contre, à cause du caractère discret du spectre d'énergie, il n'y a pas de dissipation à basse fréquence dans le cas où la molécule est soumise à un champ électrique ou magnétique alternatif comme dans l'expérience d'induction décrite ci-dessus. En effet, pour une molécule isolée, une absorption d'énergie ne peut avoir lieu que si la fréquence est de l'ordre de l'écartement entre deux niveaux d'énergie. La conductance est donc strictement nulle à basse fréquence! Ces deux types de mesure sont traités dans deux formalismes différents que nous résumons dans la section suivante.

### Conductance d'un échantillon connecté

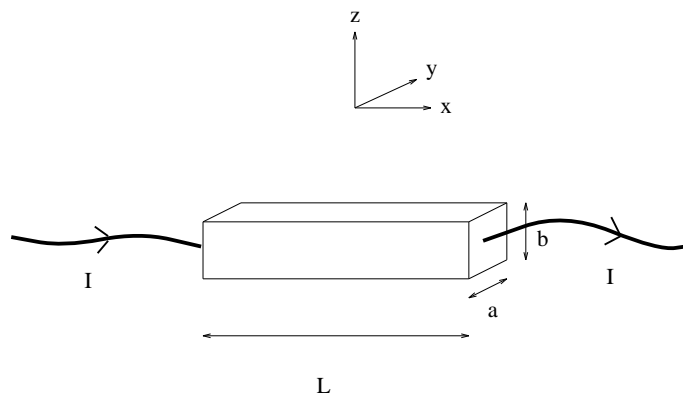


FIG. 1.10 – Conducteur de forme parallélépipédique connecté à des fils dans une mesure de conductance.

**Formule de Landauer** La conduction d'un échantillon connecté est directement relié à ses propriétés de transmission d'une onde électronique. Considérons par exemple un échantillon de forme parallélépipédique de longueur  $L$  et de cotés  $a$  et  $b$  (fig. 1.10). Tout comme dans un guide d'onde, seulement certains états sont permis. Les vecteurs d'onde sont de la forme:

$$\mathbf{k}_{\mathbf{n},\mathbf{m}} = \frac{n\pi}{a}\hat{\mathbf{y}} + \frac{m\pi}{b}\hat{\mathbf{z}} + k_x\hat{\mathbf{x}}$$

Le plus grand vecteur d'onde est par définition le vecteur d'onde de Fermi  $k_F$ . Ainsi le nombre de mode transverses, appelé aussi *nombre de canaux* pour un fil de section  $S$  vaut en tenant compte de la dégénérescence de spin:

$$M = \frac{2\pi S}{\lambda_F^2} \quad (1.26)$$

Pour un fil bidimensionnel de largeur  $W$ , le nombre de canaux a pour expression:  $M = \frac{4W}{\lambda_F}$ . Une onde électronique  $|\psi_i\rangle$  incidente sur l'échantillon est partiellement transmise et réfléchi. L'onde transmise peut s'écrire en fonction des coefficients de transmission de l'échantillon:  $|\psi_t\rangle = \sum_j t_{ij}|\psi_j\rangle$ . La formule de Landauer 2 fils [31] [32] exprime la conductance d'un système mésoscopique en fonction des coefficients  $t_{ij}$ <sup>11</sup>:

$$G = \frac{2e^2}{h} \text{Tr} (t^\dagger t) \quad (1.27)$$

Celle-ci ne dépend donc que des propriétés élastiques de l'échantillon. En particulier, pour un échantillon de conduction parfaite  $T = 1$ , la conductance est quantifiée en fonction de son nombre de canaux  $M$ , puisqu'alors  $G = M\frac{e^2}{h}$ . Cette quantification a été observée expérimentalement [33] dans un gaz bidimensionnel.

### Système isolé: Formule de Kubo

Contrairement au cas connecté, le couplage d'un système électriquement isolé avec son environnement peut être "faible". La source de décohérence provient à la fois du système lui-même (électrons, phonons), et du couplage avec l'extérieur. Un bruit électromagnétique est par exemple susceptible de perturber le système. Dans le cas d'un couplage faible, les états propres du système sont peu modifiés. L'effet de l'environnement peut être alors modélisé par l'existence d'un temps de vie fini  $\tau_\alpha = \frac{1}{\gamma}$ , associé à chaque état. La conductance d'un système isolé s'exprime dans ce cas en fonction des vecteurs propres  $|\alpha\rangle$  et des énergies propres  $\epsilon_\alpha$  du système: C'est la formule de Kubo [34, 35, 36].

$$G = \frac{e^2}{h} \sum_{\alpha,\beta} \frac{f_\alpha - f_\beta}{\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta} \frac{|\langle\alpha|\hat{\mathbf{J}}|\beta\rangle|^2}{\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta - \hbar\omega + i\gamma} \quad (1.28)$$

11. On notera  $t$  la matrice constituée des éléments  $t_{ij}$ . La formule de Landauer peut également s'exprimer en fonction des valeurs propres  $T_n$  de la matrice  $t^\dagger t$ :  $G = \frac{2e^2}{h} \sum_{i,j} t_{i,j}t_{i,j}^\dagger = \frac{2e^2}{h} \sum_n T_n$ .



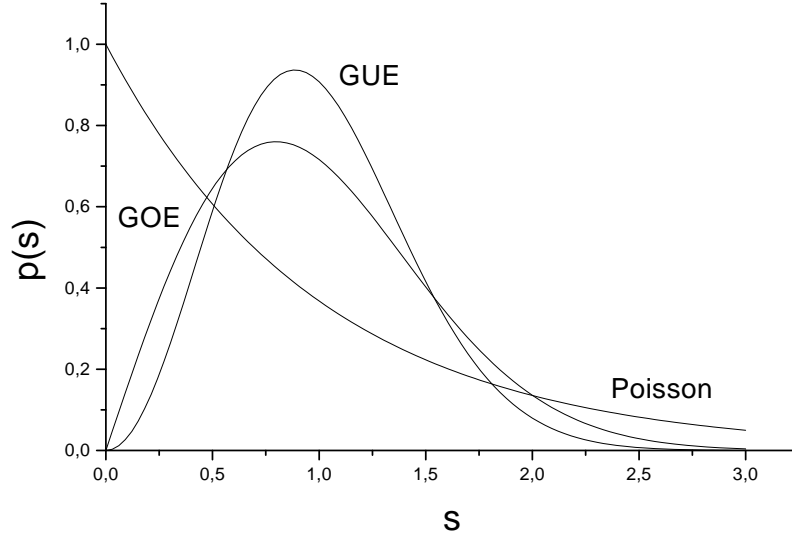


FIG. 1.11 – La statistique de Poisson comparée à celle de Wigner-Dyson.

où  $\hat{\mathbf{J}}$  est l'opérateur densité de courant. La conductance représente l'absorption d'énergie par le système, associée aux transitions électroniques induites par le champ. Celle-ci dépend beaucoup du paramètre  $\frac{e}{\gamma}$ . Elle est nulle à basse fréquence ( $\omega < \Delta$ ) dans la limite du spectre discret, c'est à dire pour  $\gamma \ll \Delta$ . Par contre, elle est importante et proportionnelle à  $\gamma$  pour  $\hbar\omega \approx \Delta$ . Pour un système connecté, Fisher et Lee [37] ont montré l'équivalence de la formule de Kubo et de la formule de Landauer, à condition de considérer les états du système constitué par l'échantillon et les fils de mesure.

**Propriétés du spectre d'énergie** Les propriétés thermodynamiques ou hors équilibre d'un système isolé sont reliées aux propriétés statistiques de son spectre d'énergie. Un spectre peut être caractérisé par différentes grandeurs statistiques. L'une d'entre elles est la probabilité de trouver deux niveaux adjacents séparés par un intervalle d'énergie  $s$ , qu'on nomme  $P(s)$ . Un spectre d'énergie complètement aléatoire a ainsi une statistique poissonnienne (fig. 1.11), qui reflète l'absence de corrélations entre niveaux:

$$P(s) = e^{-s} \quad (1.29)$$

Celle-ci se traduit notamment par une probabilité élevée de trouver deux niveaux adjacents dégénérés. D'une manière générale, c'est la statistique des systèmes intégrables. Prenons l'exemple d'un électron confiné dans un système bidimensionnel rectangulaire de cotés  $a$  et  $b$ . Les niveaux d'énergie électroniques sont:

$$E_{n,m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left[ \left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 \right] \quad (1.30)$$

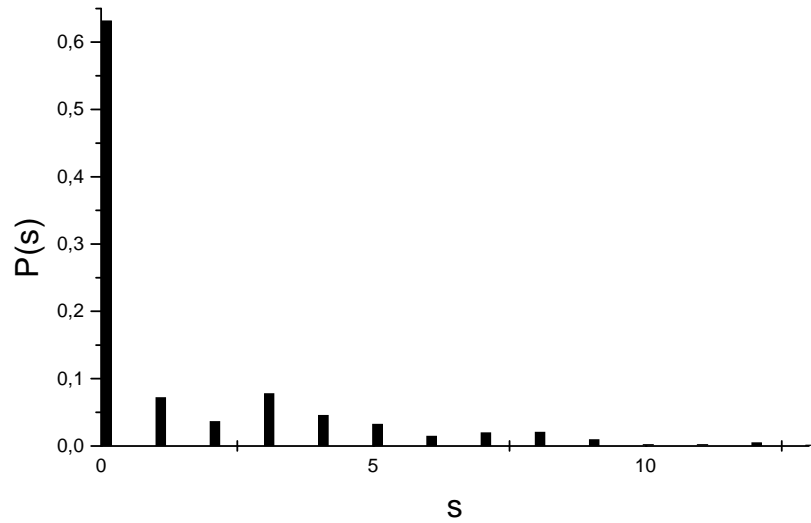


FIG. 1.12 – *Statistique des écarts entre niveaux d'énergie électroniques dans un carré, donnés par  $E_{n,m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m a^2} (n^2 + m^2)$ .*

Pour des côtés de longueurs irrationnels,  $P(s)$  suit une loi de Poisson. Pour des coté de longueur rationnels, des dégénérescence supplémentaires apparaissent. Ce point est illustré sur la figure 1.12. En revanche dans un système chaotique<sup>12</sup> les niveaux d'énergie ont tendance à se repousser et son spectre présente une statistique de Wigner-Dyson [38] (fig. 1.11).

$$P(s) = a_\beta s^\beta e^{-b_\beta s^2} \quad (1.31)$$

où  $a_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $a_2 = \frac{32}{\pi^2}$ ,  $b_1 = \frac{\pi}{4}$ ,  $b_2 = \frac{4}{\pi}$

L'exposant  $\beta$  vaut 1 si le système est invariant par renversement du temps (ensemble orthogonal, GOE) et vaut 2 si cette symétrie est brisée (ensemble unitaire, GUE). La probabilité de trouver deux niveaux dégénérés est en moyenne nulle. Cette statistique est également celle des *matrices aléatoires*, étudiées dans le but de reproduire les caractéristiques des spectres de noyaux nucléaires.

### 1.2.2 Signatures de la cohérence de phase

La cohérence des fonctions d'onde électroniques dans un système mésoscopique donne naissance à des effets quantiques à la fois sur les grandeurs hors d'équilibre, comme la conductivité électrique et sur les grandeurs thermodynamiques telle que la susceptibilité magnétique. Nous nous intéressons tout d'abord aux propriétés de transport, que nous expliquerons à l'aide de l'approche semi-classique, qui est l'objet du paragraphe suivant.

#### Propriétés de transport

<sup>12</sup>. De par sa forme géométrique non intégrable (telle qu'un stade) ou à cause de la présence de défauts.

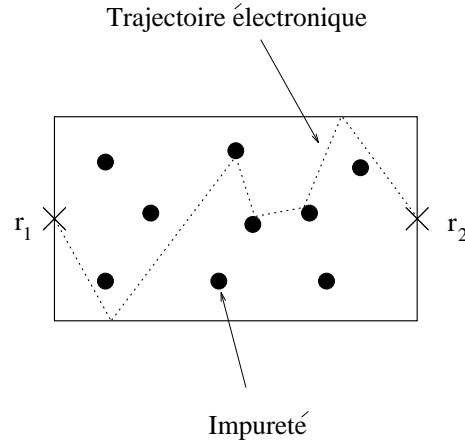


FIG. 1.13 – Trajectoire électronique reliant un bout à l'autre de l'échantillon.

**L'approche semi-classique** Cette approche [39][40] met en relief les corrections quantiques dues aux interférences électroniques. La conductance est proportionnelle à la probabilité pour un électron situé initialement à un point  $r_1$  d'un côté de l'échantillon, d'atteindre le point  $r_2$ , situé de l'autre côté de l'échantillon (fig. 1.13).

$$G \propto P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (1.32)$$

$P$  est égale au carré de l'amplitude de probabilité  $A$ , laquelle se développe en une somme des amplitudes associées à l'ensemble des trajectoires électroniques  $p$  joignant un bout à l'autre de l'échantillon:

$$P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = |A|^2 = \left| \sum_p |A_p| e^{i\varphi_p} \right|^2$$

Ainsi on voit apparaître deux termes: Un terme classique, et un terme d'interférence entre trajectoires, dans lequel intervient la différence de phase entre paires de trajectoires électroniques.

$$G \propto \sum_p |A_p|^2 + \sum_{p \neq q} A_p A_q e^{i(\varphi_p - \varphi_q)} \quad (1.33)$$

**Corrections de localisation faible à la conductivité** Pour un échantillon grand devant le libre parcours moyen élastique, la plupart de ces termes se moyennent à zéro, en raison du caractère aléatoire de la phase accumulée le long d'une trajectoire donnée. Néanmoins, pour des trajectoires constituées de boucles renversées par le sens du temps (fig.1.14), l'interférence est constructive. En effet, de telles trajectoires ont exactement la même phase de sorte que le terme d'interférence s'écrit comme une somme sur les trajectoires en boucle:

$$\delta G_Q \propto \sum_{\{p\}_{\text{boucles}}} A_p A_{-p} \quad (1.34)$$

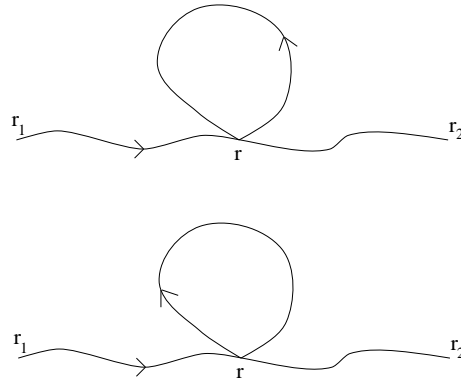


FIG. 1.14 – Trajectoires renversées par le sens du temps, donnant lieu aux corrections de localisation faible.

Il existe donc une correction à la conductance qui résulte des interférences quantiques. Celle-ci est appelée correction de *localisation faible* [39] [41], en raison du fait qu'elle augmente la résistance par rapport à sa valeur classique. En présence d'un champ magnétique, chaque trajectoire acquiert un facteur de phase supplémentaire. En particulier, la phase accumulée sur une trajectoire en boucle  $p$  est proportionnelle au flux  $\phi_p = BS_p$  enserré par celle-ci. Son signe dépend du sens de parcours de la boucle. La correction quantique est alors modifiée:

$$\delta G_Q \propto \sum_p |A_p|^2 \cos\left(\frac{4\pi BS_p}{\phi_0}\right) \quad (1.35)$$

Chaque boucle enserré une surface  $S_p$  différente. De ce fait,  $\delta G_Q$  décroît rapidement dès qu'un champ correspondant à un quantum de flux traverse la boucle de plus grande surface, c'est à dire lorsque  $B_c \approx \frac{\phi_0}{L\phi^2}$ . La conductance augmente lorsqu'on applique un champ magnétique<sup>13</sup>: On parle de *magnétoconductance positive*.

$$\delta G = G(B \gg B_c) - G(B = 0) = -\delta G_Q > 0$$

### L'effet Aharonov-Bohm.

#### 1. Oscillations en $\frac{h}{e}$

L'effet du champ magnétique sur la phase des fonctions d'onde électroniques a permis de réaliser dans un anneau mésoscopique l'analogie de l'expérience des trous d'Young.

La partie quantique de la conductance d'un anneau désordonné peut s'écrire comme la somme de deux termes: le premier fait intervenir l'interférence de trajectoires passant de part et d'autre de l'anneau, et le second des trajectoires passant dans une même branche de l'anneau.

$$\delta G_Q(B) = \sum_{p,q} |A_p(B)|^2 \cos\left[\varphi_p - \varphi_q + 2\pi \frac{BS_{p,q}}{\phi_0}\right]$$

13. L'existence d'un couplage spin-orbite change le signe du terme d'interférence [42].

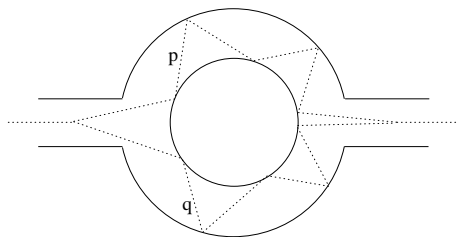
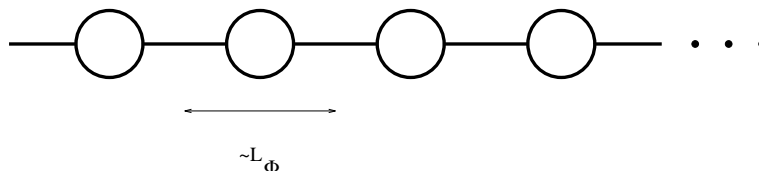
FIG. 1.15 – Trajectoires donnant lieu aux oscillations en  $\frac{h}{e}$  dans un anneau mésoscopique.

FIG. 1.16 – Chaîne d'anneaux connectés.

où  $S_{p,q}$  est la surface enserrée par les trajectoires  $p$  et  $q$ . Ce terme oscille donc en fonction de  $B$ , avec une période égale au quantum de conductance  $\phi_0$ . De telles oscillations de conductance ont été observées expérimentalement [43] [44]. L'amplitude relative des oscillations est très petite, typiquement de l'ordre de  $\frac{1}{g}$ , par rapport à la valeur classique de la conductance.

## 2. Oscillations en $\frac{h}{2e}$

Les oscillations en  $\frac{h}{e}$  disparaissent pour une chaîne ou un réseau d'anneaux [43], séparés par une distance supérieure à  $L_\phi$  (fig. 1.16). En effet, l'addition en série d'un grand nombre d'anneaux est équivalente à moyenner sur  $\Delta\varphi_{p,q}$ , ce qui a pour effet de brouiller le terme oscillant. Il existe cependant des trajectoires particulières qui résistent à cette moyenne. Ce sont celles qui parcourent un tour complet de l'anneau et qui interfèrent avec des trajectoires identiques, mais parcourues dans des sens opposés. La différence de phase entre de telles trajectoires ne dépend pas du trajet particulier dans l'anneau<sup>14</sup>. Dans un échantillon de forme quelconque, de telles trajectoires sont responsables des corrections de localisation faible, évoquées plus haut. Dans une chaîne d'anneau ou dans un cylindre, elles donnent lieu à des oscillations de conductance de période  $\frac{\phi_0}{2}$  [45]. De telles oscillations ont pour la première fois été observées expérimentalement (fig. 1.17) dans un cylindre par Sharvin et Sharvin [46] [47]<sup>15</sup>. Le rapport d'aspect de l'anneau  $r = \frac{S}{\delta S} \approx \frac{S}{2\pi RW}$  joue un grand rôle. En effet, à cause de la finitude de  $r$ , chaque paire de trajectoire  $\{p,q\}$  enserré une surface différente. Les interférences sont alors brouillées dès que  $B \sim \frac{\phi_0}{\delta S}$ .

**Fluctuations de conductance** La conductance d'un échantillon mésoscopique dépend de l'arrangement particulier du désordre dans l'échantillon. Un réarrangement complet des positions des impuretés dans l'échantillon provoque une variation de conductance qui est de l'ordre

14. Cela n'est vrai que pour un flux magnétique ou pour un anneau unidimensionnel.

15. Voir aussi [48, 49].

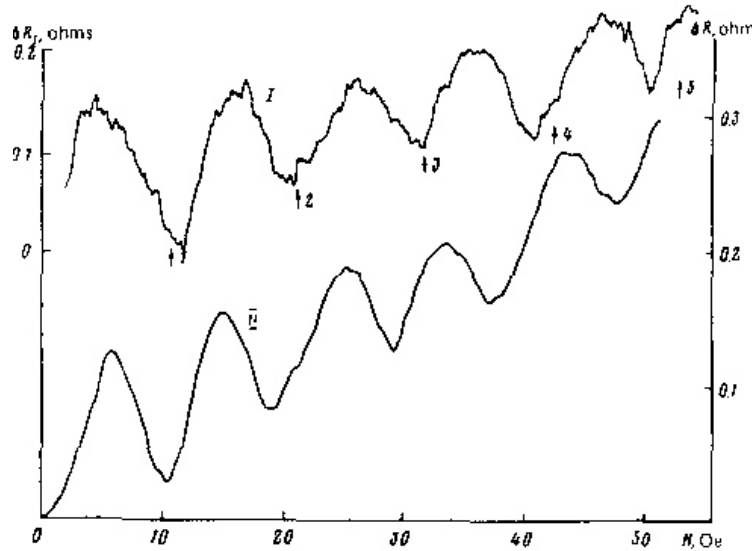


FIG. 1.17 – Oscillations en  $\frac{h}{2e}$  de la résistance d'un cylindre connecté, mesurée par Sharvin et Sharvin.

du quantum de conductance [50, 51, 32, 43, 53, 52]:

$$\sqrt{\langle \delta G^2 \rangle} = \alpha \frac{e^2}{h} \quad (1.36)$$

où  $\alpha$  est un facteur numérique dépendant de la dimension. Ce sont les fluctuations universelles de conductance, qui ne dépendent ni de la taille, ni de la quantité de désordre<sup>16</sup>, ni d'aucune autre particularité de l'échantillon considéré.

En fonction d'un champ magnétique, la conductance suit des oscillations apériodiques et reproductibles, qui ont été observées pour la première fois par Webb et al [54]. Leur amplitude est également de l'ordre de  $\frac{e^2}{h}$ :

$$\delta G_Q(B) = \sum_p |A_p(B)|^2 \cos \left( \varphi_p - \varphi_q + \frac{2\pi B S_p}{\phi_0} \right)$$

Des oscillations semblables sont observées en variant le niveau de Fermi de l'échantillon [53]. Dans un système désordonné, une variation du champ magnétique ou du nombre d'électrons est équivalente à un réarrangement complet des positions  $\mathbf{R}_i$  des impuretés dans l'échantillon. C'est le phénomène d'*ergodicité*.

$$\delta \{ \mathbf{R}_i \} \sim l_e \equiv \delta B \approx \frac{\phi_0}{S} \equiv \delta E_F \approx E_c$$

16. Dans le régime diffusif.

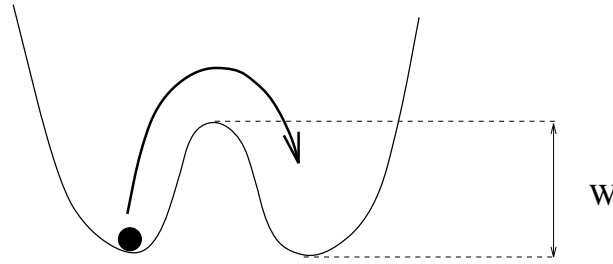


FIG. 1.18 – Schéma représentant une impureté piégée dans un double puits de potentiel, de barrière  $W$ .

**Bruit associé au mouvement d'une impureté.** Le mouvement des impuretés dans l'échantillon provoque également des variations de conductance. En effet, les impuretés ne sont pas statiques. A haute température ( $T \gg 100K$ ), elles diffusent dans le solide, d'autant plus vite que leur masse est petite et que la température est grande<sup>17</sup>. A basse température, ( $T < 100K$ ), le processus de diffusion est négligeable. En revanche, les impuretés sont parfois piégées dans des doubles puits de potentiel quasiment dégénérés en énergie et oscillent entre deux positions de minimum d'énergie (fig. 1.18), créant ainsi dans le solide un potentiel dépendant du temps à la fréquence  $\nu = \nu_0 e^{-\frac{W}{k_B T}}$ , où  $W$  est la barrière de potentiel séparant les deux puits. Un échantillon de grande taille comporte un grand nombre de tels systèmes, qui sont à l'origine d'un potentiel dépendant du temps aléatoire. En supposant une distribution des barrières  $P(W)$  constante, on obtient pour la distribution des fréquences:

$$P(\nu) = P(W) \frac{dW}{d\nu} \propto \frac{1}{\nu} \quad (1.37)$$

C'est le fameux bruit en  $\frac{1}{f}$ , bien connu de tous les expérimentateurs. Pour un échantillon assez petit, ne contenant qu'un seul (ou quelques) système à deux niveaux, la conductance change de valeur chaque fois que l'impureté change de position. C'est le bruit télégraphique qui a été observé par Ralls et al [56]. Les variations de conductance sont proportionnelles à la fraction de trajectoires électroniques  $p_i$  qui visitent l'impureté  $i$ .

$$\delta G \approx p_i \frac{e^2}{h}$$

Le nombre typique d'impuretés visités au cours d'une trajectoire électronique typique est de l'ordre de  $\frac{\tau D}{l_e}$  et le nombre total d'impuretés en dimension  $d$  est de l'ordre de  $\left(\frac{L}{l_e}\right)^d$ <sup>18</sup>. La variation de conductance associée au mouvement d'une impureté d'une quantité de l'ordre de  $\lambda_F$  [57] [58]:

17. Le coefficient de diffusion dans le modèle de Langevin est  $D = \frac{kT}{M\gamma}$ , où  $\gamma$  est un coefficient de frottement visqueux.

18. On a supposé que  $l_e \sim (Vn_i)^{1/d}$ . En général, le libre parcours moyen élastique est beaucoup plus grand que la distance entre impuretés.

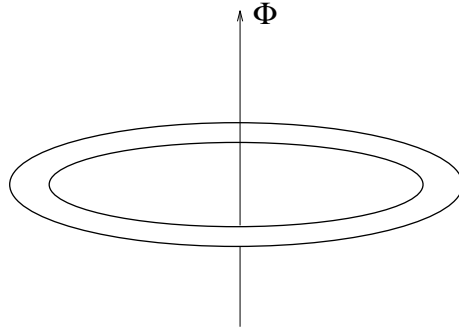


FIG. 1.19 – Anneau traversé par un flux magnétique.

$$\delta G \approx d \left( \frac{L}{l_e} \right)^{d-2} \frac{e^2}{h} \quad (1.38)$$

### Propriétés thermodynamiques

**Existence d'un courant dans un anneau mésoscopique.** L'effet Aharonov-Bohm donne lieu à une propriété thermodynamique très remarquable dans un anneau mésoscopique isolé, traversé par un flux magnétique (fig. 1.19)<sup>19</sup>.

A cause de la cohérence de phase des fonctions d'onde, l'état fondamental du système à l'équilibre thermodynamique est tel qu'il circule dans l'anneau un courant non-dissipatif (tout comme dans les supraconducteurs), et *périodique*, de période  $\phi_0$ . En effet, le potentiel vecteur magnétique impose aux fonctions d'onde électroniques une condition aux limites:

$$\Psi(\theta + 2\pi, \rho) = e^{i2\pi \frac{\phi}{\phi_0}} \Psi(\theta, \rho) \quad (1.39)$$

Il en résulte que les énergies propres de l'anneau sont dépendantes du flux, entraînant l'existence d'un courant thermodynamique dans l'anneau [63] [64] [65] [66]:

$$I = -\frac{\partial}{\partial \phi} F \neq 0 \quad (1.40)$$

où  $F$  est l'énergie libre de l'anneau. L'existence des courants permanents a été pour la première fois mise en évidence expérimentalement par Levy et al [59, 60]. Ces auteurs ont mesuré l'aimantation d'un réseau de  $10^7$  anneaux de cuivre. L'amplitude du signal mesuré était néanmoins dix fois supérieure aux prédictions théoriques. Plus tard, Chandrasekhar [61], ainsi que Mailly [62] ont mesuré le courant permanent dans un anneau unique respectivement en or et semiconducteur, tout deux à l'aide d'un micro-squid.

---

19. Dans la plupart des expériences, on applique un véritable champ magnétique et non un flux Aharonov-Bohm.



**Exemple simple: L'anneau unidimensionnel.** Le cas simple d'un anneau unidimensionnel propre permet de mieux comprendre l'origine du courant permanent [63] [64] [65] [66]. Le hamiltonien de l'anneau en présence d'un flux magnétique le traversant est:

$$H = \frac{(\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2}{2m}$$

avec  $\mathbf{A} = RB\theta\hat{\theta}$ . La périodicité de l'anneau nous renseigne sur la forme des fonctions propres: Il s'agit d'ondes de Bloch, qui satisfont la condition  $\psi_n(x + L) = e^{ikL}\psi_n(x)$ . La condition aux limites imposée par le potentiel vecteur magnétique s'identifie à cette relation et permet de déterminer le vecteur d'onde  $k = 2\pi\frac{\phi}{\phi_0 L}$ . En posant  $\psi_n(x) = e^{ikx}u_n(x)$ , l'équation de Shrödinger s'écrit alors en fonction du hamiltonien en champ nul:

$$H(B = 0)u_n(x) = E_n u_n(x)$$

D'où l'on déduit les fonctions et les énergies propres de l'anneau:

$$\begin{cases} \psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i\frac{2\pi}{L}x(n+\varphi)} \\ \epsilon_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 (n + \varphi)^2 \end{cases} \quad (1.41)$$

avec  $\varphi = \frac{\phi}{\phi_0}$

Le courant total est périodique en flux de période  $\phi_0$ . Suivant la parité du nombre d'électrons dans l'anneau, l'énergie totale du système  $E_{tot} = -\mathbf{M}\cdot\mathbf{H}$  augmente ou diminue avec le champ. Le courant à champ nul est paramagnétique ( $I \sim H$ ) pour un nombre pair d'électrons et diamagnétique ( $I \sim -H$ ) pour un nombre impair d'électrons<sup>20</sup>.

Le courant moyen est périodique en  $\frac{\phi_0}{2}$  [67, 68]. Son signe à bas champ est paramagnétique et son amplitude vaut:

$$I = \frac{ev_F}{L} \quad (1.42)$$

**Anneau désordonné** Le courant moyen d'un anneau désordonné quasi unidimensionnel a été calculé par des techniques diagrammatiques ou semiclassiques. Le courant moyen est paramagnétique et son amplitude est très réduite par le désordre [71, 69, 70, 72]:

$$I_{moy} \sim \frac{\Delta}{\phi_0} \quad (1.43)$$

Son amplitude décroît avec la température comme  $\exp\left(-\frac{L}{L_\phi}\right) \times \exp\left(-\frac{L}{L_T}\right)$ , où  $L_T = \sqrt{\frac{\hbar D}{T}}$  est la longueur thermique. Dans l'ensemble grand canonique, le courant permanent est exponentiellement réduit en  $e^{-\frac{L}{l_e}}$  [73]. Le courant typique a été calculé par Chen [69] et a pour expression

$$I_{typ} = \frac{ev_F l_e}{L} \frac{1}{L} = \frac{e}{\tau_D} \quad (1.44)$$

---

<sup>20</sup>. Le courant permanent est singulier à champ nul en l'absence de désordre. Le comportement linéaire en fonction de  $H$  à champ nul n'existe qu'en présence de désordre et pour le courant moyen.

**Effet des interactions sur le courant permanent** L'effet des interactions sur le courant permanent a été étudié par plusieurs auteurs [74, 75, 76]. Au premier ordre en perturbation, la correction Hartree-fock au courant permanent a pour expression [76]:

$$\Delta I(\phi) = -\frac{\partial}{\partial \phi} \int \int n(\mathbf{r})U(\mathbf{r} - \mathbf{r}')n(\mathbf{r}')d\mathbf{r}d\mathbf{r}' \quad (1.45)$$

Son amplitude est de l'ordre de  $\Delta I(\phi) \sim \frac{E_c}{\phi_0}$ , et son signe correspond à celui des interactions. Elle est donc paramagnétique pour des interactions répulsives et diamagnétique pour des interactions attractives. Bouzerar et al [75] ont calculé numériquement le courant permanent dans l'approximation Hartree-fock autocohérent et par diagonalisation exacte. Le signe dépend du modèle utilisé. La correction est paramagnétique pour des interactions de Hubbard.

**Susceptibilité orbitale** Un échantillon mésoscopique de forme quelconque, acquiert en présence d'un champ une aimantation, qui est la généralisation du courant permanent pour une géométrie différente de celle de l'anneau:

$$M = -\frac{\partial}{\partial B}F \neq 0$$

où  $F$  est l'énergie libre du système. Pour un carré par exemple, un grand nombre de trajectoires contribuent à la susceptibilité. Il en résulte que celle-ci n'est pas périodique mais présente un pic à flux nul dont la largeur est de l'ordre du quantum de flux.

La susceptibilité moyenne canonique d'un carré ballistique a été calculée par plusieurs auteurs [77, 78, 79], et vaut<sup>21</sup>

$$\chi_{per} = \frac{ga^2\mu_0e^2}{m^*} \quad (1.46)$$

où  $a$  est largeur du carré,  $g$  la conductance adimensionnée et  $m^*$  la masse effective.

L'aimantation d'un réseau de carré semiconducteurs en GaAs, a été mesuré par Lévy et al. Ces auteurs trouvent une aimantation paramagnétique, en accord avec les prédictions théoriques pour des électrons sans interactions.

**Polarisation d'un système désordonné** Le moment dipolaire associé à une densité de charge  $\rho(\mathbf{r})$  est par définition:

$$\mathbf{P} = \int \rho(\mathbf{r})\mathbf{r}d^3r \quad (1.47)$$

Peut-il exister un moment dipolaire permanent dans un conducteur? Dans un conducteur propre,  $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ , puisque la densité de charge est uniforme. Qu'en est-il pour un conducteur désordonné?

A cause de la présence d'impuretés, la densité de charge électronique est loin d'être uniforme. Elle épouse le potentiel désordonné de manière à d'abaisser l'énergie du système. Les interactions

---

<sup>21</sup>. La susceptibilité orbitale est de signe opposée à la susceptibilité de Landau  $\chi_L$  et supérieure d'un facteur  $k_F a$ :  $\chi_{per} = -k_F a \times \chi_L$ .

entre électrons tendent néanmoins à amoindrir ces irrégularités en écrantant le potentiel des impuretés<sup>22</sup>. Ainsi, il peut exister un moment dipolaire permanent.

La valeur typique a été calculée par Berkovitz et Altshuler [81, 80], pour un conducteur carré:

$$\langle \delta P_z^2 \rangle \sim (eL_z)^2 (k_F L_z) \left( \frac{r_s}{L_z} \right)^4 \frac{L_x L_y}{l_e^2} \quad (1.48)$$

**Des corrections quantiques à la polarisabilité?** Un conducteur plongé dans un champ électrique  $\mathbf{E}$  est presque instantanément polarisé: sous l'effet du champ, les charges se déplacent sur les bords du conducteur, qui acquiert ainsi un moment dipolaire,<sup>23</sup>.

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E} = \int \delta \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} d^3 r \quad (1.49)$$

La polarisabilité classique d'un conducteur dépend principalement de sa forme géométrique. Pour un conducteur tridimensionnel, elle est toujours de l'ordre du volume de celui-ci:

$$\alpha_{class} = V \epsilon_0 \quad (1.50)$$

Qu'en est-il pour un conducteur dont la taille est de l'ordre de la longueur de cohérence de phase? Existe-t-il une correction quantique à la polarisabilité d'un conducteur mésoscopique? Nous montrerons dans le chapitre 2 qu'un tel effet existe et a pu être mesuré (chapitre 7).

**Energie de charge** L'énergie électrostatique d'un conducteur chargé s'exprime en fonction de sa charge  $Q = Ne$ , et de sa capacité propre  $C$ <sup>24</sup>:

$$U = \frac{Q^2}{2C} \quad (1.51)$$

L'énergie nécessaire afin de rajouter un électron s'écrit:

$$\delta U = U(N+1) - U(N) = (2N+1)E_C \quad (1.52)$$

où  $E_C = \frac{e^2}{C}$  est appelée l'énergie de charge. Pour un conducteur classique, elle ne dépend que de la taille typique  $L$  du conducteur, et un ordre de grandeur est donné par  $C \sim \epsilon_0 L$ . Pour un conducteur de taille  $L = 1 \mu m$ , on obtient  $E_C \sim 10^{-2} eV \sim 100 K$ <sup>25</sup>. Cette notion a été généralisée par Büttiker. Dans un système fermé, ie à nombre d'électrons fixe, la capacité quantique<sup>26</sup> est reliée à la variation de potentiel chimique qui apparaît quand un unique électron est ajouté dans le système.

---

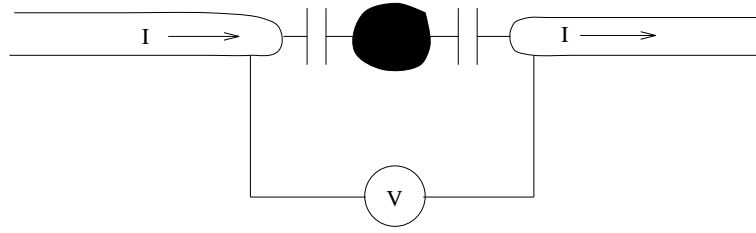
22. Dans une approximation de Thomas-Fermi, qui suppose notamment que le potentiel des impuretés  $V$  soit faible, le potentiel effectif s'écrit  $V_{eff}(q) = \frac{V(q)}{\epsilon(q)}$ .

23. Celui-ci est généralement dans la direction du champ appliqué.

24.  $Q$  est relié à  $C$  par la relation  $Q = CV$ , où  $V$  est le potentiel électrique du conducteur.

25. Dans un semiconducteur, il faut tenir compte de la constante diélectrique, qui abaisse l'énergie de charge. Pour le GaAs,  $\epsilon \sim 12$ , ainsi  $E_C \sim 10 K$ .

26. La définition de la capacité quantique donnée par Büttiker est  $C_\mu = \frac{dQ}{d\mu}$ .

FIG. 1.20 – *Echantillon connecté par l'intermédiaire de barrières tunnel.*

$$\frac{e^2}{C_\mu} = \mu(N+1) - \mu(N) \quad (1.53)$$

Blanter et Mirlin [82] ont montré que pour un conducteur mésoscopique, il existe une correction quantique à  $C_\mu$ :

$$\frac{e^2}{C_\mu} \approx \frac{e^2}{C_{class}} + \frac{\Delta}{g} \quad (1.54)$$

### 1.2.3 Du système connecté au système isolé

Un moyen d'isoler continuellement un système est d'introduire entre celui-ci et les appareils de mesure des barrières tunnel (fig. 1.20). Celles-ci sont réalisées dans les semiconducteurs par des grilles métalliques qui permettent de dépléter le gaz d'électrons et d'interrompre ainsi plus ou moins fortement les amenées de courant. Une grille supplémentaire permet généralement de varier le potentiel chimique du système<sup>27</sup>. On passe ainsi progressivement du système ouvert au système isolé, ce qui donne la possibilité d'étudier le spectre d'énergie du système, à condition que l'écartement moyen entre les niveaux  $\Delta$  soit supérieur à leur élargissement, résultant des processus inélastiques ainsi que de la finitude du temps d'échappement  $\tau_{echap}$ :

$$\frac{\hbar}{\tau_{echap}}, \frac{\hbar}{\tau_\phi}, k_B T \ll \Delta$$

Dans tous les cas, si  $k_B T \ll E_C$ , on observe alors des pics de conductance [84] en fonction du potentiel de grille<sup>28</sup>. La conductance est dominée par un phénomène classique, le *blocage de Coulomb* [83], qui résulte du fait qu'il faut fournir une quantité d'énergie finie afin de rajouter un électron dans un système chargé (voir section 1.2.2). Un électron ne peut passer d'un réservoir

27. Le potentiel dans le point quantique est relié au potentiel de la grille par une relation faisant intervenir les capacités mutuelles entre les réservoirs, la grille et le point quantique ( $C_{L,R}$ ,  $C_G$ ), et la capacité  $C$  du point quantique:

$$\Phi \approx \frac{C_G V_G + C_L V_L + C_R V_R}{C_R + C_L + C_G + C}$$

28. Il s'agit d'un effet strictement classique. Des pics de conductances sont observés même si le spectre est continu.

à l'autre que si l'énergie de Fermi  $\mu$  de l'électron dans le réservoir<sup>29</sup> coïncide avec l'énergie de l'état correspondant à un électron supplémentaire dans le système, c'est à dire quand  $\mu = E(N + 1) - E(N) + \phi$ . Ainsi les pics de conductance sont espacés de la quantité:

$$\delta V_G \propto (E_{N+1} - E_{N-1} + 2E_N) \quad (1.55)$$

où le coefficient de proportionnalité relie le potentiel de grille au potentiel dans le point quantique. Dans le "modèle de charge", l'énergie du point quantique est approximée par la somme des énergie  $\epsilon_i$  à une particule et d'un terme d'interaction dépendant du nombre d'électrons dans le point quantique:

$$E_T = \sum_{i=1}^N \epsilon_i + E_C(N - N_0)^2 \quad (1.56)$$

Pour ce modèle simple, l'écart entre les pics de conductance dépend de la parité du nombre d'électrons:

$$\delta V_G \propto \begin{cases} \Delta_N + E_c & \text{si } N \text{ est pair} \\ E_c & \text{si } N \text{ est impair} \end{cases} \quad (1.57)$$

La statistique des pics nous renseigne sur le rôle des interactions dans le point quantique. Dans le modèle de charge par exemple, la distribution des pics reflète, après correction du blocage de Coulomb, celle des niveaux à une particule. Pour un point quantique désordonné ou de forme chaotique, la probabilité de trouver deux pics séparés en énergie par  $s$  doit être donné par la fonction de Wigner-Dyson. Certains auteurs [84] trouve néanmoins une distribution symétrique, qui ne peut donc pas être expliquée en terme d'électrons sans interactions. Dans ce type d'expérience, on peut également soupçonner la grille de modifier la forme du point quantique, de manière équivalente à un réarrangement complet du désordre.

---

<sup>29</sup>. En transport linéaire, une "petite" différence de potentiel  $\delta V = V_A - V_B$  est imposée entre les deux réservoirs, qui sont donc pratiquement au même potentiel chimique.

### 1.2.4 Conclusion de l'introduction

Dans les solides, il est possible d'observer des interférences électroniques en agissant sur la phase de la fonction d'onde par l'intermédiaire d'un flux magnétique ou d'un potentiel électrique. Toutefois, il est nécessaire que les électrons gardent une phase déterminée dans l'échantillon étudié. En pratique, la longueur de cohérence de phase  $L_\phi$  est limitée par les collisions inélastiques (avec par exemple les phonons), et plus généralement par celles qui induisent un changement de l'état de l'électron et simultanément de celui du *réservoir thermodynamique* (environnement) auquel il est nécessairement couplé. La longueur de cohérence de phase délimite le régime *mésoscopique* et augmente à basse température. Elle est typiquement de l'ordre du micron à  $T = 100mK$ .

La nature du mouvement électronique est également déterminée par le désordre dans l'échantillon et les interactions entre électrons. En effet, les électrons subissent des collisions élastiques contre les impuretés du réseau cristallin. Suivant la taille  $L$  de l'échantillon étudié par rapport au *libre parcours moyen élastique*  $l_e$ , le mouvement électronique est soit ballistique ( $l_e \sim L$ ), soit diffusif ( $l_e \ll L$ ). Par ailleurs, à fort désordre, un système désordonné tridimensionnel connaît une transition métal-isolant, qui résulte de l'interférence destructive des fonctions d'onde électroniques. Il s'agit donc d'une transition d'origine purement quantique.

Un système mésoscopique isolé présente certaines analogies avec une molécule ou un atome. Il comporte en principe des niveaux d'énergies électroniques *discrets*, qui dépendent de la forme et du désordre dans l'échantillon. Même si les techniques de nanofabrication permettent aujourd'hui de réaliser deux échantillons approximativement de même forme à l'échelle macroscopique, il reste néanmoins impossible de prévoir exactement le désordre présent dans l'échantillon, et par conséquent son spectre d'énergie. En revanche, on connaît les propriétés statistiques de ce spectre, qui est bien décrit par les matrices aléatoires, initialement utilisées pour comprendre le spectre d'énergie des noyaux nucléaires. Contrairement à un système ballistique, un système diffusif a ainsi des niveaux d'énergie corrélés. Le désordre a pour effet de supprimer les dégénérescences. C'est ce qu'on appelle la *rigidité spectrale*.

En pratique, le système est toujours couplé à un réservoir thermodynamique qui perturbe les états du système. Un couplage faible a pour effet d'induire l'existence d'un temps de vie caractéristique associé à chaque niveau. Ce temps contribue à un élargissement des niveaux, qui dans les *systèmes électriquement isolés* peut rester faible devant leur écartement moyen  $\Delta$ , permettant ainsi de préserver le caractère discret du spectre d'énergie. Au contraire, les systèmes connectés ont un spectre d'énergie continu, résultant du couplage du système fini avec les fils de mesure infinis. On comprend alors que dans le régime mésoscopique, la façon dont la mesure est effectuée détermine également la quantité mesurée. La conductance électrique électrique par exemple, s'interprète de façon très différente dans ces deux limites. La conductance d'un système connecté est reliée aux propriétés de *transmission* d'une onde électronique par l'échantillon. En revanche, la conductance d'un système isolé est une mesure de la réponse en courant du système à une onde électromagnétique. Celle-ci dépend beaucoup de la dissipation dans le système, et donc du paramètre  $\gamma$  caractérisant le couplage du système avec l'environnement. Dans ce cas, le rapport entre l'élargissement des niveaux et de l'écartement moyen entre les niveaux  $\frac{\gamma}{\Delta}$ , joue en particulier un grand rôle [85, 86]. En particulier, l'absorption est nulle à basse fréquence ( $\omega \ll \Delta$ ) dans la limite du spectre discret, c'est à dire lorsque l'élargissement moyen entre les

niveaux  $\gamma$  est petit devant leur écartement  $\gamma \ll \Delta$ .

La cohérence quantique donne lieu à des déviations aux lois classiques, résultant des interférences électroniques. La loi d'additivité des tensions cesse par exemple d'être vérifiée dans un échantillon cohérent. Cependant, en raison du fort couplage avec l'environnement, ces déviations sont faibles dans les échantillons connectés. L'interférence de trajectoires en boucles renversées par le sens du temps donne lieu à une faible diminution de la conductance par rapport à sa valeur classique: c'est la *localisation faible*, qui peut être mise en évidence par l'application d'un champ magnétique la supprimant. Il est possible de modifier les interférences spécifiques contribuant à cette correction en modifiant la configuration du désordre (par exemple en recuisant l'échantillon) ou de manière équivalente le niveau de Fermi de l'échantillon. La variation de conductance qui en résulte est typiquement de l'ordre du quantum de conductance  $\frac{e^2}{h}$ , et ne dépend d'aucune caractéristique spécifique de l'échantillon considéré: c'est ce qu'on appelle les *fluctuations de conductance*. La cohérence lieu donne également lieu à des propriétés purement quantiques, qui n'ont pas d'analogue classique. Dans un anneau mésoscopique traversé par un flux magnétique, il existe ainsi un courant thermodynamique non-dissipatif, périodique avec le flux et de période  $\phi_0 = h/e$ .

Dans un système électriquement isolé au contraire, les corrections mésoscopiques peuvent être du même ordre de grandeur que la valeur classique. Comme l'ont montré théoriquement Reulet, Kamenev, Gefen et Bouchiat [89] [90] [91] [92] [93] (voir chapitre 3), les oscillations de conductance d'un système électriquement isolé sont parfois du même ordre de grandeur que la conductance classique de Drude et sont à comparer à l'amplitude relative en  $1/g$  observée dans les échantillons connectés.

Il est possible de passer continuellement du système isolé au système connecté en isolant le système des fils de mesure par l'intermédiaire de barrières tunnel. A basse température, des pics de conductance sont observés en fonction du potentiel dans le système (aussi appelé "point quantique"), qu'on modifie à l'aide d'une grille électrostatique. Cet effet, appelé *blocage de Coulomb* résulte du fait qu'il faut fournir une énergie finie pour rajouter une charge à un îlot chargé. La statistique des écarts entre pics renseigne sur la statistique des niveaux électroniques et la nature des interactions dans le point quantique.





# Chapitre 2

## Polarisabilité d'un système mésoscopique

### 2.1 Qu'est ce que la polarisabilité?

#### 2.1.1 Définition et motivations

La réponse d'un système mésoscopique à un champ magnétique a suscité ces dernières années de nombreux travaux, tant sur le plan théorique qu'expérimental. En particulier, il a été montré qu'il existe dans un anneau mésoscopique soumis à un champ magnétique constant un courant permanent périodique en flux, de période égale au quantum de flux. Ce courant a été mesuré dans différentes expériences [59] [61] [62], correspondant à des situations et des matériaux différents. Plus récemment, la réponse d'un système mésoscopique à un champ magnétique dépendant du temps a été l'objet d'une étude à la fois expérimentale et théorique [90] [91]. En revanche, la réponse d'un système mésoscopique isolé à un champ électrique a été beaucoup moins étudié. En particulier, le rôle des interférences quantiques n'était pas connu au début de ce travail.

Que se passe-t-il si l'on place un conducteur entre les plaques d'un condensateur plan, auquel on applique une différence de potentiel constante  $V$  (fig. 2.1)? Sous l'action du champ électrique, les électrons s'accumulent sur les bords du conducteur de façon à minimiser l'énergie du système. Il en résulte une densité de charge non-uniforme qui est la source d'un moment dipolaire induit, défini de la manière suivante:

$$\mathbf{P} = \int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} d\mathbf{r} \quad (2.1)$$

$\mathbf{P}$  est généralement dans la direction du champ extérieur appliqué. Dans le régime linéaire, c'est à dire pour un champ électrique suffisamment petit<sup>1</sup>,  $\mathbf{P}$  est proportionnel au champ électrique.

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E} \quad (2.2)$$

Le coefficient de proportionnalité  $\alpha$  est la polarisabilité du conducteur<sup>2</sup>. Pour un échantillon

---

1. Ce point sera précisé ultérieurement.

2. En toute rigueur,  $\alpha$  est un tenseur. Il relie la polarisation  $P_i$  dans une direction donnée  $i$  au champ appliqué dans une direction quelconque  $j$ :  $P_i = \alpha_{ij} E_j$ .

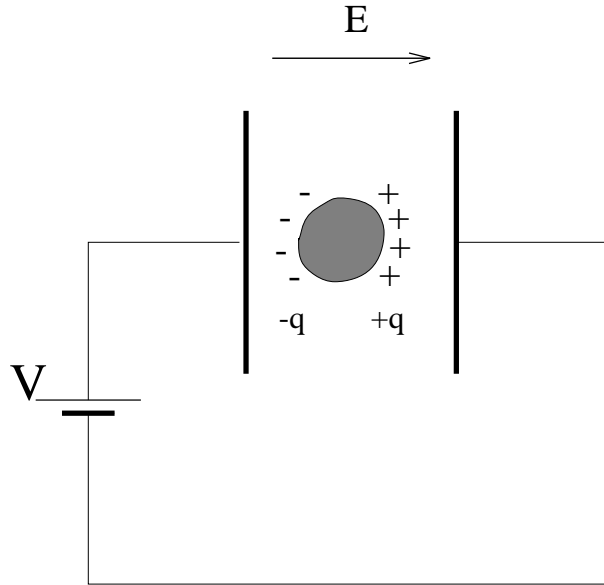


FIG. 2.1 – Conducteur entre les plaques d'un condensateur plan.

de taille macroscopique,  $\alpha$  est principalement déterminé par la géométrie du conducteur. Qu'en est-il pour un grain métallique dont la taille est voisine de la longueur de cohérence de phase? Existe-t-il une correction quantique à la polarisabilité d'un système mésoscopique? C'est à cette question que nous essaierons de répondre dans ce chapitre.

### 2.1.2 Polarisabilité classique

La polarisabilité d'un morceau de métal "macroscopique" est très bien décrite par l'électrostatique classique. Dans cette approximation, le moment dipolaire d'un conducteur parfait se calcule en résolvant l'équation de Poisson dans tout l'espace<sup>3</sup> et en imposant par ailleurs que le conducteur soit à un potentiel constant<sup>4</sup>.

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad (2.3)$$

Le calcul est inextricable analytiquement pour une forme quelconque. En revanche, il se résout facilement dans le cas d'une sphère ou encore d'un cube métallique, à condition toutefois de négliger les effets de bord. Calculons par exemple le moment dipolaire d'un cube, placé dans un champ électrique parallèle à l'une de ses arêtes (fig. 2.2). La densité surfacique de charge  $\sigma$ , induite à la surface du conducteur s'ajuste de sorte à annuler le champ électrique dans le conducteur. On sait du reste grâce au théorème de Gauss que le champ créé par un plan chargé de densité  $\sigma$  est uniforme et vaut  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ . Ce dernier point permet de déterminer  $\sigma$ , et par suite la densité de charge induite<sup>5</sup>:

3. Cela est équivalent à minimiser l'énergie électrostatique  $U = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\mathbf{r}$ .

4. Cette condition est équivalente à imposer  $E = 0$  dans le conducteur.

5. L'origine des positions est prise au centre du cube.

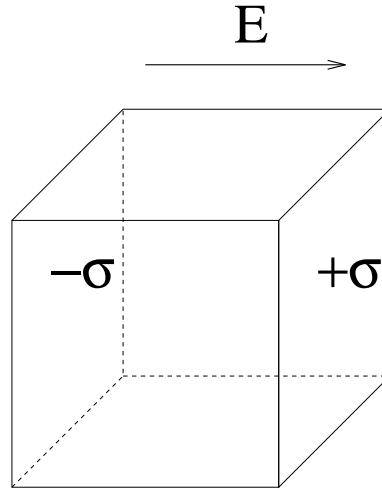


FIG. 2.2 – Cube métallique dans un champ électrique uniforme.

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{E\epsilon_0}{2} \left[ \delta\left(x - \frac{a}{2}\right) - \delta\left(x + \frac{a}{2}\right) \right] \quad (2.4)$$

L'intégrale 2.1 donne le résultat suivant:

$$\alpha = \epsilon_0 V \quad (2.5)$$

A un facteur géométrique près, la polarisabilité d'un conducteur tridimensionnel classique est donc égale à son volume  $V$ .

### Systèmes 2d

Le cas des systèmes de dimensionnalité réduite, bidimensionnels et unidimensionnels, est plus complexe. Soit un ruban de largeur  $W$  et de longueur  $L$  grande devant  $W$ , plongé dans un champ électrique uniforme dans le plan du ruban et orienté perpendiculairement au côté le plus long (fig. 2.3). La densité de charge induite est telle que le champ électrique effectif soit nulle à l'intérieur du ruban. Elle satisfait donc l'équation suivante:

$$\int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dr' - \mathbf{E} = 0 \quad (2.6)$$

Faute de trouver une solution analytique, nous avons traité numériquement cette équation dans le cas particulier d'un ruban infini (fig. 2.4)<sup>6</sup>. Contrairement au cas tridimensionnel, la distribution de charge s'étale sur toute la largeur du ruban car l'accumulation de charge sur

---

6. Pour un ruban infini, la densité de charge s'écrit  $\rho(x,y) = \delta(y)\lambda(x)$ , et satisfait l'équation:

$$\int \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho(x')}{x - x'} dx' - E = 0$$

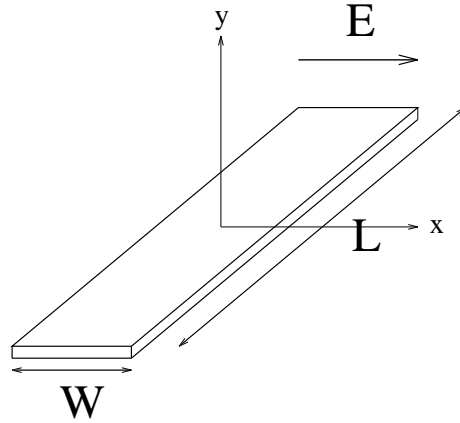


FIG. 2.3 – Ruban conducteur dans un champ électrique uniforme.

les bords du ruban ne suffit pas à annuler le champ électrique dans le conducteur. La solution numérique donne une loi très proche d'un logarithme:

$$\rho(x) \approx EW \frac{\log\left(\frac{W}{2} - x\right)}{\log\left(\frac{W}{2} + x\right)} \quad (2.7)$$

L'intégrale 2.1 de la fonction précédente donne:

$$\alpha \approx \epsilon_0 W^2 L$$

Le calcul pour un conducteur bidimensionnel ellipsoïdale est fait par Landau [94]. On en déduit la polarisabilité d'un disque de rayon  $R$ :  $\alpha = \epsilon_0 \frac{16}{3} R^3$  [94].

### Systemes 1d

Comme pour les systèmes 2d, l'accumulation de charges aux deux extrémités d'un conducteur unidimensionnel ne permet pas d'annuler le champ extérieur. La polarisabilité d'une tige de longueur  $L$ , très supérieure à son diamètre, se comporte comme  $\epsilon_0 L^3$ , pour un champ électrique aligné suivant son axe (fig. 2.5).

Le cas d'un anneau quasi-unidimensionnel de rayon  $R$  est exactement soluble, à condition d'introduire une coupure, faisant intervenir la largeur  $W$  de l'anneau, de manière à régulariser la divergence logarithmique du potentiel.

$$\alpha = \frac{\epsilon_0 \pi^2 R^3}{\ln\left(\frac{R}{W}\right)} \quad (2.8)$$

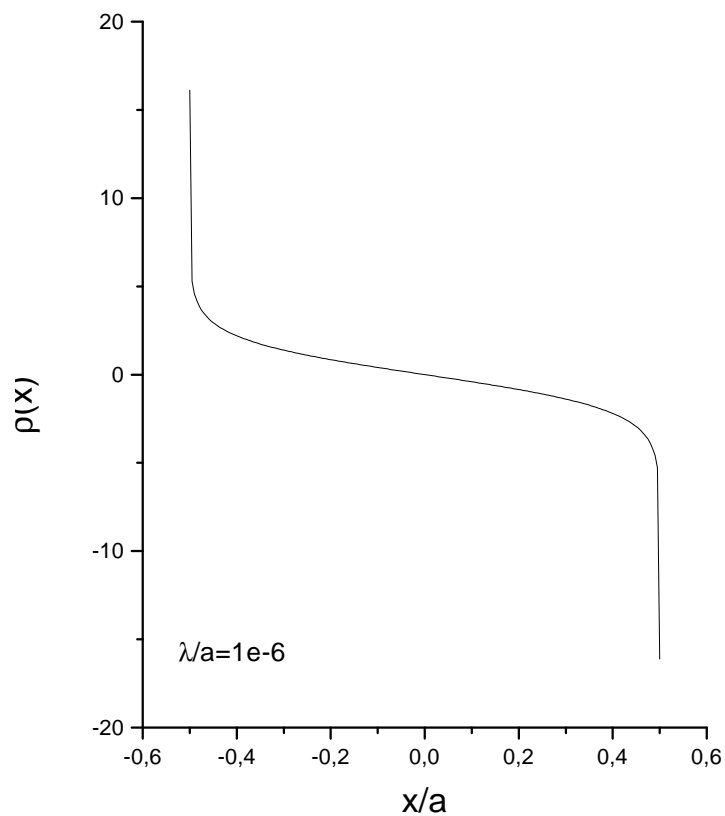


FIG. 2.4 – Densité de charge induite dans un ruban conducteur plongé dans un champ électrique planaire uniforme: la fonction diverge logarithmiquement en fonction de la coupure  $\lambda/a$ .

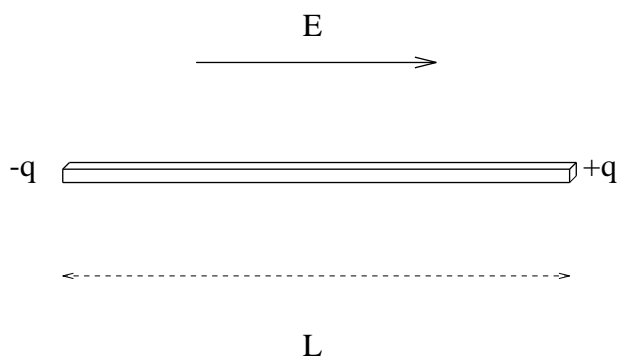


FIG. 2.5 – Fil unidimensionnel dans un champ électrique uniforme.

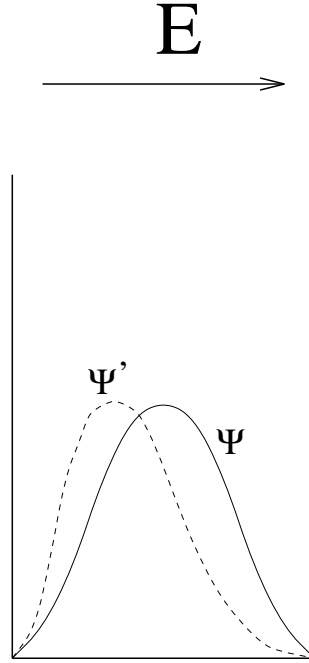


FIG. 2.6 – Schéma d'une fonction d'onde électronique dans un puit quantique unidimensionnel, perturbée par un champ électrique.

## 2.2 Polarisation quantique d'électrons sans interactions

### 2.2.1 Position du problème

Gorkov et Elisashberg (GE) [95] ont été les premiers à s'intéresser à la réponse électrique des systèmes mésoscopiques. En s'appuyant sur la théorie des matrices aléatoires, ils ont calculé la polarisabilité d'un grain métallique désordonné ou ballistique. Leur conclusion est surprenante: Dans le régime diffusif,  $\alpha$  est supérieure à la valeur classique par un facteur  $(k_F a)^2$ , où  $a$  est la taille typique du grain et  $k_F$  le vecteur d'onde de Fermi. Plus tard, Rice [96] a souligné l'oubli de l'écrantage dans le calcul de GE et a montré que la prise en compte de celui-ci dans l'approximation de Thomas-Fermi fait disparaître le facteur  $(k_F a)^2$ .

Du point de vue quantique, la polarisabilité d'un système d'électrons sans interactions représente la sensibilité des fonctions d'onde à un champ électrique extérieur. Le hamiltonien devient en présence d'un champ électrique  $H = H_0 + eEx$ , où  $H_0$  est le hamiltonien du système en l'absence de champ. Les fonctions propres du système  $|\alpha\rangle$  associées aux valeurs propres  $\epsilon_\alpha$ , sont modifiées par un champ électrique (fig. 2.6).

$$|\alpha\rangle' \approx |\alpha\rangle + \sum_{\alpha \neq \beta} \frac{\langle \beta | e\mathbf{E} \cdot \mathbf{r} | \alpha \rangle}{\epsilon_\beta - \epsilon_\alpha} |\beta\rangle$$

Il en résulte une densité de charge induite  $\delta\rho$ , associée à l'asymétrie de chaque fonction d'onde, engendrée par  $E$ :

$$\delta\rho(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha=1}^N |\psi'_\alpha(\mathbf{r})|^2 - |\psi_\alpha(\mathbf{r})|^2$$

On trouve ainsi l'expression de la polarisabilité d'un système de  $N$  électrons<sup>7</sup> sans interactions à température nulle:

$$\alpha = \frac{2e^2}{E^2} \sum_{\alpha \neq \beta} \frac{|\langle \alpha | \mathbf{E} \cdot \mathbf{r} | \beta \rangle|^2}{\epsilon_\beta - \epsilon_\alpha} \quad (2.9)$$

Nous verrons que cette formule est modifiée quand on tient compte de l'écrantage.

### 2.2.2 Exemple: Cube "propre"

Il est instructif de calculer, à l'aide de la formule 2.9, la polarisabilité d'un système d'électrons sans interactions confinés dans une boîte cubique de côté  $a$ . Les fonctions d'onde et les énergies propres diagonalisant le hamiltonien  $H = \frac{P^2}{2m}$  s'écrivent:

$$\begin{cases} \psi_{m,n,p}(x,y,z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{p\pi z}{c}\right) \\ \epsilon_{m,n,p} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi p}{c}\right)^2 \right] \end{cases} \quad (2.10)$$

On montre facilement que  $\langle i,j,k | X | l,m,n \rangle = \delta_{j,m} \delta_{k,n} X_{i,l}$ , avec  $X_{i,l} = \frac{2a}{\pi^2} \left[ \frac{1}{(i-l)^2} - \frac{1}{(i+l)^2} \right]$ . En utilisant ce résultat, la formule 2.9 mène à l'expression:

$$\alpha = \frac{2ma^4}{\hbar^2} \sum_{i=1}^{i_{max}} \sum_{l=i_{max}+1}^{\infty} \frac{|X_{i,l}|^2}{i^2 - l^2} \quad (2.11)$$

La polarisabilité dépend du dernier état occupé:  $\alpha \approx \frac{8}{\pi^6} \frac{a^4}{a_0} \frac{1}{n_{max}}$ . Pour un cube propre,  $n_{max}$  se comporte comme  $N^{\frac{1}{3}}$ , par conséquent,

$$\alpha \sim \epsilon_0 \frac{a^4}{a_0} \frac{1}{N^{\frac{1}{3}}} \quad (2.12)$$

où  $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$  est le rayon de Bohr.

Remarquons qu'on trouve un résultat analogue à celui de  $GE$ .  $\alpha$  est supérieur à la valeur classique d'un facteur  $\frac{a}{a_0} \frac{1}{N^{\frac{1}{3}}}$ . A forte densité, telle que  $N \approx \frac{a^3}{a_0^3}$ , on retrouve le résultat classique:  $\alpha \sim \epsilon_0 a^3$ .

## 2.3 Expression générale

Une autre manière de dériver l'expression de la polarisabilité utilise la fonction de réponse électrique  $\chi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  [8]. Celle-ci est définie comme la variation de charge induite par un potentiel

7. Le nombre d'électrons dans le système est constant. Il s'agit donc de l'ensemble canonique.

$$\begin{aligned} \times \quad V(\mathbf{r}_1) &= \gamma \delta(\mathbf{r}_1) \\ \times \quad \delta\rho(\mathbf{r}_2) &= \gamma \chi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \end{aligned}$$

FIG. 2.7 – Définition de la fonction de réponse. Pour un potentiel  $V(\mathbf{r}_1) = \gamma\delta(\mathbf{r}_1)$ , au point  $\mathbf{r}_1$ , la variation de charge au point  $\mathbf{r}_2$  vaut  $\delta\rho(\mathbf{r}_2) = \gamma\chi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$

Dirac (fig. 2.7). Pour un potentiel extérieur petit  $\phi_{ext}(\mathbf{r})$  (hypothèse de réponse linéaire), la densité de charge induite s'exprime alors simplement en fonction de  $\chi$ ;

$$\delta\rho(\mathbf{r}_1) = \int \chi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \phi(\mathbf{r}_2) dr_2 \quad (2.13)$$

où  $\phi$  est le potentiel écranté, qui est relié au potentiel extérieur par la constante diélectrique  $\epsilon$ :

$$\phi_{ext}(\mathbf{r}_1) = \int \epsilon(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \phi(\mathbf{r}_2) dr_2 \quad (2.14)$$

La polarisabilité a alors pour expression:

$$\alpha = \frac{1}{E^2} \int \chi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \mathbf{E} \cdot \mathbf{r}_2 \phi(\mathbf{r}_1) dr_1 dr_2 \quad (2.15)$$

Dans un système invariant par translation, toutes les grandeurs physiques ne dépendent que de la différence des positions. Les relations précédentes se simplifient alors en transformée de Fourier:

$$\phi(\mathbf{q}) = \frac{\phi_{ext}(\mathbf{q})}{\epsilon(\mathbf{q})} \quad (2.16)$$

Enfin, l'équation de Poisson permet de relier la constante diélectrique à la fonction de réponse:

$$\epsilon(\mathbf{q}) = 1 - \frac{\chi(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2} \quad (2.17)$$

Le problème est plus complexe dans un système désordonné qui ne possède pas l'invariance par translation. Il faut alors résoudre l'équation,

$$\phi(\mathbf{r}_1) = \phi_{ext}(\mathbf{r}_1) + \int \delta\rho(\mathbf{r}_1) U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) dr_2 \quad (2.18)$$

que l'on peut encore écrire sous la forme matricielle<sup>8</sup>

$$\phi = \frac{1}{1 - U\chi} \phi_{ext} \quad (2.19)$$

Cette relation est la généralisation de 2.16 pour un système désordonné.

8. On affecte un indice à chaque point de l'espace qu'on a discrétisé sous forme de réseau.  $a_i$  dénote la valeur de l'opérateur  $A$  au point  $\mathbf{r}_i$ :  $A(\mathbf{r}_i)$ . Dans cette notation, une intégrale de la forme  $A(\mathbf{r}_1) = \int C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) B(\mathbf{r}_2) dr_2$ , devient  $a_i = \sum_j b_{ij} c_j$ , où l'indice  $i$  représente le point  $\mathbf{r}_1$ .



## 2.4 L'approximation de Thomas-Fermi

L'approximation de Thomas-Fermi [8] va au delà d'un simple calcul électrostatique. Elle prend en compte l'énergie cinétique des électrons, ainsi que leur caractère fermionique. En toute généralité, le hamiltonien d'un système d'électrons en interaction dans un potentiel extérieur s'écrit :

$$H_N = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{P_i^2}{2m} + \phi_{ext}(\mathbf{r}_i) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \right\}$$

L'approximation de champ moyen réduit ce problème "à N corps", à un problème beaucoup plus simple, à un corps seulement. Les électrons se déplacent alors dans un potentiel effectif, résultant de l'écrantage du potentiel extérieur par les autres électrons :

$$H = \frac{P^2}{2m} + e\phi(\mathbf{r})$$

L'approximation de Thomas-Fermi suppose de plus que ce potentiel est lentement variable, de sorte que le potentiel chimique puisse être défini localement. Cette supposition faite, la densité de charge induite par le potentiel extérieur s'écrit<sup>9</sup> :

$$\delta\rho(\mathbf{r}) = -e \left\{ \int f(E + e\phi(\mathbf{r})) n(E) dE - \int f(E) n(E) dE \right\}$$

où  $f(E) = \frac{1}{\exp(\frac{E-\mu}{kT})+1}$  est la fonction de Fermi et  $n(E)$  la densité d'états par unité de volume de l'échantillon. Dans le régime linéaire, c'est à dire pour un potentiel extérieur faible, la densité de charge induite est simplement proportionnelle au potentiel effectif :

$$\delta\rho(\mathbf{r}) = -e^2 n(E_F) \phi(\mathbf{r}) = -\epsilon_0 k_s^2 \phi(\mathbf{r})$$

avec  $k_s^2 = \frac{e^2 n(E_F)}{\epsilon_0}$ . Il est possible de retrouver cette relation en faisant l'hypothèse que les électrons ont un mouvement diffusif. L'application sur un conducteur d'un champ électrique crée un courant, qui résulte de la conjugaison des processus de conduction et de diffusion. Celui-ci s'exprime en fonction du champ électrique local  $\mathbf{E}_{loc}$  dans le système :

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}_{loc} - eD\nabla\rho$$

A l'équilibre, le courant s'annule. Cette condition équivaut à la relation de Thomas-Fermi précédemment établie entre potentiel effectif et charge induite. Notons que le caractère fermionique des électrons est pris en compte par l'intermédiaire du coefficient de diffusion  $D$ .

---

9. En toute généralité, la densité électronique s'écrit  $\rho(\mathbf{r}) = -e \sum_i f_i |\psi(\mathbf{r})|^2$ , où  $\psi_i$  est une fonction propre de  $H_0 = \frac{P^2}{2m}$ . On a donc  $|\psi(\mathbf{r})|^2 = \frac{1}{V}$ , où  $V$  est le volume du système. En passant à la limite continue, on en déduit que  $\rho(\mathbf{r}) = -e \int dE f(E) n(E)$ , où  $n(E)$  est la densité d'états par unité de volume de l'échantillon.

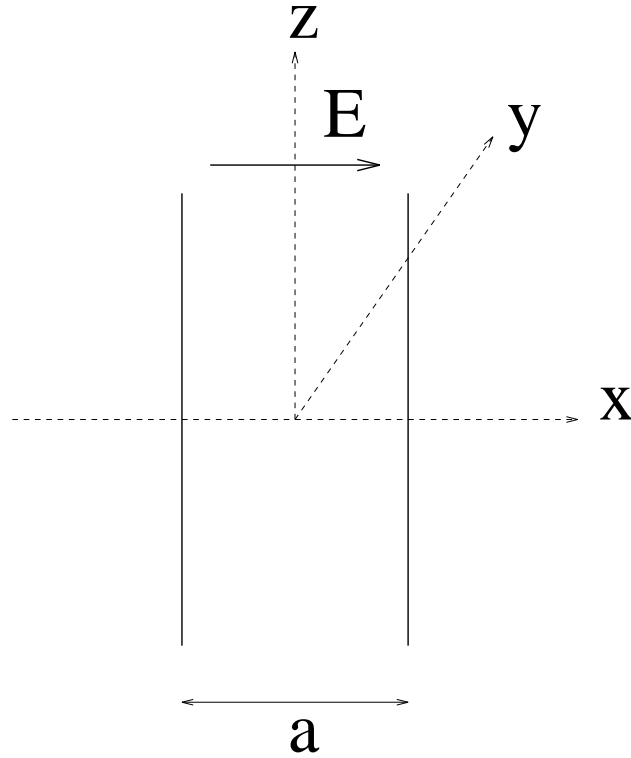


FIG. 2.8 – Plaque conductrice dans un champ électrique.

### 2.4.1 Exemple: Approximation de Thomas-Fermi dans une plaque infinie

La signification physique de l'approximation de Thomas-Fermi transparait à travers l'étude d'une géométrie simple: une plaque de largeur  $a$ , et infinie dans les deux autres directions, plongée dans un champ électrique uniforme  $E$  perpendiculaire à la plaque (fig. 2.8). L'équation de Thomas-Fermi pour ce système, ne dépend que d'une dimension:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x) = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0} = k_s^2 \phi(x) \quad (2.20)$$

Le théorème de Gauss précise qu'à l'extérieur de la plaque, le champ électrique est égal au champ extérieur. On déduit de ce résultat la solution de l'équation 2.20:

$$\phi_{T.F}(x) = -\frac{E}{k_s \operatorname{ch}\left(\frac{k_s a}{2}\right)} \operatorname{sh}(k_s x) \quad (2.21)$$

Le champ électrique effectif est non-nul au voisinage des bords de la plaque, sur une distance caractéristique de l'ordre de  $\frac{1}{k_s}$ . Ce résultat est à comparer à la solution électrostatique du problème, qui mène à une densité surfacique de charge, donc strictement nulle dans le volume.

## 2.5 Au delà de Thomas-Fermi

Comme nous l'avons vu, l'approximation de Thomas-Fermi ne prend pas en compte les interférences électroniques. Celles-ci peuvent à priori donner lieu à une correction quantique pour la fonction de réponse  $\chi$  et par voie de conséquence pour le potentiel effectif  $\phi$  et la polarisabilité  $\alpha$ :

$$\begin{cases} \chi = \chi_{T.F} + \delta\chi \\ \phi = \phi_{T.F} + \delta\phi \\ \alpha = \alpha_{T.F} + \delta\alpha \end{cases}$$

où  $\chi$  est la réponse au champ local. On notera  $\Xi = \Xi_{TF} + \delta\Xi$ , la réponse au champ extérieur, définie en notation matricielle par la relation:

$$\delta\rho = \chi\phi = \Xi\phi_{ext} \quad (2.22)$$

La relation 2.18 qui relie la densité de charge induite à la fonction de réponse et au potentiel effectif s'écrit sous forme matricielle:

$$\delta\rho = \chi(1 - U\chi)^{-1}\phi_{ext} \quad (2.23)$$

Le potentiel effectif est lui même relié à la fonction de réponse par la relation 2.19. La polarisabilité dans l'approximation Thomas-Fermi s'écrit quant à elle<sup>10</sup>:

$$\alpha_{TF} = \frac{1}{E}x\chi_{TF}\phi = \frac{1}{E}x\frac{\chi_{T.F}}{1 - U\chi_{T.F}}\phi_{ext} = \frac{1}{E}x\Xi_{cl}\phi_{ext} \quad (2.24)$$

où on a posé:  $\Xi_{cl} = \frac{\chi_{T.F}}{1 - U\chi_{T.F}}$ . On souhaite maintenant trouver la correction quantique  $\delta\Xi$  à la fonction de réponse écrantée. On pose par définition:

$$\Xi = \frac{\chi}{1 - U\chi} = \Xi_{cl} + \delta\Xi \quad (2.25)$$

En faisant l'hypothèse que les corrections quantiques sont petites devant la valeur classique<sup>11</sup>, les termes du deuxième ordre peuvent être négligés:

$$(1 - U\chi_{TF})\Xi - U\delta\chi\Xi_{cl} = \chi_{TF} + \delta\chi$$

$$\delta\Xi = \frac{\delta\chi}{1 - \chi_{TF}U}(1 + U\Xi_{cl})$$

---

10. On utilise toujours la notation matricielle. Soient deux vecteurs  $U$  et  $V$ , et une matrice  $A$  dont les éléments respectifs sont notés  $u_i$ ,  $v_i$ ,  $a_{ij}$ , représentant en notation matricielle les valeurs des opérateurs  $U$ ,  $V$  et  $A$  aux points  $\mathbf{r}_i$  et  $\mathbf{r}_j$ . Le produit  $UAV$  est une grandeur scalaire et vaut  $\sum_{i,j} u_i A_{ij} v_j$ , qui est la représentation matricielle de l'intégrale  $\int \int U(\mathbf{r}_1)A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)V(\mathbf{r}_2)dr_1 dr_2$ .

11. Dorénavant, nous dénommerons ainsi la valeur de Thomas-Fermi.

En utilisant le fait que  $1 + U\Xi_{cl} = \chi_{TF}^{-1}\Xi_{cl}$ , on montre que la correction quantique à la fonction de réponse écrantée a pour expression:

$$\delta\Xi = \Xi_{cl}\chi_{TF}^{-1}\delta\chi\chi_{TF}^{-1}\Xi_{cl} \quad (2.26)$$

On retrouve ainsi le résultat d'Efetov [107] qui a montré qu'au premier ordre, la correction quantique à la polarisabilité s'exprimait de manière simple en fonction du potentiel de Thomas-Fermi:

$$\delta\alpha \approx \frac{1}{E^2}\phi_{T.F}\delta\chi\phi_{T.F} \quad (2.27)$$

## 2.6 Expression quantique de la polarisabilité

### 2.6.1 Potentiel dépendant du temps

L'application d'un potentiel extérieur dépendant du temps  $V(t)$  sur un système physique, soulève le problème de la relaxation du système vers son état d'équilibre. Si les variations du potentiel sont "lentes", le système parvient à suivre le potentiel et reste à chaque instant à l'équilibre. C'est le cas d'un potentiel "adiabatique". Au contraire, dans le cas de variations très rapides, le système est toujours hors d'équilibre. Le retour vers l'équilibre se fait par l'intermédiaire des processus inélastiques, et dépend donc du couplage entre le système et son environnement. Dans la limite d'un couplage faible, ce processus peut être décrit au moyen d'une équation maîtresse sur la matrice densité [97]:

$$i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t} = [H_0 + V(t),\rho] - i\gamma(\rho - \rho_{equi}) \quad (2.28)$$

Le paramètre  $\gamma$  représente l'élargissement des niveaux d'énergie du système. Il caractérise l'ensemble des processus de dissipation.  $\rho_{equi}$  est la matrice densité à l'équilibre, qui satisfait la condition:

$$[H, \rho_{equi}] = 0 \quad (2.29)$$

Dans l'approximation de champ moyen, le hamiltonien d'un système mésoscopique placé dans un champ électrique alternatif de fréquence  $\omega$  est:

$$H = H_0 + e\mathbf{E}\cdot\mathbf{r} \exp(i\omega t) + \phi_{ind}(\mathbf{r},\gamma,t) \quad (2.30)$$

On suppose de plus que le potentiel effectif est toujours en phase avec le potentiel extérieur. Cela est justifié si la partie dissipative de la polarisabilité est très inférieure à la partie non-dissipative ( $\alpha'' \ll \alpha'$ ). L'expression de la matrice densité s'obtient en résolvant l'équation maîtresse. On en déduit la fonction de réponse et par suite la polarisabilité et sa correction quantique, qui s'expriment en fonction des vecteurs et des valeurs propres à un électron de  $H_0$ .

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{2e^2}{E} \sum_{\alpha \neq \beta} \frac{f_\alpha - f_\beta}{\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta} \frac{\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta - i\gamma}{\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta + i\omega - i\gamma} \langle \beta | \phi_{T.F}(\mathbf{r}) | \alpha \rangle \langle \beta | \mathbf{E} \cdot \mathbf{r} | \alpha \rangle \\ + \frac{\gamma}{\gamma + i\omega} \sum_{\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \epsilon_\alpha} \langle \alpha | \phi_{T.F}(\mathbf{r}) | \alpha \rangle \langle \alpha | \mathbf{E} \cdot \mathbf{r} | \alpha \rangle \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\delta\alpha = \frac{2e^2}{E} \sum_{\alpha \neq \beta} \frac{f_\alpha - f_\beta}{\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta} \frac{\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta - i\gamma}{\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta + i\omega - i\gamma} |\langle \beta | \phi_{T.F}(\mathbf{r}) | \alpha \rangle|^2 + \frac{\gamma}{\gamma + i\omega} \sum_{\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \epsilon_\alpha} |\langle \alpha | \phi_{T.F}(\mathbf{r}) | \alpha \rangle|^2 \quad (2.32)$$

## 2.7 Calcul de la correction quantique à la polarisabilité dans les différents régimes

### 2.7.1 Discussion sur la dépendance en flux des éléments de matrice et du dénominateur d'énergie

La polarisabilité dépend du flux via les éléments de matrice  $\langle \alpha | \phi_{T.F} | \beta \rangle$  et les énergies propres du hamiltonien  $H_0$ . La compréhension du comportement de la polarisabilité dans les différentes limites nécessite l'étude séparée de ces deux éléments.

#### Dénominateur d'énergie

Intéressons nous tout d'abord à la dépendance en flux de la quantité:

$$K = \left\langle \sum_{\alpha < \beta} \frac{1}{\epsilon_\beta - \epsilon_\alpha} \right\rangle \quad (2.33)$$

Comme  $K$  ne dépend que de la différence d'énergie ( $\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta$ ), on peut l'exprimer en fonction  $R(\epsilon)$ , qui représente la probabilité de trouver deux niveaux séparés par l'intervalle d'énergie  $\epsilon$ .

$$K = \int_0^{E_{max}} d\epsilon \int_0^\epsilon du \frac{R(u)}{u} \quad (2.34)$$

Dans le régime diffusif,  $R(s)$  est bien décrit par la théorie des matrices aléatoires. La probabilité de trouver deux niveaux adjacents dégénérés est en moyenne nulle. En termes simples, les niveaux ont tendance à se repousser: c'est ce qu'on appelle la rigidité spectrale. Celle-ci est encore plus marquée quand la symétrie par renversement du temps est brisée. Ceci a pour conséquence que  $K$  diminue en fonction du flux.

Nous avons calculé  $K$  à l'aide du modèle d'Anderson (appendice A), dans un anneau désordonné de taille  $80 \times 8$ , pour plusieurs valeurs de désordre correspondant au régime diffusif. La figure 2.9 illustre l'effet décrit ci-dessus. En l'absence d'autres contributions, ce terme donnerait donc lieu à une magnétopolarisabilité négative.

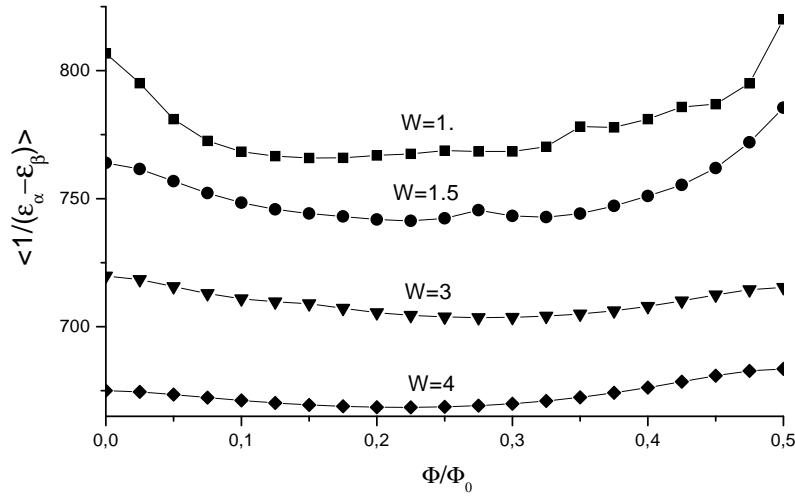


FIG. 2.9 –  $K$  calculé numériquement pour un anneau  $80 \times 8$ , pour différentes valeurs du désordre:  $w = 1.; 1.5; 3; 4$ .

### Eléments de matrice

Dans l'expression de la polarisabilité, interviennent également les éléments de matrice de l'opérateur  $X$ , ou du potentiel écranté. Quelle est leur comportement en fonction du flux?

Il s'agit des éléments de la forme  $|\langle \alpha | X | \beta \rangle|^2$ . Leur valeur dépend en moyenne de la différence d'énergie  $\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta$  [98, 99]. Ils sont à peu près constant pour  $|\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta| < E_c$ , puis décroissent comme  $1/(\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta)^2$ . Ces deux régimes se distinguent bien sur la figure 2.10, sur laquelle est tracé  $|X(\epsilon)|^2$  pour un anneau  $80 \times 8$  et plusieurs valeurs de désordre. On remarque une marche supplémentaire pour  $\epsilon \approx 5\Delta$ , qui correspond à l'énergie de Thouless dans la direction transverse de l'anneau:  $E_c = \frac{\hbar D}{W^2}$ , où  $D$  est le coefficient de diffusion et  $W$  la largeur de l'anneau. Sur la figure 2.11 sont par ailleurs reportés les éléments de matrice diagonaux et non-diagonaux toujours pour un anneau de taille  $80 \times 8$  et un désordre  $w = 2$ . On remarque en particulier qu'ils ont des dépendances en flux opposées, résultant du fait que  $Tr(X^2) = \sum_\alpha X_{\alpha\alpha}^2 + \sum_{\alpha \neq \beta} X_{\alpha\beta}^2$  est indépendant du flux<sup>12</sup>. Les éléments diagonaux diminuent en fonction du flux tandis que les éléments non-diagonaux augmentent. En l'absence du dénominateur d'énergie  $\frac{1}{\epsilon_\beta - \epsilon_\alpha}$ , ils donneraient donc lieu à une magnétopolarisabilité positive.

Il est possible d'évaluer la variation en flux des éléments de matrice diagonaux.  $X_{\alpha,\alpha}$  est en effet relié à la sensibilité des énergies au champ électrique appliqué, puisque  $X_{\alpha,\alpha} = \frac{\partial \epsilon_\alpha}{\partial E}$ . Comme le champ électrique conserve la symétrie par renversement du temps, la dérivée typique des niveaux d'énergie  $\langle \left| \frac{\partial \epsilon_\alpha}{\partial E_0} \right|^2 \rangle$  est proportionnel à  $\frac{1}{\beta}$ .

12. En effet, la trace d'une matrice ne dépend pas de la base qu'on considère.

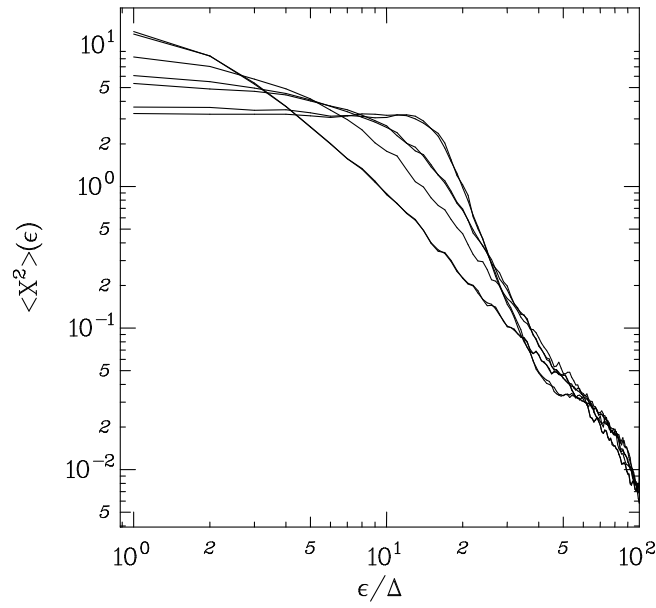


FIG. 2.10 – Variation en énergie des éléments de matrice non diagonaux dans un anneau de longueur  $L = 60$  et comportant  $M = 4$  canaux, pour plusieurs valeurs de désordre:  $w = 0.9; 1.2; 1.4; 1.7$ .

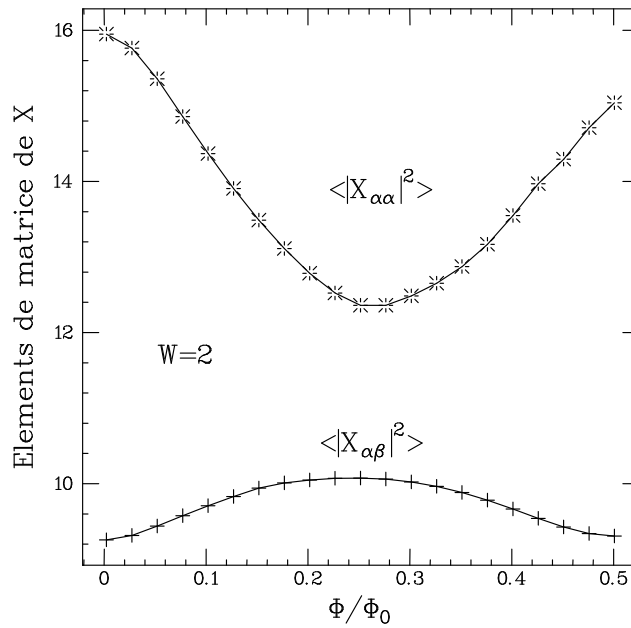


FIG. 2.11 – Dépendance en flux des éléments de matrice diagonaux et non diagonaux, dans un anneau de longueur  $L = 60$  et comportant  $M = 4$  canaux, pour  $W=2$ . Le facteur 2 à flux nul entre les éléments diagonaux et non-diagonaux est dû au fait qu'on a seulement considéré les états tels que  $\epsilon_\alpha < \epsilon_\beta$ .

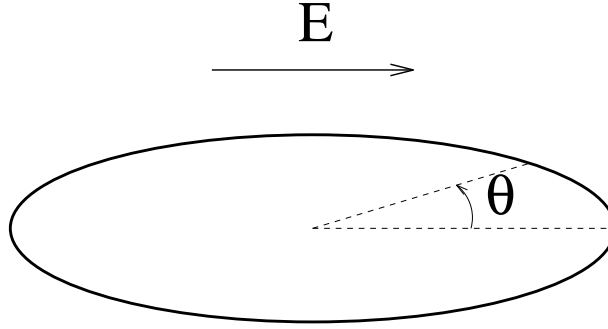


FIG. 2.12 – Anneau unidimensionnel dans un champ électrique uniforme.

Par conséquent:

$$|X_{\alpha,\alpha}|^2(\phi = \frac{\phi_0}{4}) = \frac{1}{2}|X_{\alpha,\alpha}|^2(\phi = 0) \quad (2.35)$$

La figure 2.9 montre que ce dernier résultat n'est vrai que qualitativement.

### 2.7.2 Ensemble Canonique

L'ensemble canonique correspond à la situation pour laquelle le nombre d'électrons dans le système est fixé. C'est le cas en particulier des systèmes électriquement isolés, qui sont l'objet de l'étude expérimentale effectuée au cours de cette thèse. A température nulle, la correction quantique dans cet ensemble se réduit à:

$$\alpha = \frac{2e^2}{E^2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=N+1}^{N_t} \frac{|\langle \alpha | \phi_{T.F}(\mathbf{r}) | \beta \rangle|^2}{\epsilon_\beta - \epsilon_\alpha} \quad (2.36)$$

où  $N_t$  dénote le nombre total d'état. Par ailleurs, la polarisabilité thermodynamique est directement reliée au courant permanent en présence d'un champ électrique par la relation<sup>13</sup>.

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \phi} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 I_{per}}{\partial E^2} \quad (2.37)$$

Cette relation se généralise pour un échantillon de forme quelconque traversé par un champ magnétique, et relie alors l'aimantation du système à la polarisabilité:  $\frac{\partial \alpha}{\partial B} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 M}{\partial E^2}$ .

#### Anneau unidimensionnel propre

Tout comme pour le courant permanent, il est possible de calculer exactement le moment dipolaire induit dans un anneau 1D non désordonné, pour un champ électrique appliqué dans son plan (Fig. 2.12). Intéressons nous tout d'abord au cas sans écrantage.

13. En effet, le courant permanent et la polarisabilité s'expriment tout deux en fonction de l'énergie libre du système:  $I = -\frac{\partial F(E,\phi)}{\partial \phi}$  et  $\alpha = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(E,\phi)}{\partial E^2}$ .



**Sans écrantage** Les fonctions propres ne dépendent que de l'angle  $\theta$ , repérant la position dans l'anneau et satisfont l'équation de Shrödinger unidimensionnel:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \psi(\theta) = E \psi(\theta)$$

De plus, le flux magnétique, associé à la périodicité de l'anneau, impose la condition aux limites:

$$\psi(\theta + 2\pi) = e^{i2\pi \frac{\phi}{\phi_0}} \psi(\theta)$$

Cette équation se résoud facilement. En utilisant les propriétés de parité et de périodicité du spectre, on classe ensuite les valeurs propres par ordre croissant dans l'intervalle  $[-\frac{\phi_0}{2}, \frac{\phi_0}{2}]$ :

$$\begin{cases} \epsilon_{2p} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(p + \frac{\phi}{\phi_0}\right)^2 & \text{pour } p \text{ pair} \\ \epsilon_{2p+1} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(p - \frac{\phi}{\phi_0}\right)^2 & \text{pour } p \text{ impair} \end{cases} \quad (2.38)$$

Et les fonctions d'onde correspondantes:

$$\begin{cases} \psi_{2p}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i\theta \left(p + \frac{\phi}{\phi_0}\right)} & \text{pour } p \text{ pair} \\ \psi_{2p+1}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i\theta \left(p - \frac{\phi}{\phi_0}\right)} & \text{pour } p \text{ impair} \end{cases} \quad (2.39)$$

En raison de la géométrie annulaire, le champ électrique ne couple que certains états. En particulier, l'élément de matrice correspondant à deux états adjacents en énergie est nul. Seuls deux états possédant des nombre quantique  $p$  et  $q$ , tels que  $p - q = \pm 2$  sont couplés.

$$\begin{cases} \langle p | X | q \rangle = \frac{R}{4\pi} & \text{si } p=q \pm 2 \\ \langle p | X | q \rangle = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La polarisabilité dépend donc de la parité du nombre d'électrons  $N$ .

$$\alpha_N = 2e^2 \left\{ \frac{|\langle N+2 | X | N \rangle|^2}{\epsilon_{N+2} - \epsilon_N} + \frac{|\langle N+1 | X | N-1 \rangle|^2}{\epsilon_{N+1} - \epsilon_{N-1}} \right\}$$

A flux nul et pour  $N \gg 1$ :

$$\alpha_N = \frac{1}{8\pi^4} \frac{L^4}{a_0} \frac{1}{N} \quad (2.40)$$

La valeur moyenne s'obtient en moyennant sur le remplissage. En additionnant les contributions de deux niveaux adjacents, on montre que la polarisabilité décroît à bas flux.

$$\frac{\delta\alpha}{\alpha} = \frac{\alpha\left(\phi = \frac{\phi_0}{4}\right) - \alpha(\phi = 0)}{\alpha(\phi = 0)} \approx -\frac{1}{4N^2} \quad (2.41)$$

Il s'agit donc d'un tout petit effet. Nous avons vérifié l'existence de cet effet par des simulations numériques à l'aide du modèle d'Anderson (voir appendice A) et étudié son comportement lorsqu'on augmente le désordre dans l'anneau. Sur la figure 2.13 est reportée la magnétopolarisabilité pour un anneau de taille  $L = 100$ , pour plusieurs valeurs de désordre. A désordre nul, les résultats sont en accord qualitatif avec la formule 2.41. L'effet diminue ensuite lorsqu'on augmente le désordre suivant une loi proche de  $\frac{1}{w^2}$ .

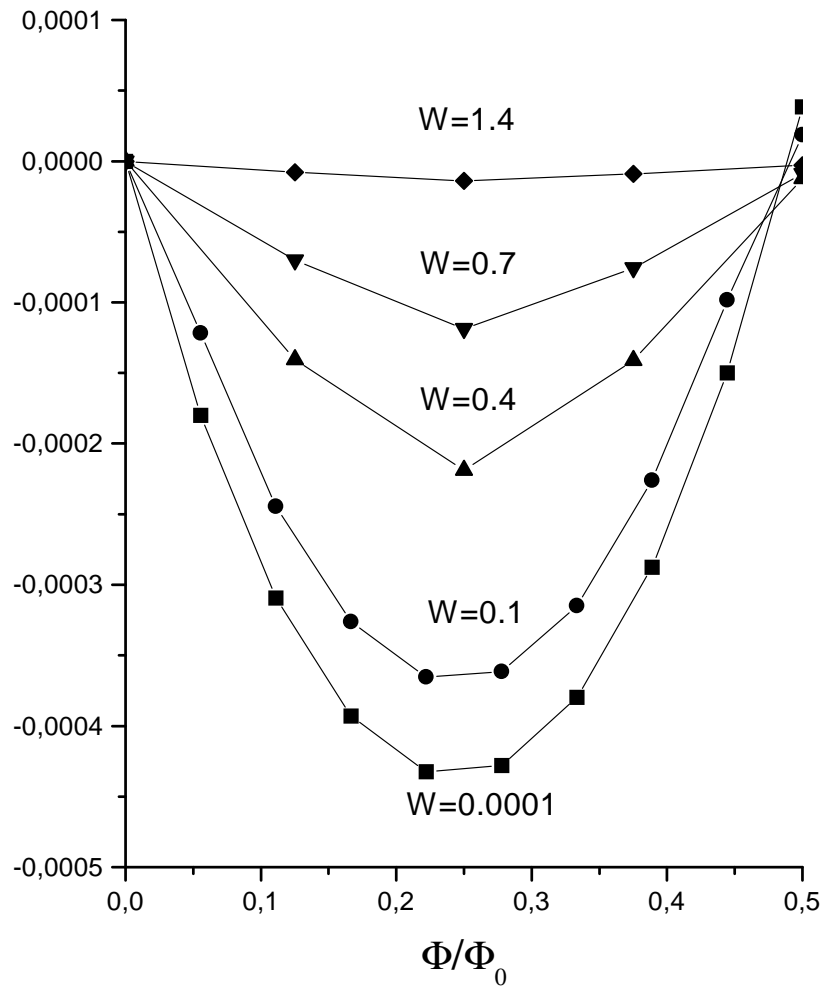


FIG. 2.13 – Magnétopolarisabilité d'un anneau unidimensionnel, de longueur  $L = 100$ , calculée à l'aide du modèle d'Anderson pour plusieurs valeurs de désordre:  $w = 10^{-4}$ ; 0.1; 0.4; 0.7; 1.4.

**Avec écranage** Afin de traiter l'écranage dans l'anneau, supposons tout d'abord que la densité de charge induite est de la forme  $\rho(\theta) = \lambda \cos(\theta) \delta(z) \delta(\rho - R)$ , de laquelle on déduit le potentiel induit dans l'anneau:

$$\phi_{ind}(\theta) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\theta')}{\left| \sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) \right|} d\theta'$$

L'intégrale est logarithmiquement divergente et il est nécessaire, afin de la régulariser, d'introduire une coupure  $\theta_c$  reliée à la largeur finie du fil:

$$\phi_{ind}(\theta) \approx \int_{\theta-\epsilon}^{\theta+\epsilon} \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \cos(\theta)}{\left| \left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) \right|} d\theta' \approx \frac{\lambda \cos(\theta) \ln\left(\frac{\epsilon}{\theta_c}\right)}{4\pi\epsilon_0}$$

Finalement le potentiel écrané s'écrit  $\phi(\theta) = \cos(\theta) (E + \lambda J)$ , avec  $J = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\epsilon}{\theta_c}\right)$ . La polarisabilité s'obtient alors soit à partir du potentiel calculé ci-dessus, soit directement à partir de la charge. Cette relation auto-consistante fixe la valeur du paramètre  $\lambda$ , dont on déduit la polarisabilité de l'anneau.

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{2J\alpha_0}{R^3}} \quad (2.42)$$

où  $\alpha_0$  est valeur de la polarisabilité en l'absence d'écranage, qui a été calculée précédemment. Comme  $J \gg 1$ , l'écranage réduit la valeur 2.41 trouvée précédemment.

### Système désordonné

Dans le régime diffusif, il n'existe pas une manière simple de calculer la polarisabilité canonique. Nous avons donc effectué un calcul numérique de la polarisabilité d'un anneau diffusif de rayon  $R$  et de largeur  $W$ , par le biais du modèle d'Anderson. De manière surprenante, nous avons trouvé dans ce régime une magnétopolarisabilité nulle. La dépendance en flux des dénominateurs d'énergie est exactement compensée par celle des éléments de matrice! Nous sommes sur ce point en désaccord avec Blanter [82], lequel prédit une magnétopolarisabilité négative pour cet ensemble statistique. La théorie des matrices aléatoires ne permet pas de rendre compte de cet effet.

Ce résultat peut se comprendre par un argument de symétrie. Un potentiel lentement variable à l'échelle de la longueur d'onde de Fermi a un effet sur la phase de la fonction d'onde uniquement (voir appendice B). Dans le régime diffusif, les corrections quantiques résultent de l'interférence de trajectoires renversées par le sens du temps. Comme le champ électrique ne brise par la symétrie par renversement du temps, la différence de phase entre de telles trajectoires est indépendante du champ électrique. On en déduit d'après la formule 2.37, que la polarisabilité est indépendante du flux dans ce régime.

### Ensemble grand canonique

Dans l'ensemble grand canonique le potentiel chimique du système est fixé par celui du réservoir, avec lequel il peut échanger des électrons. Grâce à la propriété d'ergodicité dans le régime diffusif, la moyenne sur le désordre est équivalente à la moyenne sur le potentiel chimique.

$$\langle \rangle = \frac{1}{\Delta\mu} \int_{\mu_1}^{\mu_2} \quad (2.43)$$

Cette propriété apporte une simplification supplémentaire pour nos calculs. En moyennant sur tout le spectre, on peut ainsi montrer que

$$\left\langle \frac{f_\alpha - f_\beta}{\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta} \right\rangle = \frac{1}{E_F} \quad (2.44)$$

Ainsi la formule 2.32 se simplifie considérablement:

$$\langle \delta\alpha \rangle = \frac{2e^2}{E_F} \sum_{\alpha \neq \beta} \frac{\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta - i\gamma}{\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta + i\omega - i\gamma} |\langle \beta | \phi_{T.F}(\mathbf{r}) | \alpha \rangle|^2 + \frac{\gamma}{\gamma + i\omega} \sum_{\alpha} \delta(\epsilon_\alpha - \mu) |\langle \alpha | \phi_{T.F}(\mathbf{r}) | \alpha \rangle|^2$$

A ce stade, plusieurs régimes de fréquence sont à considérer.

**Polarisabilité statique:**  $\omega \ll \gamma$  Dans cette limite, la polarisabilité est simplement égale à la trace du potentiel écrant:

$$\langle \delta\alpha_s^{GC} \rangle = \frac{2e^2}{E_F} Tr(\phi_{T.F}^2) \quad (2.45)$$

Etant donné que la trace d'une matrice est indépendante de la base considérée, cette quantité ne dépend pas du flux magnétique. A basse fréquence, la correction quantique à la polarisabilité est donc nulle.

**Polarisabilité dynamique:**  $\omega \gg \gamma$  Dans cette limite, nous allons pouvoir évaluer la polarisabilité de façon analytique. Comme dans le cas canonique, on s'intéresse à un anneau diffusif de rayon  $R$  et de largeur  $W$ . Le terme de relaxation étant nul, il reste uniquement le terme:

$$\langle \delta\alpha \rangle = \frac{2e^2}{E_F} \sum_{\alpha > \beta} |\langle \beta | \phi_{T.F}(\mathbf{r}) | \alpha \rangle|^2 \quad (2.46)$$

Pour aller plus loin, il est nécessaire d'évaluer l'élément de matrice  $|\phi_{\alpha,\beta}^{T.F}|^2$ . La formule de Mac Millan [100] donne pour cela une précieuse indication puisqu'elle évalue ce même élément de matrice pour un vecteur d'onde donné.

$$|\langle \alpha | e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} | \beta \rangle|^2 = \frac{\Delta}{\pi} \frac{Dq^2}{D^2q^4 + (\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta)^2} \quad (2.47)$$

Le potentiel écranté se décompose en série de Fourier:

$$\phi_{T.F}(\mathbf{r}) = \sum_{n=-M/2}^{M/2} A_n e^{i\mathbf{q}_n \cdot \mathbf{r}}$$

où  $\mathbf{q}_n = \frac{n\pi}{W}\mathbf{u}_r + \frac{1}{R}\mathbf{u}_\theta$ . A faible énergie, la somme est dominée par le terme de plus petit vecteur  $q_{min} = \frac{2\pi}{L}$  pour lequel:

$$\phi_{\alpha,\beta}^2 \approx \frac{1}{Dq_{min}^2} = \frac{\Delta}{\pi E_c} \left( \frac{8R\lambda_s}{3\pi^2 W} \right)^2$$

où  $\lambda_s$  est la longueur d'écrantage,  $E_c = \frac{\hbar D}{2\pi R}$  l'énergie de Thouless dans la direction transverse et  $\Delta$  l'écartement moyen entre les niveaux électroniques.

Par ailleurs,  $\langle \phi_{\alpha\beta}^2(GUE) - \phi_{\alpha\beta}^2(GOE) \rangle = - \langle \phi_{\alpha\alpha}^2(GUE) - \phi_{\alpha\alpha}^2(GOE) \rangle$ . D'autre part, la variation en flux des éléments diagonaux est donnée par la formule 2.35, ce qui permet de déduire que  $\langle \phi_{\alpha\beta}^2(GUE) - \phi_{\alpha\beta}^2(GOE) \rangle = \frac{1}{2} \langle \phi_{\alpha\alpha}^2(GOE) \rangle$ . Comme les éléments diagonaux et non-diagonaux sont égaux à basse énergie<sup>14</sup>, on a finalement  $\langle \phi_{\alpha\beta}^2(GUE) - \phi_{\alpha\beta}^2(GOE) \rangle = \frac{1}{2} \langle \phi_{\alpha\beta}^2(GOE) \rangle$ . Ainsi la correction quantique à la polarisabilité vaut:

$$\frac{\delta\alpha_D^{GC}}{\alpha_0} = \left( \frac{8}{3\pi^3} \right) \frac{\lambda_s}{W} \frac{1}{g} \quad (2.48)$$

où  $\alpha_0$  est la valeur de la polarisabilité classique<sup>15</sup>,  $g = \frac{E_c}{\Delta}$  la conductance adimensionnée.

La magnétopolarisabilité augmente quand on applique un flux magnétique. Il s'agit d'une magnétopolarisabilité *positive*, qui est de signe opposé à la polarisabilité canonique dans le régime ballistique, et d'amplitude beaucoup plus grande. Le signe et l'ordre de grandeur de la magnétopolarisabilité a été confirmé par des simulations numériques dans deux géométries différentes: un anneau et un carré. La polarisabilité dynamique, calculée dans un anneau  $80 \times 8$  pour  $w = 1$  et  $w = 2$ , est comparée à la polarisabilité thermodynamique sur la figure 2.14.

Un fait remarquable est que cet effet est inversement proportionnel à la conductance et augmente donc avec le désordre dans le régime diffusif. La dépendance de  $\frac{\delta\alpha}{\alpha}$  avec le désordre est illustrée par la figure 2.15. Par contre, la magnétopolarisabilité diminue avec la densité électronique à cause des effets conjugués de la diminution de la longueur d'écrantage<sup>16</sup> ainsi que de l'augmentation de la conductance.

La géométrie annulaire est particulièrement favorable à l'observation de cet effet. L'extrapolation de 2.48 mène à  $\delta\alpha/\alpha = (\Delta/2E_c)(\lambda_s/R)$  pour un disque de rayon  $R$  et  $\delta\alpha/\alpha = (\Delta/2E_c)(\lambda_s/R)^2$  pour une sphère. Dans un anneau gravé dans une hétérojonction GaAs/GaAlAs avec les paramètres suivant:  $L = 8\mu m$ ,  $\lambda_s = 400\text{\AA}$ ,  $M = 10$ ,  $E_c = 7\Delta$  est de l'ordre de  $3 \times 10^{-3}$ .

14. Les éléments de matrice diagonaux  $\phi_{\alpha\alpha}^2$ , et non diagonaux  $\phi_{\alpha\beta}^2$  sont égaux pour  $|\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta| < E_c$ .

15. On a pris la limite  $2d$  correspondant à un disque pour lequel  $\alpha_0 = \epsilon_0 \frac{16}{3} R^3$ . Pour un anneau quasi-unidimensionnel,  $\alpha_0 = \frac{\epsilon_0 \pi^2 R^3}{\ln(\frac{R}{W})}$  (voir section 2.1.2). Seul le facteur numérique dans la formule 2.48 est modifié si on considère cette dernière valeur.

16. Ceci n'est vrai qu'à  $3d$ : La longueur d'écrantage diminue à  $3d$  quand on augmente la densité électronique. En revanche, elle est indépendante de la densité à  $2d$ .

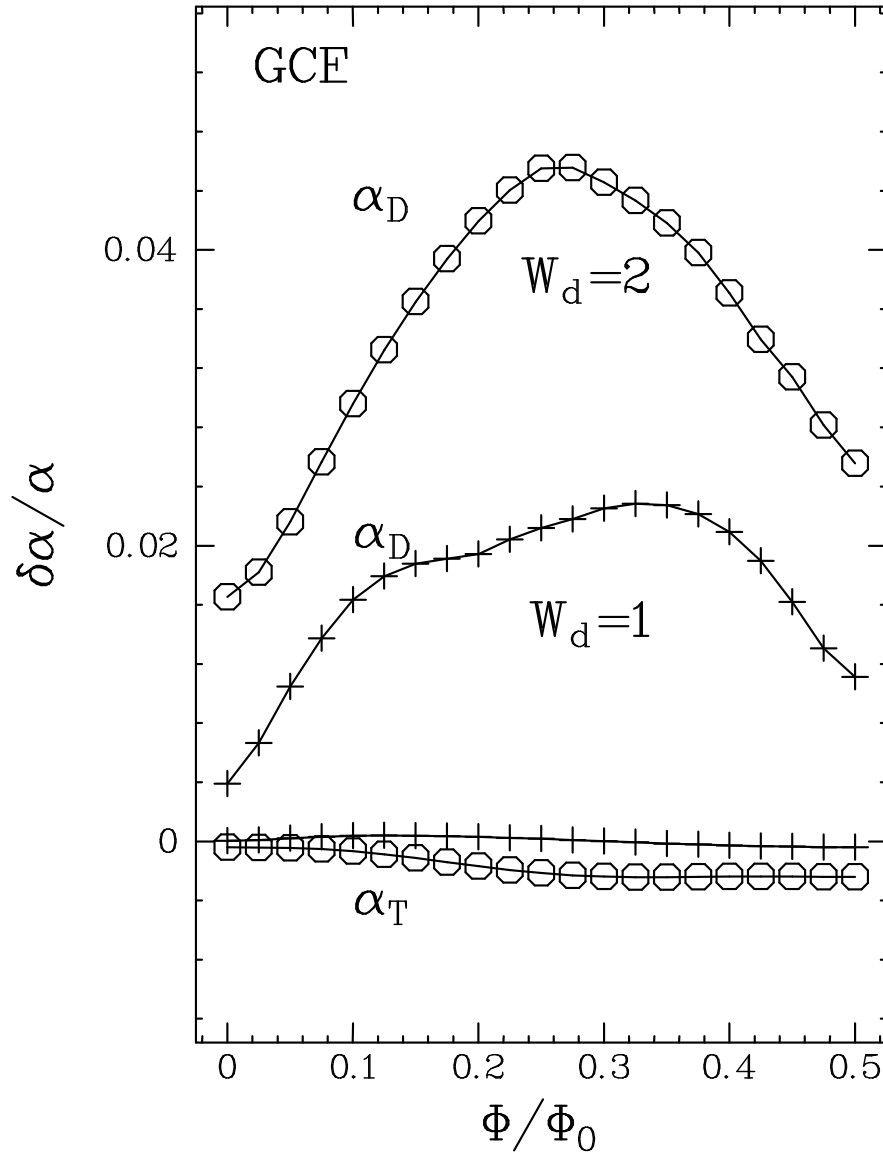


FIG. 2.14 – Magnétopolarisabilité dynamique ( $\omega \gg \gamma$ ) et thermodynamique ( $\omega \ll \gamma$ ) dans l'ensemble grand canonique d'un anneau désordonné  $80 \times 8$ , calculée à l'aide du modèle d'Anderson pour  $w = 1$  et  $w = 2$ .

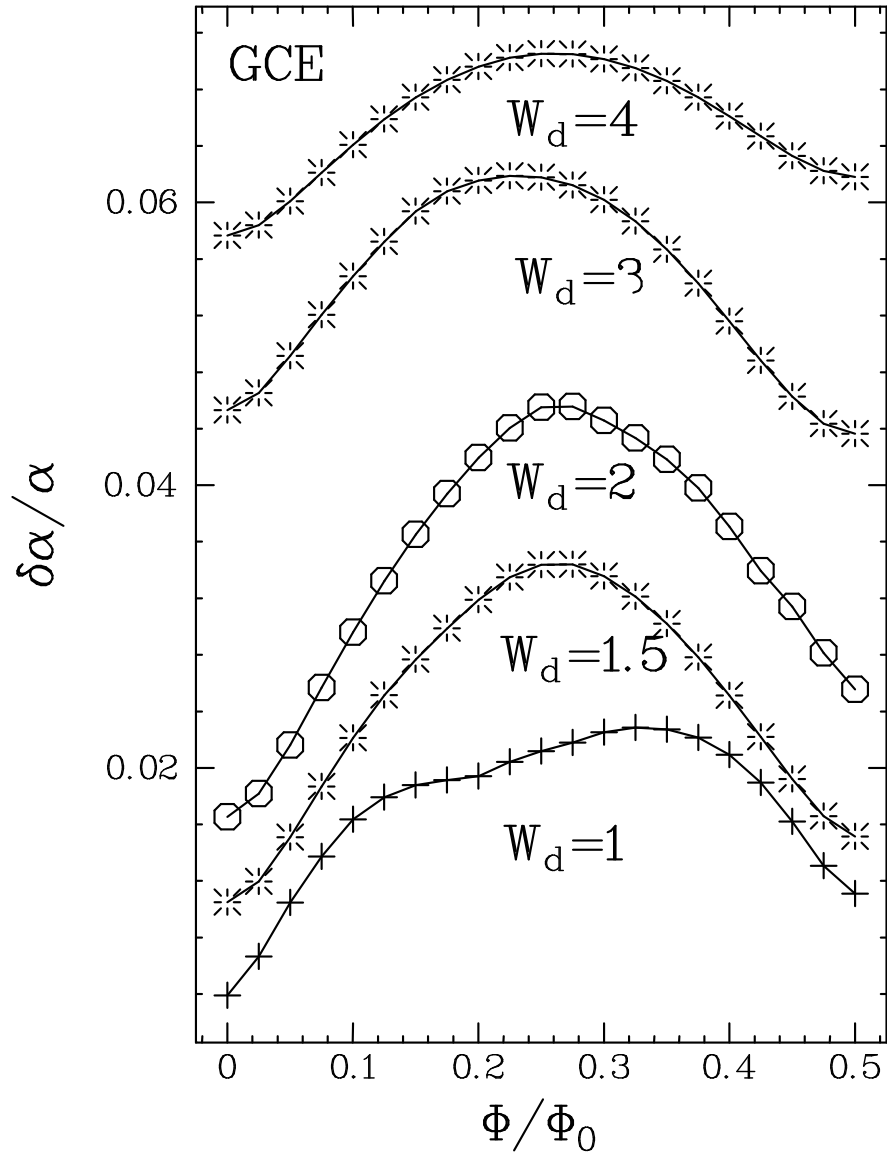


FIG. 2.15 – Magnétopolarisabilité dynamique ( $\omega \gg \gamma$ ) dans l'ensemble grand canonique d'un anneau désordonné  $80 \times 8$ , calculée à l'aide du modèle d'Anderson pour plusieurs valeurs de désordre:  $w = 1.; 1.5; 2; 3; 4$ .

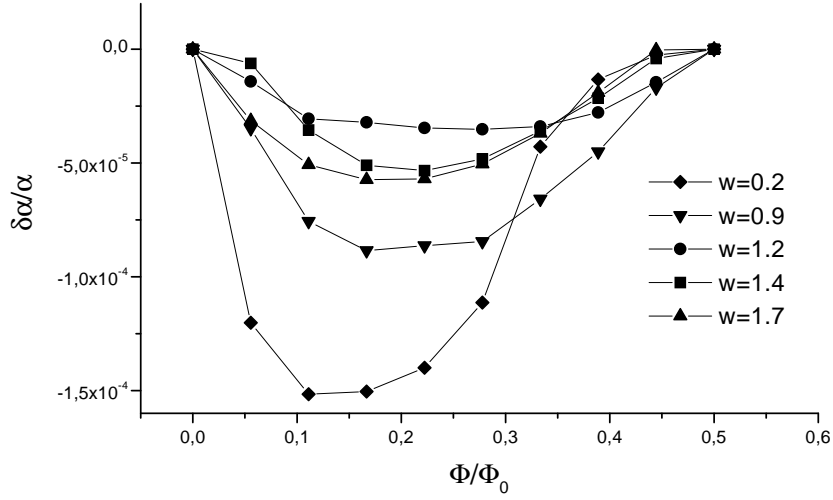


FIG. 2.16 – Correction à la polarisabilité par les interactions dans un anneau de longueur  $L = 60$  et comportant  $M = 4$  canaux, pour plusieurs valeurs de désordre:  $w = 0.9; 1.2; 1.4; 1.7$ .

### 2.7.3 Correction par les interactions dans l'ensemble canonique

Nous avons montré que dans l'ensemble canonique et pour un désordre correspondant au régime diffusif, il n'existe pas de correction quantique à la polarisabilité. Cependant, nous avons négligé dans ces calculs les interactions entre électrons. Comment influencent-elles la magnétopolarisabilité?

En présence d'interaction les énergie propres et les fonctions propres du système sont modifiées. Une approche simple consiste à traiter le problème par la théorie des perturbations. Plutôt qu'un potentiel coulombien, on préfère considérer une interaction sur site. Cela est justifié à forte densité électronique, puisque l'interactions entre deux électrons est dans ce cas très écrantée par l'ensemble des autres électrons.

Au premier ordre en perturbation, la variation d'énergie totale est:

$$\delta E_{tot} = U \int n(\mathbf{r})^2 dr \quad (2.49)$$

La correction à la polarisabilité canonique par les interactions s'obtient par la formule:

$$\delta\alpha = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2(\delta E_{tot})}{\partial^2 E} \quad (2.50)$$

Sur la figure 2.16 est reportée  $\frac{\delta\alpha}{\alpha}$  pour un anneau de longueur  $L = 60$  et comportant 4 canaux. Le désordre est choisi de telle sorte que les électrons aient un mouvement diffusif dans la direction longitudinale de l'anneau.



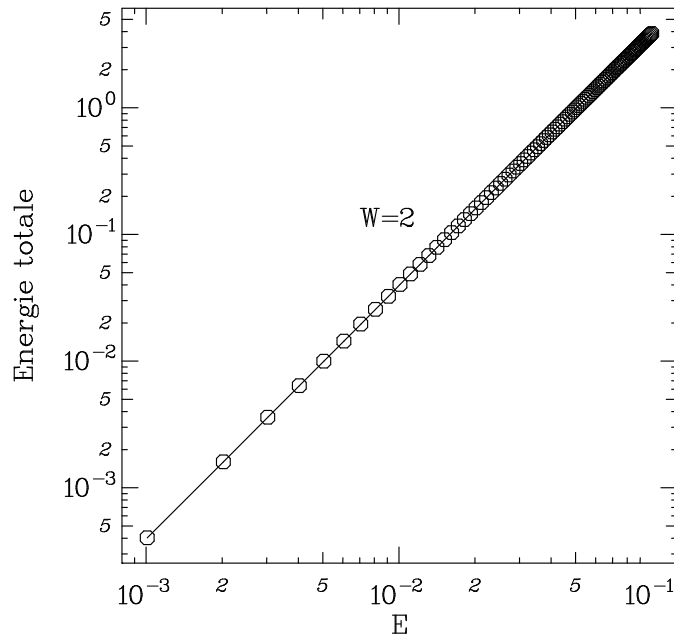


FIG. 2.17 – *Energie totale en fonction du champ électrique calculée à l'aide du modèle d'Anderson pour un anneau de taille  $40 \times 5$ , pour un désordre  $w = 2$ .*

Les interactions donnent lieu à une magnétopolarisabilité négative. Celle-ci est plus importante dans le régime ballistique que dans le régime diffusif, dans lequel elle semble peu dépendre du désordre. L'ordre de grandeur de cet effet reste néanmoins petit en comparaison de la polarisabilité dynamique dans l'ensemble grand-canonique.

#### 2.7.4 Discussion sur l'approximation de réponse linéaire

Afin d'estimer le domaine de validité de la réponse linéaire, nous avons calculé l'énergie totale d'un anneau pour plusieurs valeurs de champ électrique.

Celle-ci se développe en puissance du champ électrique:

$$U(E) = U_0 + d_0 E + \alpha E^2 + \dots$$

Le coefficient  $d_0$  correspond au moment dipolaire spontané de l'anneau résultant des fluctuations spatiales des charges en présence de désordre. La moyenne d'ensemble de  $d_0$  est nulle. L'énergie moyenne varie ainsi quadratiquement avec  $E$  à petit champ. Comme le montre la figure 2.17, nous avons observé des déviations du comportement quadratique au delà d'un champ critique  $E_{max}$  tel que

$$eE_{max}R \sim E_F \quad (2.51)$$

Soulignons que cette valeur critique est bien au delà du critère donné dans la référence [95] et justifie l'utilisation de la réponse linéaire jusqu'à des champs très élevés. Prenons l'exemple

d'un gaz 2D dans des hétérostructures de type GaAs/GaAlAs dans lesquelles  $E_F \sim 150K$ . Le critère autorise la réponse linéaire jusqu'à des champs tels que  $ER \sim 10mV$ .

## 2.8 Résumé des résultats

Dans le tableau ci-dessous sont résumés l'ensemble des résultats obtenus pour  $\frac{\delta\alpha}{\alpha}$  dans les régimes ballistique et diffusif, pour les ensembles canonique et grand canonique.

Régime Ballistique		
	$\omega \ll \gamma$	$\omega \gg \gamma$
C	$\frac{-1}{4N^2}$	$\frac{-1}{4N^2}$
GC	0	0
Régime Diffusif		
	$\omega \ll \gamma$	$\omega \gg \gamma$
C	0	0
GC	0	$\left(\frac{8}{3\pi^3}\right) \frac{\lambda_F}{W} \frac{1}{g}$

## Chapitre 3

# Dissipation électrique et magnétique

### 3.1 Comment mesurer la conductance d'un système?

Il existe plusieurs façons de mesurer la conductance d'un système. Celles-ci sont équivalentes pour un conducteur macroscopique, dont la taille est très grande devant la longueur de cohérence de phase électronique. Qu'en est-t-il dans le régime mésoscopique?

#### 3.1.1 Système connecté

La méthode la plus utilisée consiste à connecter le système à des appareils de mesure, comme on l'a schématisé sur la figure 3.1. On mesure la différence de potentiel  $V$  aux bornes de l'échantillon pour un courant  $I$  donné le traversant, suffisamment petit afin de rester dans le régime linéaire. La conductance est alors donnée par:

$$I = GV \quad (3.1)$$

Cette méthode correspond à un couplage fort entre le système et les appareils de mesure. Les états électroniques décrivant le système isolé sont fortement hybridés avec ceux des fils infinis. Par conséquent, aussi petit soit-il, un échantillon présente un spectre d'énergie continu dès qu'il est connecté à des fils de mesure infinis. La conductance est une mesure de la *transmission* du

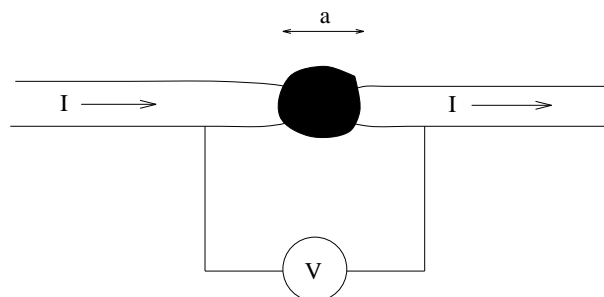
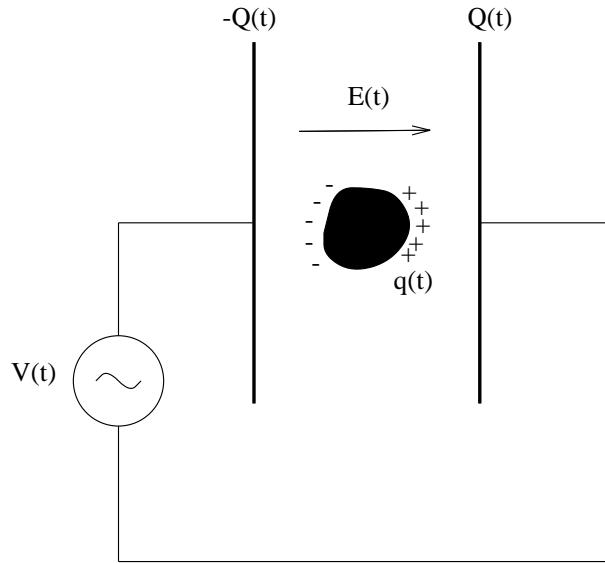


FIG. 3.1 – Schéma de principe d'une mesure de transport.

FIG. 3.2 – *Mesure capacitive de la conductance.*

système, comme l'exprime la formule de Landauer [31]; seuls participent les propriétés élastiques de diffusion électronique sur les impuretés.

### 3.1.2 Système isolé

Il est également possible de mesurer la conductance d'un système électriquement isolé. Il s'agit dans ce cas de mesures à *fréquence finie*.

#### Mesure capacitive

Une première méthode consiste à placer le conducteur entre les plaques d'une capacité<sup>1</sup>, à laquelle on applique une différence de potentiel alternative à la fréquence  $\omega$ . La capacité produit un champ électrique  $E(t)$ , qui polarise l'échantillon:

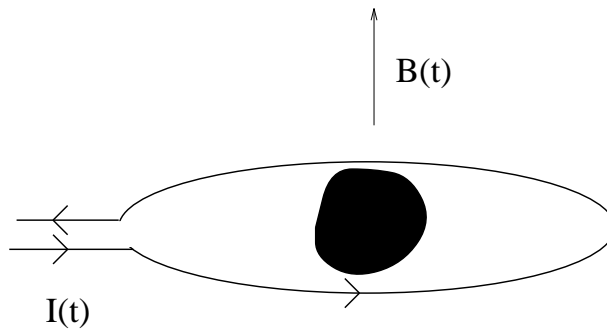
$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = \int \delta\rho(t)\mathbf{r}d\mathbf{r} = \epsilon_0\chi_e\mathbf{E}(\mathbf{t}) \quad (3.2)$$

La capacité est alors modifiée proportionnellement à la susceptibilité électrique  $\chi_e$  de l'échantillon.

$$\frac{\delta C}{C} \approx \frac{\chi_e}{V} \quad (3.3)$$

où  $V$  est le volume effectif de la capacité. Sous l'action du champ électrique, les électrons effectuent un mouvement oscillant d'un bord à l'autre de l'échantillon et les courants ainsi générés dissipent de l'énergie. Ceux-ci sont reliés au moment dipolaire par la relation:

1. Plus généralement, il s'agit de coupler le conducteur à une capacité.

FIG. 3.3 – *Mesure inductive de la conductance.*

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \mathbf{I}a \quad (3.4)$$

On définit la conductance  $G_e$  comme le coefficient de proportionnalité entre le courant et la chute de potentiel dans l'échantillon<sup>2</sup>,  $V = Ea$ . La partie imaginaire de la susceptibilité électrique s'exprime en fonction de la conductance:

$$\chi_e''(\omega) = \frac{G_e a^2}{i\omega\epsilon_0} \quad (3.5)$$

### Mesure inductive

Une deuxième méthode consiste à placer le conducteur au centre d'une boucle d'inductance (fig.3.3), dans laquelle on fait circuler un courant alternatif à la fréquence  $\omega$ . Celle-ci produit un champ magnétique, qui est à l'origine d'une force électromotrice  $V = -\frac{\partial\phi}{\partial t}$ . Le courant induit dans l'échantillon est proportionnel à la conductance de ce dernier. Il lui est associé un moment magnétique  $M = Ia^2 = \frac{\chi_m B}{\mu_0}$ , permettant de relier la susceptibilité magnétique à la conductance:

$$\chi_m(\omega) = -i\mu_0\omega a^4 G_m(\omega) \quad (3.6)$$

La variation d'inductance qui en résulte est proportionnelle à  $\chi_m$ :

$$\frac{\delta L}{L} \approx \frac{\chi_m}{V} \quad (3.7)$$

où  $V$  est le volume effectif de l'inductance.

La conductance d'un échantillon électriquement isolé est une mesure de l'*absorption* du champ par le système. Celle-ci est sensible au caractère discret du spectre d'énergie. On atteint cette limite quand l'écartement moyen entre les niveaux électroniques  $\Delta$ , est supérieur à leur élargissement  $\gamma$ . Dans les deux méthodes précédemment décrites, le système est faiblement couplé aux appareils de mesure, donnant ainsi l'opportunité d'explorer cette limite. En l'absence de

---

2. En principe, la conductance n'est définie que si il existe des equipotentielle sur l'échantillon. De manière générale, c'est la conductivité  $\sigma$  qui est bien définie.

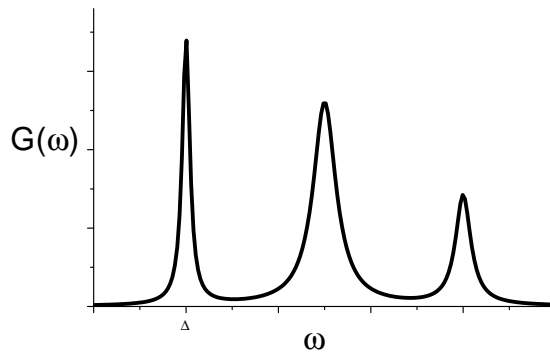


FIG. 3.4 – Conductance d'un système à spectre discret.

couplage avec l'environnement, la conductance est strictement nulle. En pratique,  $\gamma$  a toujours une valeur finie. Des pics de conductance sont alors observés chaque fois que la fréquence est de l'ordre de la séparation entre deux niveaux électroniques. Le premier pic se trouve ainsi à une fréquence de l'ordre de l'écartement moyen entre deux niveaux  $\Delta$  (fig. 3.4).

### 3.1.3 Résultat classique

A la limite classique, le spectre d'énergie est continu et la mesure de transport est équivalente à la mesure inductive. La conductance ainsi mesurée est la conductance classique de Drude, qui vaut à fréquence finie:

$$G = \frac{G_D}{1 - i\omega\tau_e} \quad (3.8)$$

avec  $G_D \approx \sigma_D a$  et  $\sigma_D = \frac{ne^2\tau_e}{m}$ , où  $\tau_e$  est le temps de collision élastique. La conductance est donc constante pour des fréquences inférieures à  $\frac{1}{\tau_e}$ , puis décroît en  $\frac{1}{\omega^2}$  pour des fréquences supérieures (fig. 3.5).

En revanche, à cause de l'écrantage du champ électrique dans l'échantillon, la conductance effective mesurée par la méthode capacitive à la limite thermodynamique est inversement proportionnelle à la conductance de Drude. Ce résultat se démontre facilement pour un cube métallique (fig. 3.6), si toutefois on néglige les effets de bords. La loi d'Ohm s'applique toujours, même en présence d'écrantage. On a donc  $I = G_e V_0$ , où  $V_0 = E_0 a$  est la différence de potentiel induite par le champ électrique dans l'échantillon. Par ailleurs, le champ dans l'échantillon est réduit par l'écrantage et s'exprime en fonction de la densité de charge induite  $\sigma$  sur les faces du cube perpendiculaires au champ.

$$E_{eff} = E_0 - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (3.9)$$

Le courant, donné par la relation  $I = \frac{dQ}{dt} = a^2 \frac{d\sigma}{dt}$ , est relié au champ effectif par la conductance de Drude:  $I = G_D E_{eff} a$ . On en déduit la valeur de la conductance effective du cube métallique:

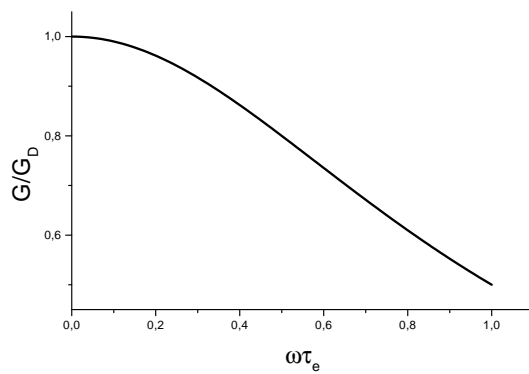


FIG. 3.5 – Comportement de la conductance classique de Drude en fonction de la fréquence.

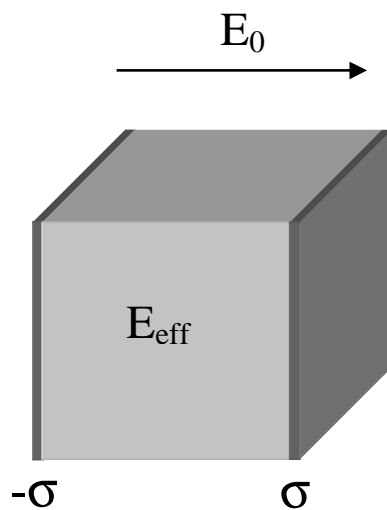


FIG. 3.6 – Cube métallique dans un champ électrique.

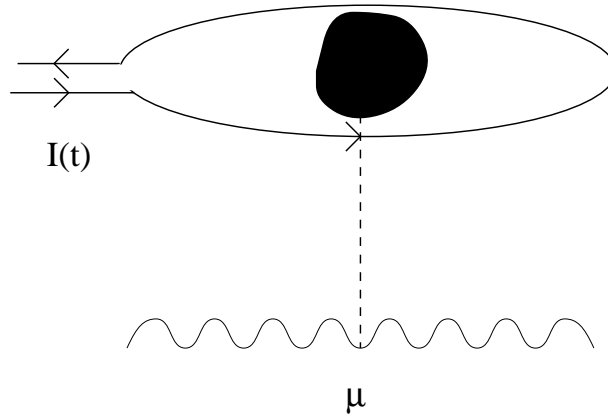


FIG. 3.7 – *Mesure inductive dans l'ensemble grand canonique. Une connection supplémentaire à un réservoir impose au système un potentiel chimique  $\mu$ .*

$$G_e = \frac{i\epsilon_0\omega a G_D}{G_D + i\epsilon_0\omega a} \quad (3.10)$$

La conductance est dominée par sa partie imaginaire, représentant la polarisabilité du système, qui vaut à basse fréquence, telle que  $\omega\epsilon_0 a \ll G_D$ <sup>3</sup>:

$$\Im G_e = \omega\epsilon_0 a \quad (3.11)$$

Quant à la partie réelle de la conductance, elle a pour expression:

$$\Re G_e = G_D \frac{(\epsilon_0\omega a)^2}{G_D^2 + (\epsilon_0\omega a)^2} \quad (3.12)$$

Il s'agit de la partie dissipative, qui à basse fréquence se réduit à:

$$G_e = \frac{(\epsilon_0\omega a)^2}{G_D} \quad (3.13)$$

### 3.1.4 Exploration des différents ensemble statistiques

Les mesures par influence offre l'opportunité d'explorer les différents ensembles statistiques, pour lesquels certaines différences notables apparaissent dans le régime mésoscopique. L'ensemble canonique correspond à un nombre d'électrons fixe dans le système. Cette condition est précisément réalisée pour un système électriquement isolé. Dans l'ensemble grand-canonique, c'est le potentiel chimique qui est fixé. Cette situation est réalisée en connectant le système à un réservoir (fig. 3.7).

---

3. Pour un échantillon de taille typique  $a$ ,  $G_D \approx \sigma a$ . Par conséquent,  $\omega = \frac{G_D}{\epsilon_0 a} \approx \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ . Cette fréquence est en fait très élevée. Pour un échantillon métallique en or, pour lequel  $\rho \approx 2 \cdot 10^{-6} \Omega cm$ , elle de l'ordre de  $10^{15} Hz$ . Pour un échantillon semiconducteur bidimensionnel tel que  $G \sim 1000 \frac{e^2}{h}$ , elle est de l'ordre de  $4 GHz$ .



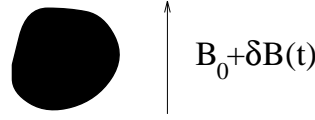


FIG. 3.8 – Conducteur placé dans un champ magnétique statique superposé à un champ alternatif dépendant du temps.

On néglige ici les effets de constante de temps de la connection [92]. Si celle-ci est lente par rapport aux variations du champ AC, le transfert d'électrons n'est pas suffisamment rapide pour maintenir le potentiel chimique constant. Le système est alors grand canonique du point de vue d'un champ DC et canonique du point de vue du champ AC.

Notons enfin qu'il n'existe de différence notable entre ces deux ensembles que pour des températures inférieures à l'écartement moyen entre les niveaux.

## 3.2 Calcul quantique de la susceptibilité

### 3.2.1 Susceptibilité magnétique

On considère un conducteur mésoscopique placé dans un champ magnétique  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}(t)$ , comportant une partie statique et une partie dépendante du temps (fig. 3.8). Le hamiltonien du système s'écrit:

$$H = \frac{(\mathbf{P} + e\mathbf{A}_0 + e\delta\mathbf{A}(t))^2}{2m} + V_{des}(\mathbf{r}) \quad (3.14)$$

où  $\mathbf{A}_0 = -\frac{\mathbf{r} \wedge \mathbf{B}}{2}$  et  $\delta\mathbf{A}(t) = -\frac{\mathbf{r} \wedge \delta\mathbf{B}(t)}{2}$  sont les potentiels vecteurs respectivement associés aux champs statique et alternatif. En développant le premier terme, et en définissant les opérateurs courant  $\mathbf{J} = \frac{e}{2m} \frac{\mathbf{P} + e\mathbf{A}_0}{V}$ , et moment magnétique  $\mathbf{M} = V(\mathbf{J} \wedge \mathbf{r})$ , le hamiltonien peut s'écrire  $H = H_0 + \delta H$ , où  $H_0$  est le hamiltonien en présence du champ statique uniquement et

$$\delta H = -\mathbf{M} \cdot \delta\mathbf{B} + \frac{(e\delta\mathbf{A})^2}{2m} \quad (3.15)$$

**Equation de la matrice densité** La relaxation du système vers l'équilibre peut être décrite au moyen d'une équation maîtresse [97]:

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho] - i\gamma(\rho - \rho_{equil}) \quad (3.16)$$

avec

$$[H, \rho_{equil}] = 0 \quad (3.17)$$

La résolution de cette équation donne:

$$\langle n|\delta\rho|q\rangle = \frac{f_n - f_q}{\epsilon_n - \epsilon_q} \frac{\epsilon_n - \epsilon_q - i\gamma}{\epsilon_n - \epsilon_q + \hbar\omega - i\gamma} \langle n|\delta H|q\rangle \quad (3.18)$$

$$\langle n|\delta\rho|n\rangle = \frac{\gamma}{\gamma + i\omega} \frac{\partial f}{\partial B} \delta B \quad (3.19)$$

**Règle de somme** En développant les énergies au deuxième ordre en perturbation, on obtient:

$$\Delta\epsilon_n = \epsilon_n(B_0 + \delta B) - \epsilon_n(B) = \langle n|\delta H|n\rangle + \sum_{q \neq n} \frac{|\langle n|\delta H|q\rangle|^2}{\epsilon_n - \epsilon_q} \quad (3.20)$$

$$\epsilon_n(B_0 + \delta B) = \epsilon_n(B_0) + \frac{\partial \epsilon_n}{\partial B} \delta B + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \epsilon_n}{\partial B^2} \delta B^2 \quad (3.21)$$

En identifiant les termes en  $\delta B$ , on trouve:

$$\frac{\partial \epsilon_n}{\partial B} = -\langle n|M|n\rangle \quad (3.22)$$

De même, en identifiant les termes en  $\delta B^2$ , on obtient pour un champ suivant l'axe 0z:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_n}{\partial B^2} = \frac{e^2}{2m} \langle n|x^2 + y^2|n\rangle + 2 \sum_{q \neq n} \frac{|\langle n|\delta M|q\rangle|^2}{\epsilon_n - \epsilon_q} \quad (3.23)$$

L'aimantation du système s'obtient par la relation:

$$\delta M = Tr(\delta\rho \hat{M}) + \frac{\partial^2 Tr(\rho_0 \delta H)}{\partial B^2} \delta B \quad (3.24)$$

Cette trace comprend une somme sur les termes diagonaux  $\delta\rho_{nn}$  de la matrice densité et une somme sur les termes non diagonaux  $\delta\rho_{nq}$ . Dans ces deux termes, la partie à fréquence nulle peut être isolée. On effectue alors le regroupement suivant:  $\chi_{nd}(\omega = 0) + \chi_{diag}(\omega = 0) + \chi_{dia} = \chi_{per}$  où  $\chi_{dia} = -\frac{e^2}{4m} \sum_n f_n \langle n|x^2 + y^2|n\rangle$  est la partie diamagnétique de la susceptibilité.

En utilisant les règles de somme trouvées précédemment, ces termes se mettent sous la forme  $\chi_{per} = -\frac{\partial \langle M_z \rangle}{\partial B}$  avec  $M_z = -\sum_n f_n \frac{\partial \epsilon_n}{\partial B}$ . On reconnaît la susceptibilité orbitale associée au courant permanent.

En résumé la susceptibilité se compose de trois termes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_{per} = -\frac{\partial}{\partial B} \sum_n f_n \frac{\partial \epsilon_n}{\partial B} \\ \chi_{diag} = -\frac{\omega}{\omega - i\gamma} \sum_n \frac{\partial f_n}{\partial B} \langle n|M|n\rangle \\ \chi_{nd} = -\hbar\omega \sum_{q \neq n} \frac{f_n - f_q}{\epsilon_n - \epsilon_q} \frac{|\langle n|\delta M|q\rangle|^2}{\epsilon_n - \epsilon_q + \hbar\omega - i\gamma} \end{array} \right. \quad (3.25)$$

### 3.2.2 Susceptibilité électrique

La partie non-dissipative de la correction quantique à la susceptibilité électrique a déjà été calculée dans le chapitre 2. La formule est très similaire à la susceptibilité magnétique mais fait intervenir les éléments de matrice de l'opérateur écranté  $\phi_{TF}(\mathbf{r})$ .

### 3.2.3 Ecriture générale

En faisant l'hypothèse que  $\chi'' \ll \chi'$ , la partie imaginaire de la susceptibilité, correspondant à la partie dissipative peut s'écrire en toute généralité:

$$\chi''(\omega) = \gamma \hbar \omega \sum_{q \neq n} \frac{f_n - f_q}{\epsilon_n - \epsilon_q} \frac{|\langle n | \hat{A} | q \rangle|^2}{(\epsilon_n - \epsilon_q + \hbar \omega)^2 + \gamma^2} + \frac{\omega \gamma}{\omega^2 + \gamma^2} \sum_n \frac{\partial f}{\partial \epsilon_n} |\langle n | \hat{A} | n \rangle|^2 \quad (3.26)$$

où  $\hat{A} = \hat{M}$  pour la susceptibilité magnétique et  $\hat{A} = \frac{\hat{\phi}}{E}$  pour la susceptibilité électrique.

### 3.2.4 Susceptibilité classique

Celle-ci s'obtient à partir du terme non-diagonal de la susceptibilité. A la limite thermodynamique, les niveaux d'énergie électroniques forment un continuum de sorte que toutes les énergies caractéristiques ( $T$ ,  $\omega$ ,  $\gamma$ ), sont supérieures à  $\Delta$ . On peut alors remplacer les sommes sur les états par des intégrales:

$$\chi''(\omega) = \hbar \omega \int \int dE_1 dE_2 \frac{f(E_1) - f(E_2)}{E_1 - E_2} n(E_1) n(E_2) A^2(E_1, E_2) \frac{\gamma}{(E_1 - E_2 + \hbar \omega)^2 + \gamma^2} \quad (3.27)$$

On peut ensuite faire tendre  $\gamma$  vers zéro, et remplacer la lorentzienne par une distribution de Dirac.

$$\chi''(\omega) = \int dE [f(E) - f(E + \hbar \omega)] n(E) n(E + \hbar \omega) A^2(E, E + \hbar \omega) \quad (3.28)$$

Pour des fréquences petites devant l'énergie de Fermi  $f(E + \hbar \omega) \approx f(E) + \hbar \omega \frac{\partial f}{\partial E}$ . En supposant de plus que l'élément de matrice  $A^2$  varie faiblement en énergie, la susceptibilité au premier ordre en  $\omega$  s'exprime:

$$\chi''_{cl} = \hbar \omega n(E_F)^2 A^2 \quad (3.29)$$

### 3.2.5 Correction quantique à la susceptibilité

On s'intéresse maintenant aux corrections quantiques à la partie dissipative de la susceptibilité électrique ou magnétique en présence d'un champ ou d'un flux magnétique. Nous ne considérons que la partie dépendante du flux de ces corrections, résultant des interférences électroniques dans l'échantillon. Plus précisément, on s'intéressera à l'écart entre la valeur à flux nul et celle

à un champ tel que la symétrie par renversement du temps est brisée. On posera par définition:  $\delta\chi'' = \chi''(B \neq 0) - \chi''(B = 0)$ .

En présence d'un champ magnétique  $B$ , les énergies et les fonctions propres du système dépendent de  $B$ . Corrélativement, les éléments de matrice  $\langle n|A|q \rangle$  dépendent de  $B$  (voir chapitre 2). Cet effet est faible en ce qui concerne les éléments de matrice non-diagonaux, de sorte que la susceptibilité non-diagonale est surtout dominée par la dépendance en champ du dénominateur d'énergie. Par ailleurs, la théorie des matrices aléatoires prédit l'absence de corrélations entre les énergies et les fonctions propres. La susceptibilité moyenne peut alors s'exprimer en fonction de la probabilité  $R(s)$ , de trouver deux niveaux séparés par l'intervalle d'énergie  $s$ :

$$\chi''_{nd}(\omega) = \chi''_D \int ds \frac{R(s)}{(s + \hbar\omega)^2 + \gamma^2} \quad (3.30)$$

$R(s)$  a pour expression [38]:

$$R_{GOE}(s) = 1 - \frac{\sin^2(s)}{s^2} - \frac{d}{ds} \frac{\sin(s)}{s} \int_0^\infty dt \frac{\sin(ts)}{t} \quad (3.31)$$

$$R_{GUE}(s) = 1 - \frac{\sin^2(s)}{s^2} \quad (3.32)$$

La dépendance en flux de la susceptibilité diagonale est déterminée par celle des éléments de matrice  $|\langle n|A|n \rangle|^2$ . Dans le cas électrique, les éléments de matrice diagonaux  $A_{\alpha\alpha}^2$  sont des fonctions paires du flux magnétique. On a par ailleurs  $A_{\alpha\alpha}^2(GOE) = A_{\alpha\beta}^2(GOE)$ , et  $A_{\alpha\alpha}^2(GUE) = \frac{1}{2}A_{\alpha\alpha}^2(GOE)$  (voir chapitre 2). Au contraire, dans le cas magnétique les éléments de matrice diagonaux sont des fonctions impaires du flux, ce qui implique nécessairement que  $A_{\alpha\alpha}^2(GOE) = 0$ . De plus, on fait l'hypothèse que  $A_{\alpha\alpha}^2(GUE) \approx A_{\alpha\beta}^2(GOE)$ . Celle-ci est bien vérifiée numériquement. La correction mésoscopique  $\delta\chi''_{diag} = \chi''_{diag}(GUE) - \chi''_{diag}(GOE)$  à la susceptibilité diagonale se met alors sous la forme:

$$\delta\chi''_{diag}(\omega) = \eta\chi''_D \frac{\gamma\omega}{\gamma^2 + \omega^2} \quad (3.33)$$

où  $\eta_m = 1$  et  $\eta_e = -0.5$  correspondent respectivement au couplage magnétique et électrique. En additionnant les termes diagonaux et non-diagonaux, la correction mésoscopique à la susceptibilité s'exprime:

$$\frac{\delta\chi''(\omega)}{\chi''_D} = \int ds \frac{R_{GUE}(s) - R_{GOE}(s)}{(s + \hbar\omega)^2 + \gamma^2} + \eta \frac{\gamma\omega}{\gamma^2 + \omega^2} \quad (3.34)$$

Un calcul numérique de  $\delta\chi''(\omega)$  dans les cas magnétiques et électriques, en fonction de  $\omega$  et pour différentes valeurs de  $\gamma$ , est présenté sur la figure 3.9.

Dans la limite du spectre discret ( $\gamma \ll \Delta$ ), la magnéto-susceptibilité magnétique est négative pour  $\omega < \Delta$ , puis devient positive à cause du terme de relaxation pour ( $\omega > \Delta$ ). Pour des plus grandes valeurs de  $\gamma$ , le changement de signe disparaît. Au contraire pour  $\gamma \ll \Delta$ , la susceptibilité électrique est positive dans à basse fréquence ( $\omega < \Delta$ ), puis devient positive pour

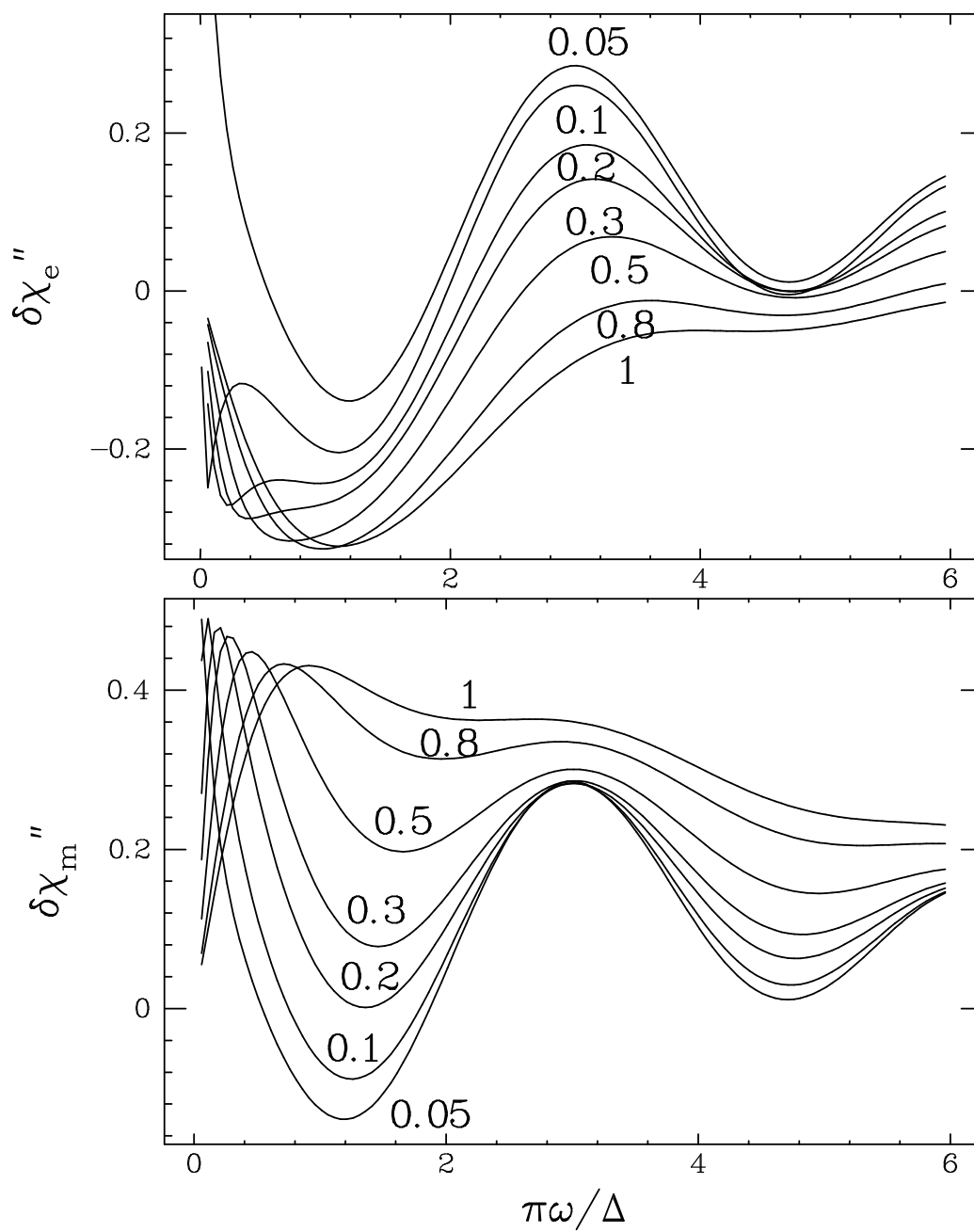


FIG. 3.9 – Calcul pour différentes valeurs de  $\frac{\pi\omega}{\gamma}$  de la partie imaginaire de la susceptibilité

$\omega > \Delta$ . Comme pour la susceptibilité magnétique, le changement de signe disparaît dans la limite du spectre continu ( $\gamma \sim \Delta$ ). Cependant, la magnéto-susceptibilité électrique devient négative à toutes les fréquences quand  $\gamma$  augmente. Le changement de signe en fonction de  $\gamma$  apparaît cette fois-ci pour  $\omega > \Delta$ .

### 3.2.6 Comparaison entre la réponse électrique et magnétique

#### Cas classique

Nous avons montré que l'absorption classique à basse fréquence d'un grain métallique est décrite par une conductance effective  $G_e$ . Ce résultat, initialement dérivé pour des systèmes tridimensionnels peut être généralisé pour des échantillons bidimensionnels, pourvu que le champ électrique soit dans le plan. On peut alors montrer que le rapport entre les parties imaginaires (dissipatives) des susceptibilités électrique et magnétique s'exprime:

$$r = \frac{\chi_m''(\omega)}{\chi_e''(\omega)} = (Z_v G_D)^2 = \alpha^2 g^2 \quad (3.35)$$

où  $Z_v = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377\Omega$  est l'impédance du vide et  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$ , la constante de structure fine.

#### Cas quantique

Cette relation peut être généralisée dans le cas quantique. En comparant le courant permanent à la magnéto-polarisabilité, on montre que les parties dissipatives des susceptibilités satisfont également la relation:

$$\frac{\delta\chi_m'(\omega)}{\delta\chi_e'(\omega)} \approx \frac{\delta\chi_m''(\omega)}{\delta\chi_e''(\omega)} \approx (Z_v G_D)^2 = \alpha^2 g^2 \quad (3.36)$$

# Chapitre 4

## Nanofabrication

### 4.1 Notions élémentaires sur le GaAs

Le GaAs [101] est un composé semiconducteur formé du *Ga*, un élément de la colonne III du tableau périodique et de l'Arsenic (*As*), qui se trouve sur la colonne IV. Le réseau cristallin est formé de deux sous réseaux cubiques à faces centrées, décalés l'un de l'autre de la moitié de la diagonale du cube (fig. 4.1)<sup>1</sup>.

GaAs est un semiconducteur à bande directe: la valeur du vecteur d'onde au minimum de sa bande de conduction coïncide avec celui du maximum de la bande de valence (fig. 4.2). La largeur de la bande interdite vaut  $1.42\text{eV}$  à  $T = 300\text{K}$ <sup>2</sup>. Une transition électronique entre ces deux bandes nécessite donc un changement de l'énergie de l'électron, mais non un changement de vecteur d'onde. Pour cette raison, le GaAs se prête à la fabrication de composants optiques, telles que des diodes lumineuses ou des lasers.

1. Ce type de réseau est également appelé Zinc blende.

2. La largeur de la bande d'énergie interdite représente la différence d'énergie entre le minimum et le maximum des bandes de conduction et de valence. Elle dépend de la température.

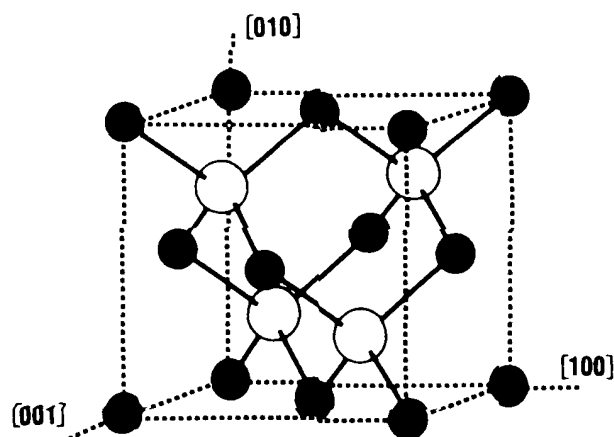


FIG. 4.1 – Maille élémentaire du GaAs.

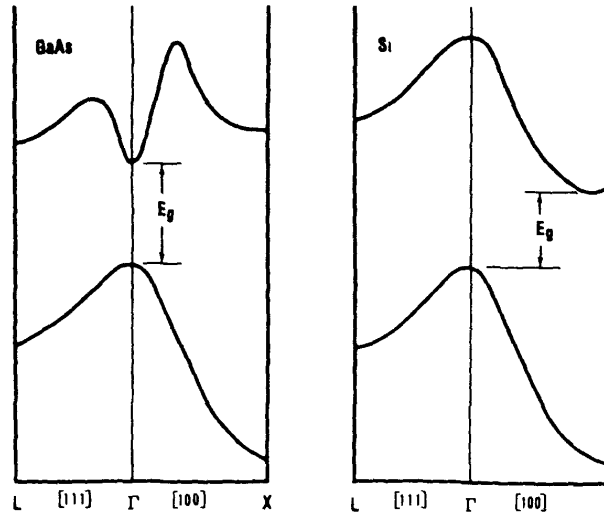


FIG. 4.2 – Comparaison de la structure de bande du GaAs et du silicium.

Il faut également noter qu'il existe d'autres minima. Si les électrons ont suffisamment d'énergie et interagissent avec le réseau, ils peuvent effectuer des transitions vers ces autres vallées. Ce phénomène est important dans le GaAs, car il est responsable de la décroissance de la vitesse électronique quand le champ électrique dépasse une certaine valeur critique (fig. 4.3). La masse effective, de l'ordre de  $0.067m$  (où  $m$  est la masse électronique), est en effet plus grande dans ces autres vallées, par conséquent la vitesse des électrons est réduite après de telles transitions. Il en résulte une résistivité différentielle négative. La valeur du champ électrique à laquelle la vitesse atteint la saturation est  $E_{th}(300K) = 3.3kV/cm$ , tandis que la vitesse de saturation vaut  $v_s = 2.1 \cdot 10^7 cm/s$ . A bas champ électrique ( $E \ll 1kV$ ), la vitesse est proportionnelle au champ:

$$v = \mu E \quad (4.1)$$

$\mu$  est la mobilité électronique et vaut environ  $8500 cm^2/Vs$  dans le GaAs non dopé<sup>3</sup> à température ambiante. Elle est près de six fois supérieure à celle du silicium.

Par ailleurs, le GaAs présente un autre avantage par rapport au silicium. Non dopé, il est presque isolant (sa résistivité peut atteindre  $10^8 \Omega cm$ ) et peut par conséquent servir de substrat. L'utilisation de ce substrat semi-isolant permet de réduire sensiblement les capacités parasites, très nuisibles à haute fréquence. A titre de comparaison la résistivité du silicium est de l'ordre de  $100 \Omega cm$ . Pour ces raisons, le GaAs est préféré au silicium pour les applications haute fréquence. Le GaAs a toutefois le désavantage d'être plus difficile à manipuler que le silicium, et de ne pas posséder d'oxyde naturel, tel que le  $SiO_2$  pour le silicium. Les propriétés du GaAs à température

<sup>3</sup> La mobilité des électrons est d'un ordre de grandeur supérieure à celle des trous. Pour cette raison, seulement le courant d'électrons est généralement considéré.



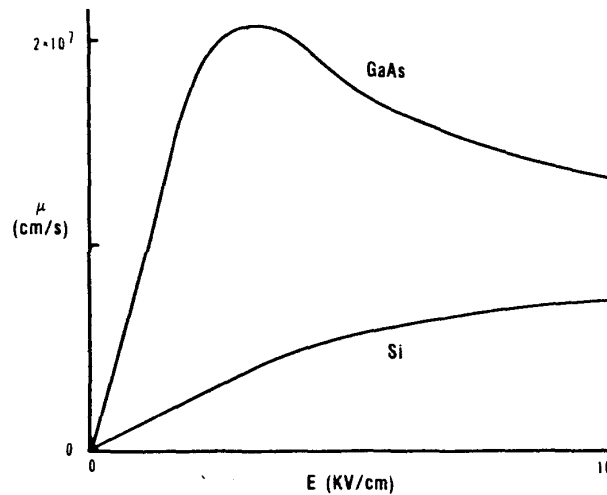


FIG. 4.3 – Vitesse des électrons dans le GaAs, en fonction du champ électrique. La vitesse sature au delà d'un certain champ critique  $E_{th}$ .

ambiante sont résumées sont résumées dans le tableau 4.1

Maille	5.65Å
Densité	$5.317g/cm^3$
Densité atomique	$4.4279 \times 10^{22}atoms/cm^3$
Constante diélectrique	12.85
Gap	1.423eV
Champ de saturation $E_{th}$	3.3kV/cm
Pic de vitesse	$2.1 \times 10^7cm/s$
Mobilité électronique (non dopé)	$8500cm^2/Vs$
Mobilité des trous (non dopé)	$400cm^2/Vs$
Température de fusion	1238 °c

#### 4.1.1 Hétérojonctions

A partir du substrat, des couches de très grande pureté sont obtenues par croissance épitaxiale. La méthode d'épitaxie moléculaire (MBE), schématisée sur la figure 4.4, fait appel à des sources solides (exemples: In, Ga, As), qui sont chauffées afin de créer un faisceau d'atomes dans une enceinte sous vide ( $10^{-9} - 10^{-10}$  Torr), lesquels viennent se déposer sur le substrat, également chauffé à une température de l'ordre de 600 degrés. Une variante de cette méthode, la MO-MBE (metal-organic MBE), utilise des sources gazeuses organo-métalliques. L'avantage de cette technique par rapport à la MBE est qu'elle permet un meilleur contrôle du flot d'atomes et donc de la croissance. De plus, la température à laquelle est chauffé le substrat peut être moins élevée (de l'ordre de 500 °C), réduisant ainsi les problèmes de diffusion.

Grâce à ces techniques, il est possible de fabriquer des hétérojonctions constituées de plusieurs couches de semiconducteurs différents. Un des avantages les plus significatifs de cette méthode

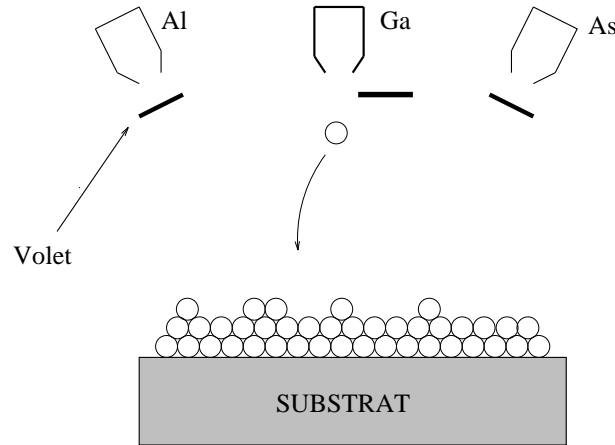


FIG. 4.4 – Schéma de principe du système d'épitaxie moléculaire.

est qu'elle permet de fabriquer un *gaz bidimensionnel d'électrons*. Des semiconducteurs dont la largeur de bande interdite est sensiblement différente sont utilisés à cet effet, de manière à créer un puit de potentiel dans la bande de conduction. Les électrons sont de la sorte confinés dans un espace presque bidimensionnel, dont la largeur est de l'ordre de la longueur d'onde de Fermi ( $\sim 100\text{\AA}$ ). La densité électronique est modulée en introduisant de façon intentionnelle des atomes dopants, donneurs (dopage de type n) ou accepteurs (dopage de type p) d'électrons, qui donnent naissance à des niveaux d'énergie supplémentaires dans la bande interdite. Pour des atomes donneurs, ceux-ci sont proches de la bande de conduction vers laquelle les électrons peuvent thermiquement faire une transition. Les atomes dopants peuvent être introduits dans le semiconducteur par implantation ionique, ou pendant la croissance épitaxiale par dopage modulé ou "en delta". Dans le premier cas, une couche tridimensionnelle d'atomes donneurs est déposée dans l'hétérojonction. Au contraire, le dopage "en delta" consiste à déposer une couche très fine, presque bidimensionnelle d'atomes dopants.

## 4.2 Exemple de fabrication submicronique: Transistors à effet de champ en GaAs

### 4.2.1 Qu'est-ce qu'un transistor à effet de champ?

Un transistor à effet de champ (FET en appellation anglaise) est un composant électronique simple, composé de trois électrodes (fig. 4.5). Deux de ces électrodes, la source et le drain, sont reliées par un canal conducteur, au voisinage duquel<sup>4</sup> est déposée une grille métallique. Le canal conducteur est constitué soit par une couche conductrice tridimensionnelle, de type *n* ou de type *p*, soit par un gaz bidimensionnel d'électron, comme c'est le cas dans ce travail. La grille a pour fonction de modifier la résistance du canal conducteur. En effet, l'application sur cette dernière d'une tension négative (pour des électrons), ou positive (pour des trous) induit un

4. Généralement, la grille est située au dessus du canal conducteur.

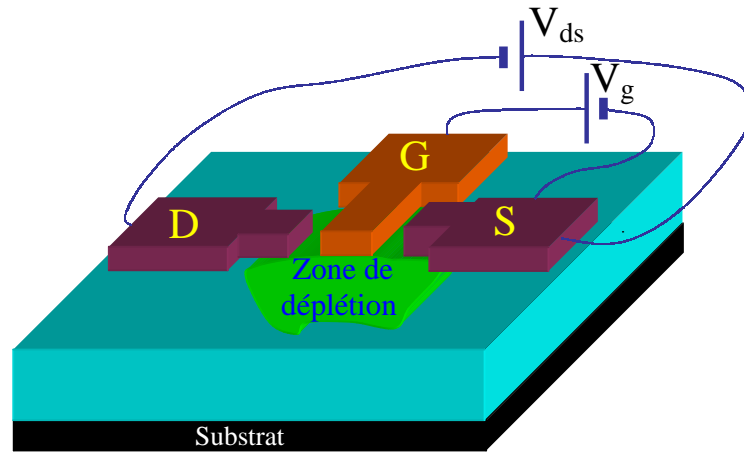


FIG. 4.5 – Schéma de principe d'un transistor à effet de champ.

champ électrique qui repousse en partie les porteurs hors du canal conducteur. Cette réduction de la densité de porteurs diminue la conductivité du canal<sup>5</sup>. Pour une tension suffisante, celle-ci peut éventuellement être supprimée.

Dans le régime linéaire, un FET agit donc comme une résistance variable dont la valeur est modulable par l'application d'une tension sur la grille.

### But du projet

Grâce à la grande vitesse des électrons dans le GaAs, un FET fabriqué avec un tel matériau convient pour les applications nécessitant un fonctionnement à haute fréquence. L'objectif du projet est de concevoir des transistors à effet de champ en GaAs dont le fonctionnement se situe dans le domaine des ondes micrométriques (1 à 1000GHz). Plus précisément, l'objectif est de dépasser 40GHz, qui constitue la fréquence limite de la plupart des transistors commerciaux. L'étape suivante consistera à les assembler, de manière à constituer un amplificateur.

Les applications pour ces transistors sont nombreuses et se situent principalement dans le domaine des communications: satellites, militaires, commerciales (téléphones cellulaires) ou optiques, mais aussi pour des supers-ordinateurs. Ils peuvent encore servir d'amplificateurs haute fréquence en optoélectronique, par exemple pour des photodétecteurs ou pour des lasers.

### Circuit électrique équivalent

Un transistor à effet de champ peut être modélisé par un circuit électrique équivalent (fig. 4.6), comprenant une source de courant contrôlée par une tension qui modélise l'effet de la tension de grille sur le courant source-drain, ainsi qu'une série de résistances et de capacités. Les différents paramètres de ce circuit peuvent être divisés en deux catégories. Les éléments intrinsèques, qui

5. On parle ici du régime linéaire. Plus généralement, c'est le courant circulant dans le canal qui est diminué.

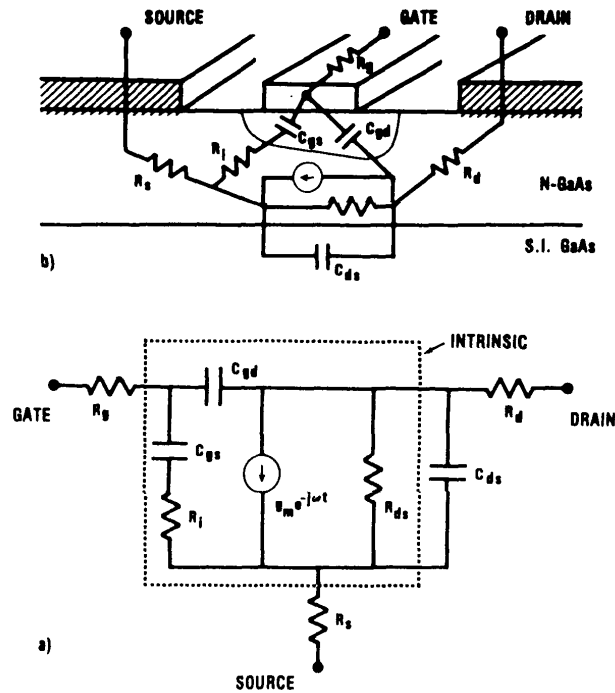


FIG. 4.6 – Circuit électrique équivalent d'un FET.

sont des éléments fondamentaux et nécessaire au fonctionnement du FET, et ceux extrinsèques, qui sont des éléments parasites. La signification des différents éléments est résumée dans les tableaux 4.2.1 et 4.2.1.

Eléments intrinsèques	Signification physique
$C_{gs}$	Capacité grille-source
$C_{gd}$	Capacité grille-drain
$g_m$	transconductance
$R_{ds}$	Résistance source-drain

Eléments extrinsèques	Signification physique
$R_g$	Résistance de la grille
$R_s$	Résistance de la source
$R_d$	Résistance du drain
$C_{ds}$	Capacité drain-source

### Paramètres importants

#### – Transconductance

La sensibilité du canal à la tension de grille est quantifiée par la transconductance, définie par:

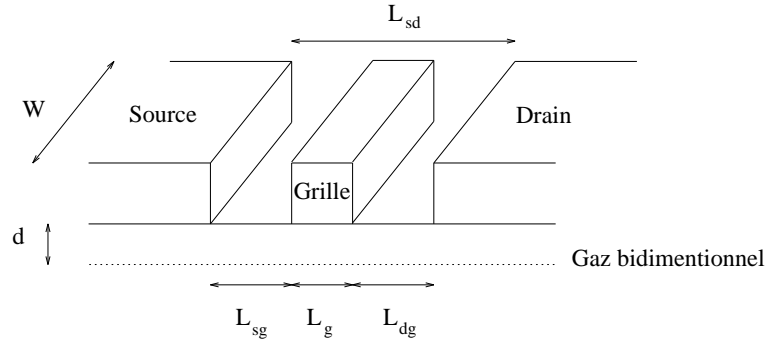


FIG. 4.7 – Dimensions caractéristiques d'un FET.

$$g_m = \frac{\partial I_{ds}}{\partial V_g} \quad (4.2)$$

La transconductance s'exprime par un calcul simple en fonction des différents paramètres du transistor. La variation de densité surfacique de charge dans le canal conducteur après application d'une tension sur la grille s'écrit  $\delta n = C_u \delta V_g$ , où  $C_u$  est la capacité par unité de surface entre la grille et le canal conducteur. Il en résulte une variation de la conductivité du canal qui vaut, en négligeant les variations de la mobilité électronique  $\mu$  avec la densité,  $\delta \sigma = \delta n_e e \mu$ . A basse tension entre la source et drain, le courant est proportionnel à  $V_{ds}$ . C'est le régime linéaire, dans lequel la loi d'Ohm s'applique. La variation de courant vaut alors  $\delta I_{ds} = \delta \sigma \frac{W}{L} V_{ds}$ , ce qui donne pour la transconductance:

$$g_m = C_u \frac{W}{L} V_{ds} \quad (4.3)$$

A plus forte tension, le courant sature en raison de la saturation de la vitesse des électrons. Il faut remplacer  $\frac{V_{ds}}{L} \mu$  par la vitesse de saturation  $V_s$ . La transconductance a alors pour expression:

$$g_m = C_u W V_s \quad (4.4)$$

La capacité entre la grille et le canal peut être approximée par celle d'une capacité plan:  $C_u \approx \frac{\epsilon}{d}$ , où  $d$  est la distance entre la grille et le canal conducteur (fig 4.2.3). Dans cette approximation:

$$g_m \approx \epsilon \frac{V_s}{d} W \quad (4.5)$$

Afin de pouvoir comparer facilement des FET comportant des grilles de longueurs différentes, la transconductance est généralement normalisée au millimètre, ce qui revient à effectuer l'opération  $G_m = \frac{g_m}{W} \times 1mm$ .

- Tension de pincement

En appliquant une tension négative suffisante sur la grille, le canal peut être complètement déplété, et sa conductivité supprimée. La tension correspondante est appelée *tension de pincement*<sup>6</sup>. Un ordre de grandeur est donné par

$$V_{po} \approx \frac{n}{C_u} \approx \frac{nd}{\epsilon} \quad (4.6)$$

- Courant et tension de saturation

La tension de saturation est une propriété du matériau et dépend bien évidemment de la distance entre la source et le drain. Dans le GaAs,

$$V_{sat} \approx 3.3kV \times L_{sd} \quad (4.7)$$

Le courant de saturation a par ailleurs pour expression:

$$I_{ds} = neWv_s \quad (4.8)$$

**Ordres de grandeur** En prenant des valeurs typiques  $n \sim 3 \cdot 10^{12} cm^{-2}$ ,  $d \sim 250 \text{Å}$ , et sachant que dans le GaAs  $v_s = 2 \cdot 10^7 cm/s$ , on trouve:

$$\begin{aligned} G_m &\approx 288 mS/mm \\ V_{po} &\approx 1V \\ I_{sat} &\approx 100 mA \\ V_{sat} &\approx 1V \end{aligned}$$

### Limitations d'un FET à haute fréquence.

Deux paramètres limitent le fonctionnement d'un FET à haute fréquence:

- Limitation capacitive

La capacité entre la grille et la source joue le rôle d'un filtre pour les hautes fréquences. Sa valeur dépend de la surface de la grille  $S_g$ , ainsi que de la distance  $d$  entre la grille et le canal conducteur.

$$C_{gs} \approx C_{gc} \approx \epsilon \frac{S_g}{d} \quad (4.9)$$

où  $C_{gc}$  dénote la capacité entre la grille et le canal conducteur

Pour une longueur de grille d'un micron, et en prenant  $d = 250 \text{Å}$ , on trouve  $C_{gs} \sim 0.5 pF$ .

- Le temps de transfert d'un électron entre la source et le drain.

Le courant entre la source et le drain n'est sensible à des variations de potentiel de grille que pour des fréquences inférieures au temps de transfert entre la source et le drain  $\tau = \frac{L_{sd}}{v_s}$ . Celui-ci est limité par la vitesse des électrons dans le GaAs, ainsi que par la distance entre la source et le drain, que l'on fixe généralement en fonction de la longueur de la grille. Pour les FET présentés dans ce chapitre, ce temps est de l'ordre de  $1 ps$ .

---

6. En anglais: "pinch-off voltage".

### 4.2.2 Fabrication des transistors

Les transistors sont fabriqués dans des hétérojonctions de semiconducteurs, dont l'élément de base est le GaAs, qu'on utilise également comme substrat. La croissance des hétérojonctions est effectuée au département de Physique des Solides de l'Institut Technion de Haifa par MOCVD<sup>7</sup>. Ce procédé fait appel à des molécules organiques pour le transport des atomes. La source pour le Gallium est le trimethylgallium, tandis que l'arsine, un gaz très nocif, est la source pour l'Arsenic.

La qualité des transistors dépend dans une certaine mesure de celle de l'hétérojonction. Celle-ci doit satisfaire doit satisfaire plusieurs critères:

- Grande mobilité des électrons
- Haute densité électronique

La mobilité et le pic de vitesse des électrons doivent être élevés, car ces paramètres déterminent la fréquence maximale de fonctionnement du transistor. Une densité de porteurs élevée est favorable pour le courant de sortie, la puissance, le gain et la figure de bruit du transistor. Néanmoins, elle doit être inférieure à une valeur seuil  $n_e \sim 10^{13} \text{cm}^{-2}$ , au delà de laquelle il n'est plus possible de "pincer" le canal.

#### L'hétérojonction

La structure de l'hétérojonction est résumée dans le tableau suivant:

#### Structure

Couche	composition	épaisseur(en Å)
Substrat	GaAs	
1	GaAs	2000
2	n ( $10^{18} \text{cm}^{-3}$ )	12
3	GaAs	75
4	GaInAs	100
5	GaAs	50
6	GaAlAs	200
7	GaAs	500

#### Fonction des différentes couches

- Substrat: GaAs: C'est un semi-isolant. La concentration résiduelle d'électrons à température ambiante est de l'ordre de  $10^8 \text{cm}^{-3}$ .
- 1: Buffer en GaAs: Cette couche sert à obtenir une meilleure qualité de la surface avant le dépôt des couches constituant le transistor

---

7. Metal Organic Chemical Vapor phase epitaxy ou MOCVD.

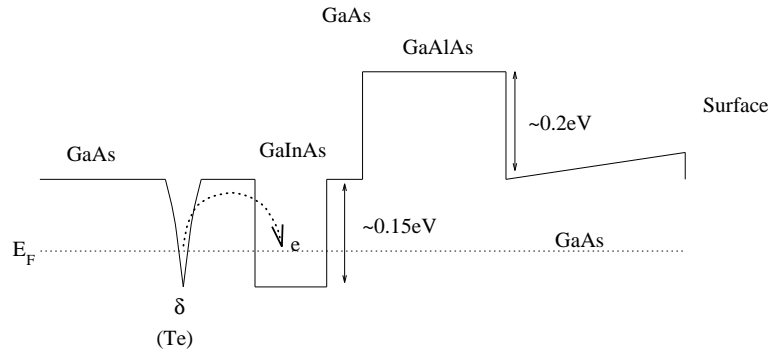


FIG. 4.8 – Schéma de la bande de conduction de l'hétérojonction.

- 2: Dopage delta: Il s'agit d'une couche très fine, pratiquement bidimensionnelle d'atomes de Tellure, qui sont des donneurs d'électrons (dopage  $n$ ). Ceux-ci prennent la place de l'Arsenic et donnent chacun un électron. La croissance de cette couche nécessite un flot simultané d'Arsenic, car ce dernier s'évapore continuellement de la surface.
- 3: GaAs: Cette couche a pour fonction de séparer la couche dopante des porteurs de charge. En effet, ces derniers sont diffusés par les atomes de Tellure, diminuant ainsi leur mobilité. Après la croissance de cette couche, les atomes ne peuvent plus quitter la surface.
- 4: GaInAs: Cette couche forme le canal conducteur. L'utilisation du GaInAs est justifiée par le fait que la masse effective dans ce matériau est plus petite que dans le GaAs. La mobilité est donc accrue par rapport au GaAs. D'autre part, la vitesse de saturation est plus grande que dans le GaAs.
- 5: GaAs, Cap layer: Cette couche constitue l'autre "bord" du puit. Il faut noter que l'utilisation du AlGaAs au lieu de GaAs entraînerait une diminution de la mobilité électronique, ceci à cause de la très grande activité des atomes d'aluminium.
- 6: AlGaAs: Cette couche forme une barrière pour les électrons, plus haute que celle du GaAs. L'utilisation de ce matériau par rapport au GaAs permet d'augmenter sensiblement la tension maximum qu'on peut appliquer sur la grille.
- 7: GaAs: Contact Layer: En l'absence de cette couche, on ne parvient pas à faire un contact avec le canal conducteur. Le métal ne diffuse pas à travers l'AlGaAs, peut être à cause de l'oxydation de ce dernier.

**Densité électronique** La densité d'électrons est essentiellement déterminée par trois facteurs:

1. La quantité d'atomes donneurs
2. La distance  $d$  du puit quantique à la couche d'atomes de Tellure.
3. La profondeur du puit

Les électrons situés dans la couche dopante de Tellure sont séparés du puit quantique par une barrière de potentiel. La probabilité de transition tunnel et corrélativement la densité électronique diminue avec  $d$  (fig. 4.8). Les électrons dans le puit sont diffusés par les atomes



de Tellure, ionisés positivement. Par conséquent, une diminution de  $d$  entraîne à la fois une augmentation de la densité de porteurs et une diminution de leur mobilité<sup>8</sup>. Un compromis entre ces deux effets contradictoires doit être trouvé.  $d$  est donc un paramètre capital. Il est choisi de l'ordre de  $40\text{\AA}$ . La profondeur et la forme du puit influencent également la densité électronique et sont déterminées par la différence des largeurs de bande interdite entre GaAlAs et GaInAs ainsi que par le dopage.

**Valeurs typiques** La densité électronique typique  $n_e$  des hétérojonctions est de l'ordre de  $5 \cdot 10^{12} \text{cm}^{-2}$ . La densité est reliée à la longueur d'onde de Fermi par la relation  $\lambda_F^2 = \frac{n_e}{2\pi}$ . La valeur de  $n_e$  donnée précédemment conduit à  $\lambda_F \approx 100\text{\AA}$ . La mobilité  $\mu$  est de l'ordre de  $5000 \text{cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$ .

### 4.2.3 Procédé de fabrication du transistor

La fabrication des transistors fait appel à la technique de lithographie optique. Les couches métalliques sont réalisées par dépôt par canon à électron. Nous allons exposer le principe de ces deux techniques dans les sections qui suivent.

#### Lithographie optique

La lithographie optique est très analogue à la photographie à la différence qu'elle utilise de la lumière ultraviolette. Pour cette raison, il est nécessaire de travailler en "salle jaune", où les rayonnements UV sont absents. La résolution est limitée par la longueur d'onde de la lumière utilisée ( $\sim 0.3\mu\text{m}$ )<sup>9</sup>.

On utilise des masques en verre<sup>10</sup>, sur lesquels sont chromés les motifs que l'on souhaite lithographier. Le principe de la lithographie optique est de reproduire sur l'échantillon, au moyen de résine photosensible, les motifs du masque en image positive ou négative. Les différents étapes du procédé sont résumées sur la figure 4.9. Dans un premier temps, de la résine photosensible est déposée sur l'échantillon à l'aide d'une tournette, dont la vitesse de rotation est dans la gamme  $4000 - 10000 \text{tr/min}$ ) et qui assure l'uniformité de la couche. L'échantillon est ensuite exposé avec son masque sous un rayonnement UV, puis séché dans un four (typiquement  $90^\circ\text{C}$ ) et enfin développé. La résine subsiste uniquement aux endroits qui n'ont pas été exposés sous la lumière UV.

Le processus en image négative est légèrement différent: l'échantillon est chauffé après la première exposition, fortifiant ainsi la résine exposée. On procède alors à une seconde exposition sans le masque, et enfin au développement.

Les conditions d'exposition, de séchage etc... dépendent beaucoup de la résine utilisée, ainsi que de la température et de l'humidité de la salle "jaune".

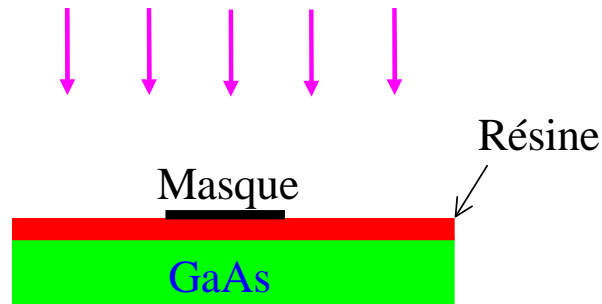
---

8. La mobilité électronique diminue également à cause de la diffusion par les autres électrons.

9. La lithographie optique est généralement utilisée jusqu'au micron. En deçà de cette taille, on lui préfère la lithographie électronique.

10. Ceux-ci sont souvent réalisés par lithographie électronique.

*Exposition avec de la lumière U.V.*

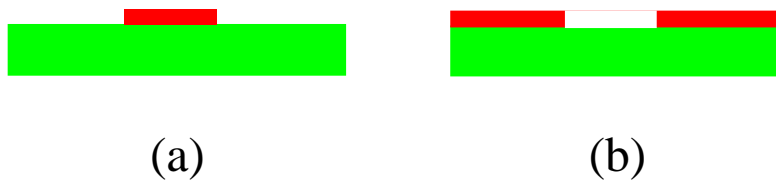


+  
*Inversion*  
(10 min at 125°C)

+  
*2<sup>nd</sup> Exposition*

+

*Développement*



(a)

(b)

FIG. 4.9 – Principe de la lithographie optique. A gauche (a), le processus positif. A droite (b), le processus négatif.

### Evaporation par canon à électrons

Des couches métalliques sont obtenues par dépôt par canon à électrons dans un bâti ultra vide. Une pompe "turbo" couplée à une pompe cryogénique assurent un vide de l'ordre de  $10^{-8}$  Torr ( $10^{-6}$  Torr pendant une évaporation). Un faisceau d'électrons<sup>11</sup> produit par un filament est dévié par un champ magnétique variable qui permet de centrer et de focaliser le faisceau sur le centre d'un creuset qui contient le métal qu'on souhaite évaporer. Différents creusets sont disposés sur une plaque tournante en cuivre, refroidie à l'eau de manière à éviter toute contamination de celui-ci. L'évaporation est directive et peut atteindre une dizaine d'Angström par seconde.

### Méthode de fabrication

Le processus de fabrication des FET comporte principalement trois étapes, qui sont résumées sur la figure 4.10.

#### 1. mesa

La première étape consiste à définir les zones conductrices (mesa) par une image positive. Partiellement protégée par la résine, l'hétérojonction est ensuite attaquée chimiquement ( $NH_4OH/H_2O_2/H_2O/1 : 1 : 50$ ) jusqu'au buffer. Cette attaque assure l'isolation électrique des différents FET lithographiés sur le même substrat.

#### 2. Contacts Ohmiques

Suit la fabrication de la source et du drain. Après une image négative par lithographie optique, les métaux suivants sont déposés:

Ni	50Å
Ge	450Å
Au	900Å
Ni	200Å
Au	1000Å

Juste avant l'évaporation, l'échantillon est immergé dans un bain d'acide chlorhydrique ( $Hcl$ ), afin de le libérer de sa couche d'oxyde présente en surface, puis est rincé et séché. Le contact avec le canal conducteur s'effectue en chauffant l'hétérojonction à  $380^\circ C$  dans une enceinte remplie d'un gaz neutre ( $N_2/H_2$ ). Nous obtenons ainsi des résistances de contact de l'ordre de  $6 \cdot 10^{-7} \Omega cm^2$ .

#### 3. Fabrication de la grille

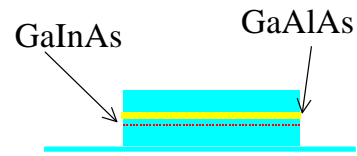
La grille est lithographiée par une image négative. Cette étape est rendue difficile par l'alignement de la grille entre la source et le drain, distants seulement de  $3\mu m$ . Les métaux constituant la grille sont déposés par évaporation, après avoir sélectivement attaqué (Acide citrique/ $H_2O_2$ , 1 : 2) la couche de contact, dont l'épaisseur est  $500\text{Å}$ . Grâce à la couche d'AlGaAs qui résiste à cet acide, on peut contrôler de façon précise (quelques

---

11. Le courant dans le filament et la tension d'accélération sont respectivement de l'ordre de  $155mA$  et  $10kV$ .

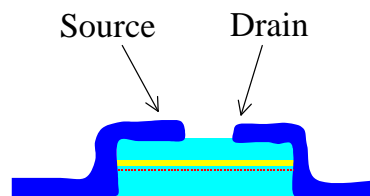
### 1 - Mesa

- *Image positive*
- *Attaque* (  $\text{NH}_3$  :  $\text{H}_2\text{O}_2$  :  $\text{H}_2\text{O}$  )



### 2 – Contacts Ohmiques

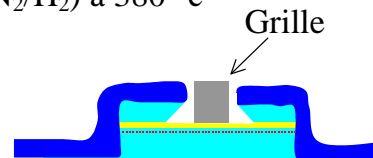
- *Image Négative*
- *Déposition:*



Ni 50 Å  
 Ge 450 Å  
 Au 900 Å  
 Ni 200 Å  
 Au 1000 Å

- *Alloying* dans du gaz neutre ( $\text{N}_2/\text{H}_2$ ) à 380 °c

### 3 – Grille



- *Image négative*
- *Attaque* (Acide citrique :  $\text{H}_2\text{O}_2$ ) de la couche de protection
- *Déposition des métaux:*

Ti 50 Å  
 Pt 100 Å  
 Au 1000 Å

FIG. 4.10 – Les différentes étapes de fabrication d'un FET.

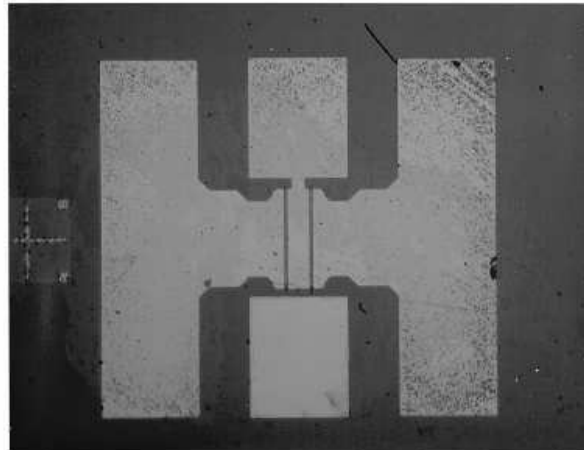


FIG. 4.11 – Image optique (vue de dessus) d'un FET. Celui-ci comporte deux grilles permettant ainsi des mesures AC.

dizaines d'Angström) et reproductible la distance grille-canal. Les métaux constituant la grille sont :

Ti	100Å
Pt	100Å
Au	1000Å

Le titane est utilisé afin de procurer une bonne adhésion. Le platine constitue une barrière empêchant la diffusion de l'or dans l'hétérojonction. Quant à l'or, il est l'un des métaux les plus appropriés pour effectuer des contacts.

Une image optique d'un FET est présentée sur la figure 4.11, tandis que la figure 4.12 comprend un schéma explicatif.

### Dimensions d'un FET

Les dimension des FET sont reportées dans le tableau 4.2.3.

	Distance ou longueur( $\mu m$ )
Drain-source	3
Grille-source	1
Grille-drain	1
$L$ (Longueur de la grille)	1
$W$ (Largeur de la grille)	100

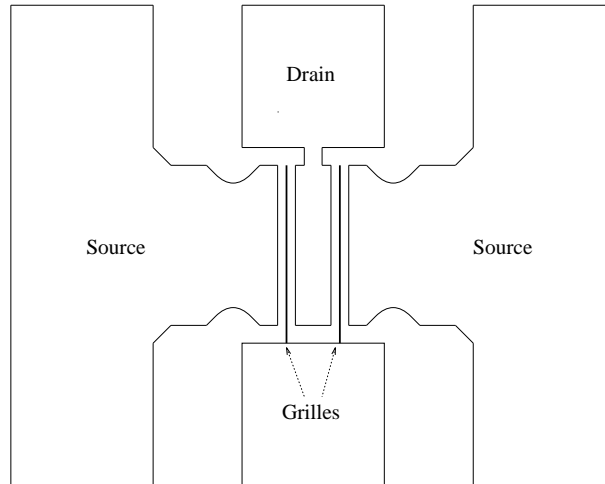


FIG. 4.12 – Schéma d'un FET comportant deux sources et deux grilles.

### Mesures

Les transistors sont caractérisés à la fois en continu et à haute fréquence.

**Caractérisation DC** Le courant source-drain est mesuré pour différentes valeurs de la tension de grille (fig. 4.13). Les porteurs de charge étant des électrons, une tension de grille négative a pour effet une diminution de la densité de charge dans le canal conducteur et corrélativement du courant. On détermine par cette mesure la tension de pincement, ainsi que le courant et la tension de saturation  $I_{sat}$ ,  $V_{sat}$ . Pour des grilles d'un micron, nous avons obtenus des transconductances de l'ordre de  $180mS/mm$ , pour une tension de pincement de l'ordre de  $3V$ .

**Caractérisation à haute fréquence** Nous étudions également le comportement des FET à haute fréquence ( $0.05 - 40GHz$ ). Plutôt que de mesurer la réponse courant-tension, il est plus facile à de telles fréquences d'étudier les coefficients de réflexion et de transmission d'un circuit.

Les paramètres  $S$  relient les ondes incidentes  $a_1$  et  $a_2$ , et réfléchies  $b_1$  et  $b_2$  d'un circuit à deux terminaux. Ils sont définis de la manière suivante:

$$\begin{cases} b_1 = a_1 S_{11} + a_2 S_{12} \\ b_2 = a_1 S_{21} + a_2 S_{22} \end{cases} \quad (4.10)$$

Chaque paramètre a une signification physique différente:

- $S_{11}$  est le coefficient de réflexion à l'entrée du circuit, l'entrée étant connectée à une impédance  $Z_0$ .
- $S_{22}$  est le coefficient de réflexion à la sortie du circuit (l'entrée étant connectée à  $Z_0$ ).
- $S_{12}$  est le gain inverse du circuit.
- $S_{21}$  est le gain du circuit.

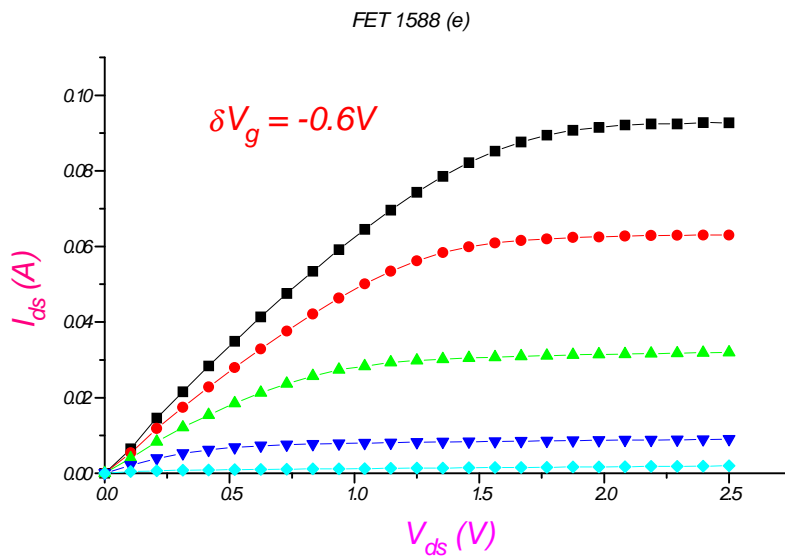


FIG. 4.13 – Caractéristique courant-tension d'un FET pour différentes tensions de grille.

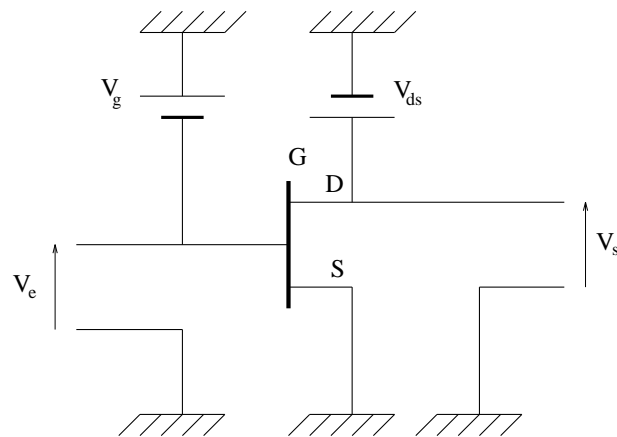


FIG. 4.14 – Connections du FET en mesure AC. La tension d'entrée est  $V_e$ , la tension de sortie  $V_s$ . Le FET est de plus polarisé par des tensions continues:  $V_{ds}$ , appliquée entre la source et le drain et  $V_g$  entre la grille et la source.

La tension d'entrée est prise entre la source et la grille et la tension de sortie entre la grille et le drain (fig.4.14). Les tensions drain-source et grille-source sont ajustées de manière à optimiser le gain (i.e  $S_{21}$ ) du transistor. Des valeurs typiques sont:

$$\begin{aligned} V_{ds} &\approx 2V \\ V_g &\approx -1.5V \end{aligned}$$

Les paramètres  $S$  pour l'hétérojonction 1588 FET sont présentés sur les figures 4.15 et 4.16. A partir des paramètres  $S$ , on calcule les gains de puissance<sup>12</sup> et de courant, à partir desquels on détermine  $F_{max}$  et  $F_t$ , pour lesquelles ces deux gains valent  $0dB$ . Pour l'hétérojonction 1588, avec laquelle nous avons obtenu les meilleurs FET dotés d'une grille d'un micron, celles-ci valent:

$$\begin{aligned} F_{max} &\approx 30GHz \\ F_t &\approx 13GHz \end{aligned}$$

D'autre part, la valeur des différents éléments constituant le transistor sont estimées en ajustant les paramètres du circuit électrique équivalent de façon à reproduire le mieux possible les mesures. Ces valeurs sont reportées dans le tableau 4.2.3 pour l'hétérojonction 1588.

$C_{gs}$	2.75	$pF$
$R_i$	0.31	$\Omega$
$C_{gd}$	0.15	$pF$
$R_{ds}$	64	$\Omega$
$C_{ds}$	0.17	$pF$
$g_m$	337	$mS$
$\tau$	1.2	$pS$
$R_s$	1.1	$\Omega$
$R_d$	4	$\Omega$
$R_g$	1.8	$\Omega$
$C_{pg}$	0.05	$pF$
$L_g$	0.07	$nH$
$L_d$	0.025	$nH$
$F_{max}$	42	$GHz$
$F_t$	20	$GHz$

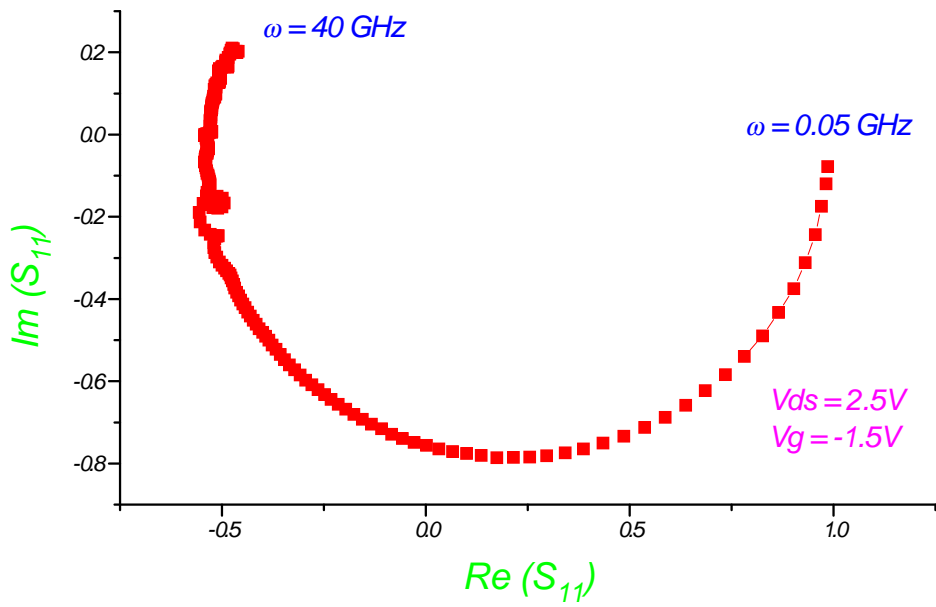
$C_{pg}$ ,  $C_{pd}$ ,  $L_g$ ,  $L_d$  sont les capacités et les inductances parasites des plots de connections reliés à la grille et au drain. Ces valeurs seront ultérieurement utilisées pour la mise au point de l'amplificateur à FET, qui constitue le but final du projet.

---

12. Le gain de puissance est défini par le quotient de la puissance disponible par le circuit et de la puissance disponible par la source.



FET 1588(e)



FET 1588(e)

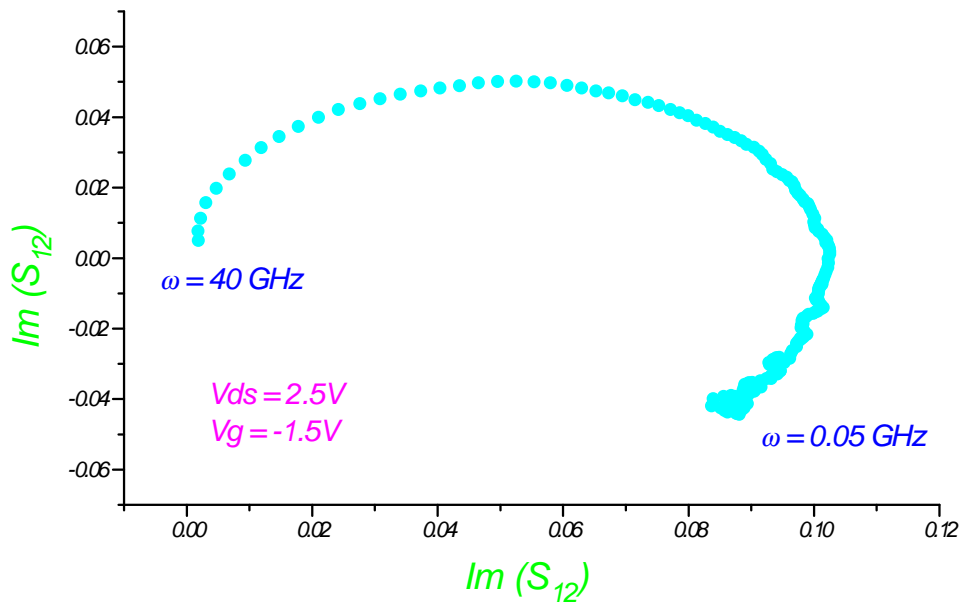


FIG. 4.15 –  $s_{11}$  et  $s_{12}$  en fonction de la fréquence.

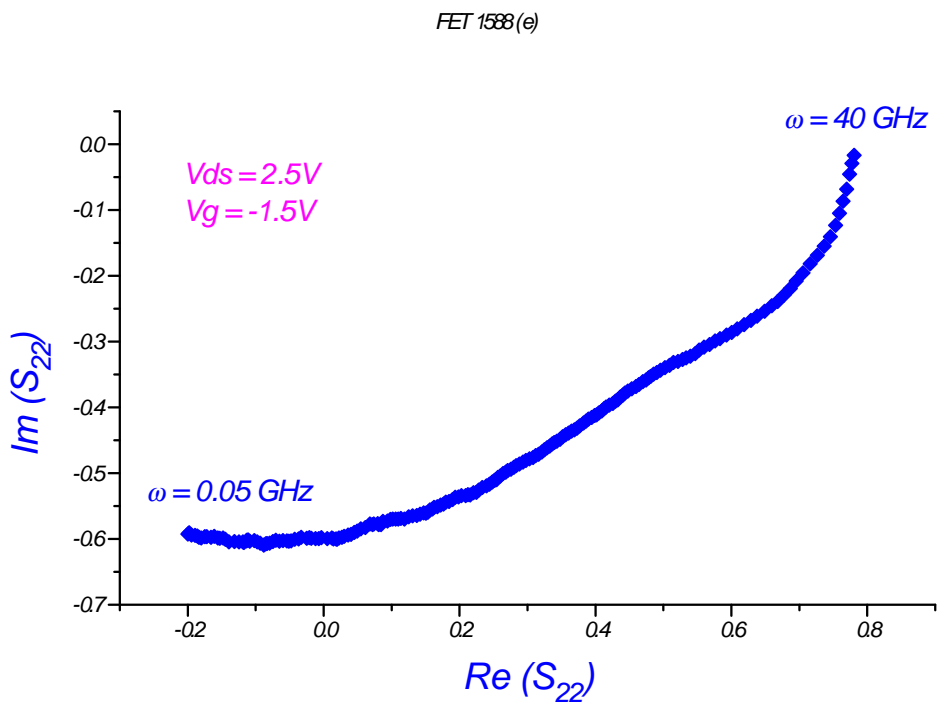
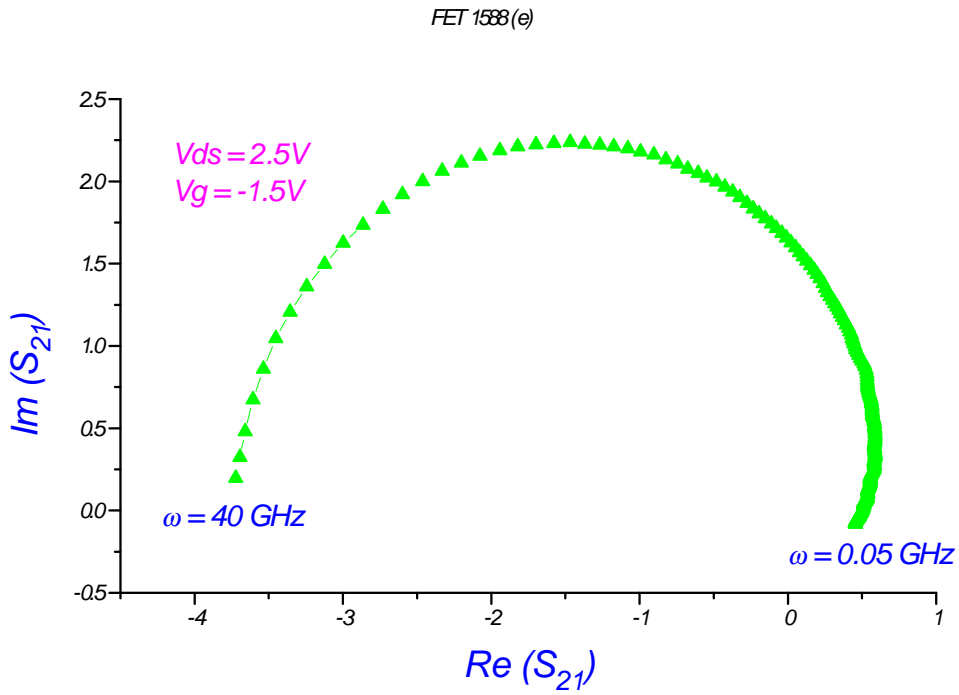


FIG. 4.16 –  $s_{21}$  et  $s_{22}$  en fonction de la fréquence.

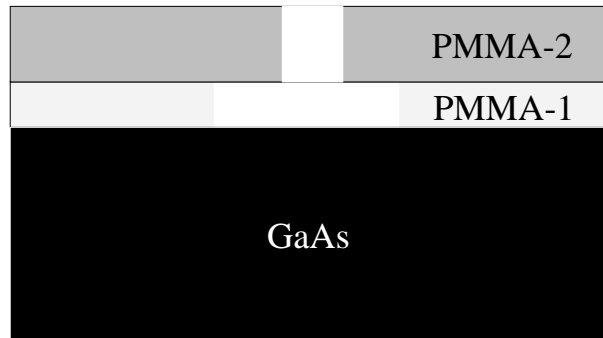


FIG. 4.17 – Profil du PMMA après développement.

#### 4.2.4 Fabrication de la Grille par lithographie électronique

##### Motivation

Comme nous l'avons déjà mentionné, les performances d'un FET à haute fréquence sont limitées à la fois par la capacité entre la source et la grille, et par le temps de transfert entre la source et la grille. Une réduction de la longueur de la grille  $L_g$  entraîne une diminution de ces deux paramètres, puisqu'ils sont tout deux proportionnels à  $L_g$ . La technique de lithographie électronique est nécessaire pour atteindre un tel but.

**Principe de la lithographie électronique** Le principe de la lithographie électronique est analogue à celui de la lithographie optique mais fait appel à des électrons à la place de la lumière. La résine est un polymère (généralement du PMMA), dont les liens sont brisés par des électrons à haute énergie ( $5 - 50keV$ ). La résine irradiée peut se dissoudre dans un solvant, qui dissout la résine non-irradiée avec un taux beaucoup plus faible. Le faisceau d'électrons est contrôlé à l'aide de lentilles magnétiques et son diamètre n'excède pas  $50\text{\AA}$ . La résolution de cette technique est cependant limitée par l'émission d'électrons secondaires par l'échantillon et avoisine  $500\text{\AA}$ .

##### Procédé

**Préparation de l'échantillon** L'échantillon est tout d'abord nettoyé successivement dans du trichloroéthane et dans du propanol, puis est séché sur une plaque chauffante à  $180\text{ }^\circ\text{C}$  pendant une vingtaine de minutes. Deux couches de PMMA, de différents poids moléculaire sont déposés sur l'échantillon dans le but d'obtenir après développement une forme "en champignon" inversé (fig. 4.17), nécessaire pour l'étape du lift-off. Nous avons utilisé des PMMA de poids moléculaires 200 et  $495K$ , comportant respectivement 3 et 5% d'Anisole, lequel constitue le solvant. L'épaisseur totale de PMMA obtenue est de l'ordre de  $1700\text{\AA}$ . Les conditions pour le dépôt des couches de PMMA sont résumées dans le tableau suivant.

	Vitesse de rotation (Tr/min)	Temps de chauffage à $180\text{ }^\circ\text{C}$ (min)
<i>PMMA</i> (1)	4000	> 10
<i>PMMA</i> (2)	8000	> 10

**Écriture et développement** Le PMMA est exposé d'après le motif souhaité sous le faisceau d'électron, contrôlé par un micro-ordinateur. L'énergie des électrons est typiquement de  $40keV$ . Le courant est ajusté à une valeur appropriée, qui dépend de la taille du motif. Pour l'exposition des plots, on utilise ainsi un courant de l'ordre de  $800pA$ , et la taille de la fenêtre balayée par le faisceau correspond à un agrandissement 100. La grille est exposée avec un agrandissement 600. La dose représente la quantité d'électrons qui atteint l'échantillon par unité de surface. Celle-ci dépend du matériau considéré, de la taille du motif (dans notre cas la grille) et de la distance entre deux points d'exposition. Les valeurs typiques sont reportées dans le tableau 4.2.4.

Longueur de la grille ( $\mu m$ )	Courant ( $pA$ )	Dose ( $\mu C/cm^2$ )
0.5	60	400
0.25	< 20	600 – 700
0.1	< 10	900 – 1000

L'échantillon est développé pendant environ 1 minute dans une solution (MIBK/Isopropanol 1:3), immergé une vingtaine de secondes dans de l'isopropanol, puis rincé à l'eau déionisée. Après développement, le PMMA subsiste seulement aux endroits non exposés par le faisceau d'électrons. Cette étape est suivie comme précédemment d'une attaque sélective de la couche de contact, puis du dépôt de la grille.

Grâce à cette technique nous avons réalisé des grilles de longueur inférieure à  $0.2\mu m$ , dont on peut observer une image, obtenue par microscopie électronique, sur la figure 4.18. L'effet de la réduction de la longueur de la grille sur les performances du transistor a ensuite été examiné. Les caractéristiques de deux FET comportant des longueurs de grille différentes et réalisés avec la même hétérojonction (no 143) sont comparés dans le tableau 4.2.4.

$L$ ( $\mu m$ )	1	0.25
$g$ ( $mS/m$ )	170	225
$F_{max}$	19	36

La réduction de la longueur de la grille a pour effet une augmentation de la transconductance. L'effet le plus spectaculaire est cependant observé sur la fréquence de fonctionnement maximale qui a pratiquement doublé après réduction de la longueur de grille de 1 à  $0.25\mu m$ . Il est également possible d'augmenter la performance des transistors en réalisant une grille en forme de "T". La technique de fabrication est décrite dans l'appendice C.

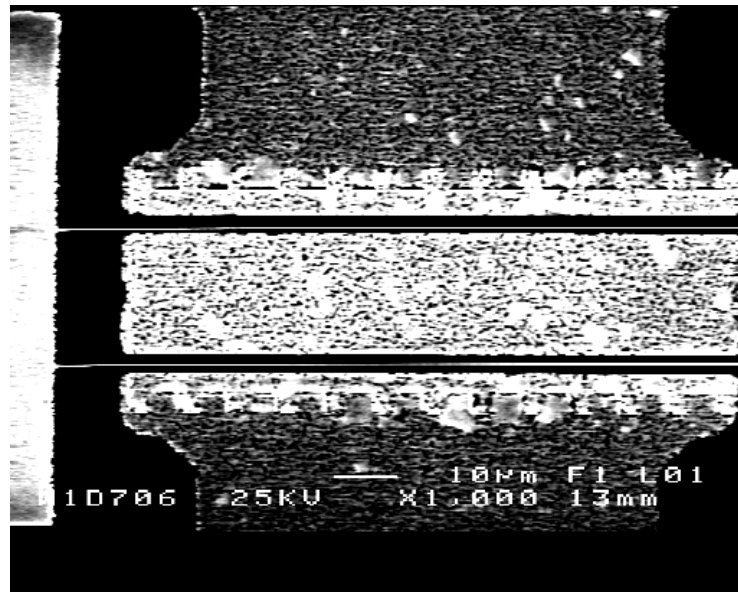


FIG. 4.18 – Image par microscopie électronique d'un FET, doté d'une grille de longueur  $0.2\mu\text{m}$  environ.

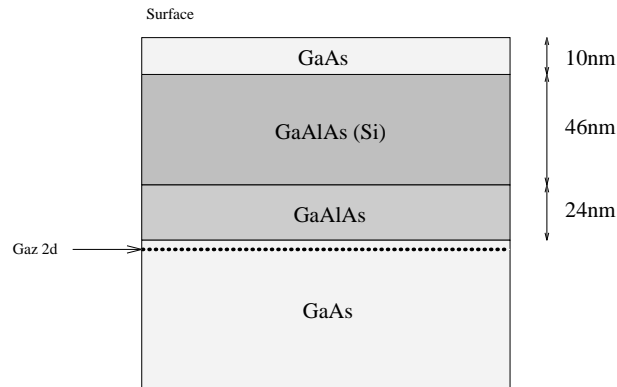


FIG. 4.19 – Les différentes couches constituant l'hétérojonction

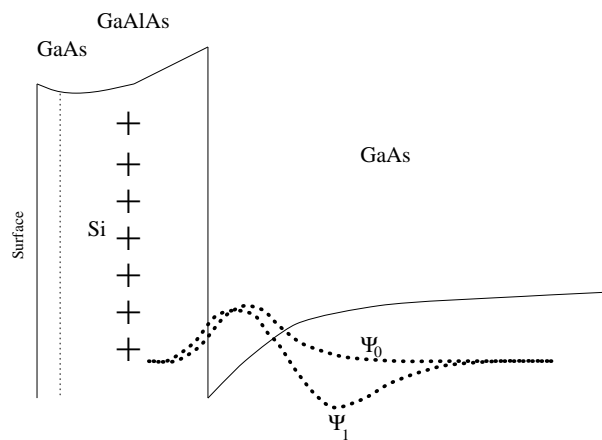


FIG. 4.20 – Schéma représentant les deux premiers états électroniques dans le puit situé à l'interface du GaAs et du GaAlAs.

## 4.3 Fabrication d'un réseau de systèmes mésoscopiques isolés

### 4.3.1 Gaz d'électrons bidimensionnel

Les échantillons sont fabriqués par D. Mailly dans des l'hétérojonctions réalisées par B. Etienne par épitaxie moléculaire (MBE). Les différentes couches la constituant sont présentées sur la figure 4.21.

L'hétérojonction est formée de deux semiconducteurs, le GaAs et le GaAlAs. Ceux-ci ont une largeur de bande d'énergie interdite différente. De ce fait, en l'absence de dopage, la bande de conduction présente un saut à l'interface des deux semiconducteurs. Une couche de silicium est déposée dans le GaAlAs à une vingtaine de  $nm$  de l'interface. Outre leur rôle de donneurs d'électrons, les atomes de Silicium créent une fois ionisés un potentiel qui stabilise les électrons au voisinage de l'interface. Les électrons se trouvent alors dans un potentiel qui a une forme à peu près triangulaire (fig. 4.20).

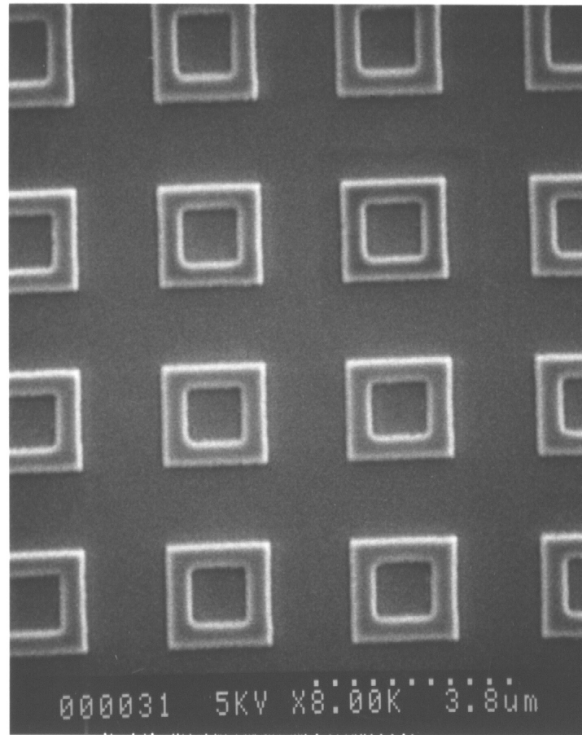


FIG. 4.21 – Réseau d'anneaux gravés dans une hétérojonction GaAs/GaAlAs observé par microscopie électronique.

L'énergie des électrons dans ce puit est quantifiée. L'écart entre le niveau fondamental et le premier niveau excité est de l'ordre de  $30K$ , de sorte qu'à basse température ( $T < 1K$ ), seul le premier niveau est occupé. Pour l'état fondamental, l'extension de la fonction d'onde dans la direction perpendiculaire à l'interface est très faible. On peut alors considérer que le gaz est confiné dans un plan, dont l'épaisseur est donnée par celle de la fonction d'onde, de l'ordre de  $150$  à  $200\text{\AA}$ . En revanche, le mouvement des électrons est libre dans le plan.

### 4.3.2 Fabrication

L'échantillon consiste en un réseau de systèmes mésoscopiques isolés, de formes différentes. Dans ce travail, nous avons considéré des anneaux et des carrés, mais ce choix n'est pas restrictif. Le réseau est tout d'abord lithographié dans du PMMA par la technique de lithographie électronique, décrite dans la section précédente. Suit une évaporation d'aluminium qui, après lift-off, forme un masque. Protégée par son masque, l'hétérojonction est alors attaquée par gravure ionique à l'Argon. La profondeur de la gravure dépend de l'échantillon considéré. Pour les carrés, la gravure a été effectuée jusqu'au GaAs. Il s'en suit une forte déplétion, réduisant de manière significative ( $\sim 0.5\mu m$ ) la taille effective des échantillons. Celle-ci est de l'ordre de  $1.5\mu m$ , qui est à comparer avec leur taille en gravure de  $2\mu m$ . Sur la figure, on peut observer une image par lithographie électronique d'un réseau d'anneaux.





## Chapitre 5

# Méthode de mesure de la susceptibilité électrique ou magnétique d'un système isolé

### 5.1 Introduction

Dans une mesure habituelle de conductance, schématisée sur la figure (fig. 5.1), l'échantillon est connecté à des fils de mesure. La conductance relie le courant  $I$  circulant dans l'échantillon à la différence de potentiel  $V$  à ses bornes:

$$I = GV \quad (5.1)$$

Pour un échantillon de taille typique  $a$ , on a  $G \sim \sigma a$ , où  $\sigma$  est la conductivité de l'échantillon. Par conséquent, une réduction de la taille de l'échantillon n'entraîne pas une réduction des signaux mesurés, puisque  $V \sim \frac{I}{a}$ . Toutefois, pour des échantillons de taille micronique, les problèmes de chauffage imposent l'utilisation de faibles courants, typiquement de l'ordre de  $1nA$  donnant lieu à des tensions de l'ordre de 10 à  $100nV$ . Une telle tension est facile à détecter avec un voltmètre faible bruit.

En revanche, la difficulté des mesures *par influence* s'accroissent fortement quand on diminue

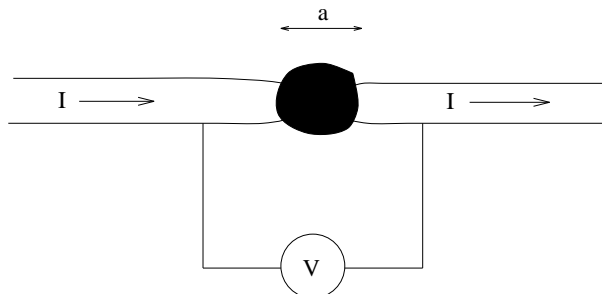


FIG. 5.1 – *Echantillon connecté à des fils dans une mesure de conductance.*

la taille de l'échantillon. En effet, la susceptibilité magnétique d'un conducteur de taille typique  $a$  est proportionnelle à  $a^4$ , et la susceptibilité électrique à  $a^3$ , ce qui donne lieu à des signaux de très faible amplitude lorsqu'il s'agit de conducteurs de taille micrométrique. Calculons à titre d'exemple l'ordre de grandeur de la susceptibilité orbitale d'un anneau mésoscopique de rayon  $1\mu m$ , fabriqué dans une hétérojonction semiconductrice GaAs/GaAlAs. La partie dissipative de la susceptibilité ( $\chi''$ ) s'exprime en fonction de la conductance de l'anneau, dont une valeur typique dans ces matériaux est  $10\frac{e^2}{h}$ . A  $300MHz$ , on a donc  $\chi''(\omega) = i\omega\mu_0 S^2 G \sim 10^{-12}m^3$ .

La partie non-dissipative de la susceptibilité est reliée au courant permanent circulant dans l'anneau, auquel correspond un moment magnétique  $M \sim \frac{ev_F}{L}S \sim 3000\mu_B$ , ou encore une susceptibilité<sup>1</sup>  $\chi' \sim \frac{MS\mu_0}{\phi_0} \sim 5 \cdot 10^{-11}m^3$ . En considérant non pas un mais  $10^5$  anneaux, il faut donc être capable de détecter des signaux tels que:

$$\begin{cases} \chi' \sim 10^{-6}m^3 \\ \chi'' \sim 10^{-7}m^3 \end{cases}$$

La mesure de la réponse électrique et magnétique de systèmes mésoscopiques isolés nécessite donc une technique expérimentale très sensible. La sensibilité de la détection n'est d'ailleurs pas la seule contrainte. En effet, la cohérence quantique impose que les mesures soient effectuées à très basse température, typiquement à quelques dizaines de millikelvin, et à très basse puissance afin de prévenir les problèmes de chauffage. Le système de détection doit être ainsi compatible avec l'utilisation d'un cryostat à dilution (espace, puissance dissipée).

Nous allons décrire au cours de ce chapitre une méthode expérimentale qui satisfait au mieux l'ensemble de ces contraintes.

## 5.2 Principe de la mesure

La nécessité d'une technique de détection ultra-sensible a conduit à envisager une méthode résonante. Celle-ci permet en effet de gagner un facteur  $Q \gg 1$  sur la sensibilité<sup>2</sup>, par rapport à une technique non résonante.

Il s'agit d'une mesure par influence qui consiste à coupler de manière capacitive ou inductive un grand nombre de systèmes mésoscopiques à un résonateur électromagnétique. Le couplage a pour effet de modifier les caractéristiques du résonateur, la fréquence de résonance  $f_0$  et le facteur de qualité  $Q$ , dont les variations sont reliées à la susceptibilité de l'échantillon. Le résonateur est donc à la fois l'émetteur et le détecteur. La quantité physique mesurée dépend de la nature du couplage entre l'échantillon et le résonateur. Un couplage capacitif donne lieu à une réponse électrique tandis que la réponse magnétique est mesurée pour un couplage de nature inductive. On s'intéresse plus particulièrement aux variations de  $f_0$  et de  $Q$  en fonction du champ magnétique, qui sont reliées aux effets quantiques sur la susceptibilité.

---

1. On a utilisé l'expression du courant pour un échantillon ballistique. La vitesse de Fermi dans le GaAs est typiquement de l'ordre de  $10^5ms^{-1}$ .

2.  $Q$  est le facteur de qualité du résonateur. Il sera défini ensuite.

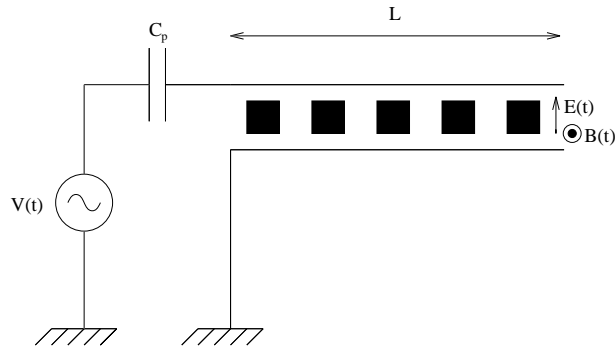


FIG. 5.2 – Schéma de la ligne bifilaire.

## 5.3 Choix du résonateur

### 5.3.1 Description des contraintes

Une fois effectué le choix de la technique résonante, il s'agit de trouver un résonateur qui satisfait les contraintes imposées par nos échantillons:

- Haut facteur de qualité.
- Couplage optimal avec l'échantillon.
- Gamme de fréquence intéressante.
- Compatibilité avec l'utilisation d'un réfrigérateur à dilution  $He^3 - He^4$

Le facteur de qualité caractérise les pertes dans le résonateur. Il détermine en grande partie sa sensibilité. Celle-ci dépend également de la qualité du couplage entre le résonateur et l'échantillon, qui intervient dans le processus de rétroaction d'une mesure par influence.

Une différence essentielle entre systèmes connectés et isolés réside dans le caractère discret du spectre d'énergie électronique. Les fréquences intéressantes sont celles qui sont de l'ordre de l'écartement moyen entre les niveaux électroniques  $\Delta$ . Dans nos échantillons, celui-ci est de l'ordre de  $700MHz$ .

### 5.3.2 Le résonateur: Une ligne bifilaire supraconductrice

Cet ensemble de contraintes a conduit B. Reulet et H. Bouchiat [89] à utiliser une ligne bifilaire supraconductrice. Il s'agit d'un microrésonateur constitué de deux fils parallèles d'une longueur de  $20cm$  et distants de  $4\mu m$ , au voisinage desquels sont placés le réseau de systèmes mésoscopiques que l'on désire étudier (fig. 5.2). Celui-ci est fabriqué par lithographie optique sur un substrat de saphir. Les détails de fabrication sont exposés dans l'appendice E. Afin de limiter la dissipation, un supraconducteur, le niobium, a été choisi comme matériau constitutif. Celui-ci présente l'avantage d'avoir un champ critique élevé<sup>3</sup>. Enfin, pour minimiser la taille du

3. Les caractéristiques du Niobium massif sont:

$$T_c = 9.2K \quad H_c^1 \approx 1000G$$

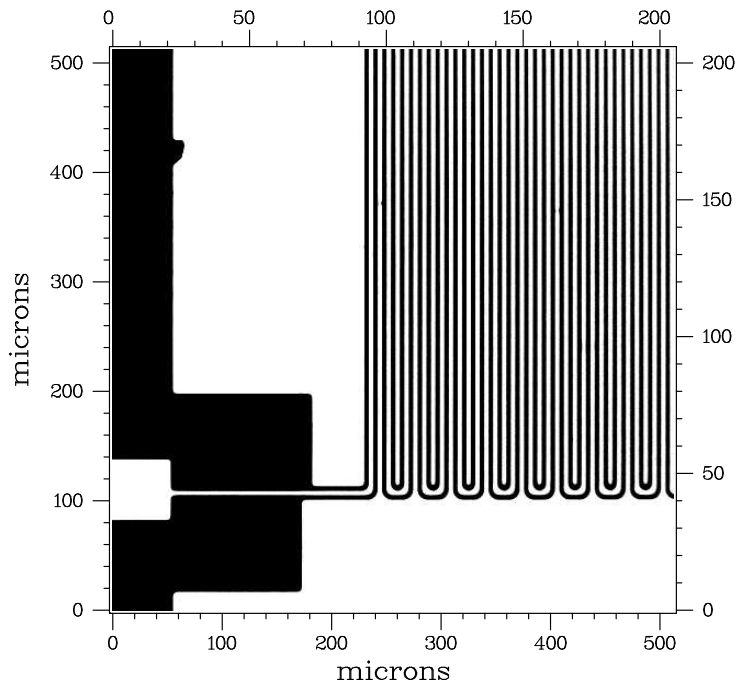


FIG. 5.3 – Photographie optique de la ligne résonnante.

résonateur et faciliter le montage de l'échantillon, une géométrie en méandre a été adoptée.

**Caractéristiques de la ligne bifilaire** Les modes de résonances de la ligne bifilaire sont analogues à ceux d'une corde vibrante<sup>4</sup>. Il s'agit de modes *discrets*, pour lesquels la longueur d'onde du champ électromagnétique  $\lambda_n$  est telle que:

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} \quad (5.2)$$

où  $L$  est la longueur de la ligne. Les fréquences de résonance sont donc données par

$$\omega_n = \frac{\pi c}{L \sqrt{\epsilon_r^{eff}}} \quad (5.3)$$

où  $c$  désigne la vitesse de la lumière et  $\epsilon_r^{eff}$  la constante diélectrique du milieu. Si l'on considère que le substrat remplit un demi-espace, on a:

$$\epsilon_r^{eff} = \frac{1 + \epsilon_r}{2} \quad (5.4)$$

La constante diélectrique du saphir vaut  $\epsilon_r \approx 10$ . Le mode fondamental, pour lequel  $\lambda = 2L$  correspond donc à une fréquence  $f_0 = 320 MHz$ .

---

4. Il s'agit de modes mécaniques.

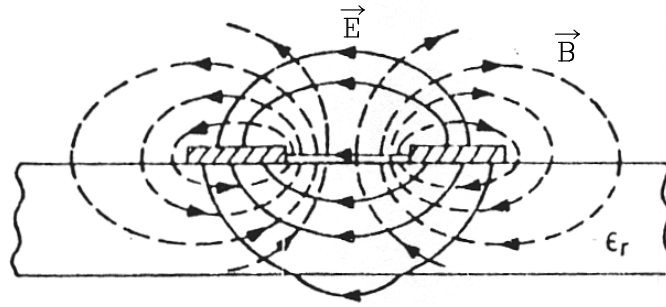


FIG. 5.4 – Lignes de champ dans le résonateur.

Quand une différence de potentiel alternative est appliquée aux bornes de la ligne, il existe entre les fils de la ligne un champ magnétique oscillant, perpendiculaire au plan du résonateur et un champ électrique situé dans le plan du résonateur. Les lignes de champ sont représentées sur la figure 5.4. Celles-ci décroissent exponentiellement en fonction de la distance au résonateur. L'impédance d'une ligne bifilaire se calcule exactement. L'inductance et la capacité par unité de longueur d'une ligne bifilaire ont pour expression<sup>5</sup>:

$$L_l = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \left( \frac{d}{r_0} \right) \quad (5.5)$$

$$C_l = \frac{\pi \epsilon_{eff}}{\ln \frac{d}{r_0}} \quad (5.6)$$

où  $d = 4\mu m$  est la distance entre les fils de la ligne bifilaire et  $r_0 \approx 0.5\mu m$  le rayon d'un fil.

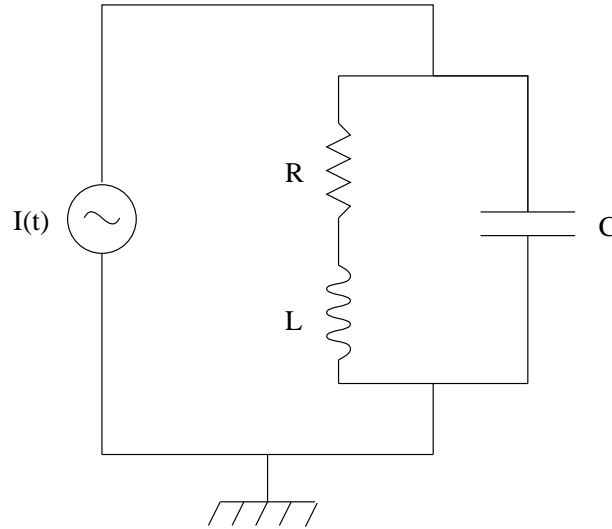
### 5.3.3 Montage de l'échantillon

#### Technique

Les échantillons considérés pour ce travail sont fabriqués par D. Mailly (L2M Bagneux) dans des hétérojonctions semiconductrices. Les détails de fabrication sont exposés dans le chapitre 4. Ceux-ci se présentent sous la forme d'une plaquette d'épaisseur  $e \sim 0.3mm$ , qu'on découpe de façon à ce que sa surface soit de l'ordre de celle de la ligne.

L'hétérojonction est collée sur la ligne en intercalant entre celle-ci et l'hétérojonction une feuille de mylar, d'épaisseur 1 micron. Cette dernière a pour but d'espacer la ligne de l'échantillon. En effet, à cause du diamagnétisme du Niobium, le champ statique est fortement inhomogène au voisinage de la surface du résonateur. Ces inhomogénéités décroissent exponentiellement quand on s'éloigne de la surface et sont réduites à 10 % à une distance d'un micron. Par ailleurs, le contact de l'hétérojonction peut endommager la ligne.

<sup>5</sup>. On remarque que le produit de la capacité par l'inductance est indépendantes des paramètres du résonateur:  $LC = \mu_0 \epsilon_{eff}$ .

FIG. 5.5 – Circuit  $R, L, C$ .

### Effet de l'échantillon sur les caractéristiques du résonateur

Les caractéristiques du résonateur sont sévèrement altérées par la présence d'une hétérojonction gravée. En particulier, le facteur de qualité est fortement affecté par les pertes diélectriques dans l'hétérojonction. Lors des premiers tests effectués par Bertrand Reulet et Hélène Bouchiat, il passait de plus de 80000 à 100! Ce point a depuis lors été amélioré grâce à une modification de la gravure de l'hétérojonction. En gravant l'hétérojonction jusqu'au GaAs on limite la dégradation du facteur de qualité causé par le GaAlAs gravé. Ce dernier est à la fois instable et conducteur et la partie dissipative  $\epsilon''$  de sa constante diélectrique est très grande. Par ailleurs, la fréquence de résonance est diminuée de quelques dizaines de megahertz en raison de la variation de capacité du résonateur causée par la constante diélectrique du GaAs<sup>6</sup>. Soulignons par ailleurs que c'est bien l'hétérojonction gravée et non la présence de carrés ou d'anneaux mésoscopiques sur ces derniers qui est responsable de ces variations de fréquence et de facteur de qualité.

## 5.4 Rappel sur les circuits électriques résonants

### 5.4.1 Cas idéal d'un générateur parfait

Un circuit résonant est formé par une capacité, en parallèle avec une inductance et une résistance (fig D.1). Un tel circuit est exposé en détails dans l'appendice D. La puissance absorbée d'un circuit  $R, L, C$  est maximum à la fréquence de résonance:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (5.7)$$

Le facteur de qualité caractérise les pertes dans le résonateur. Il est défini par la relation:

---

6. Ces variations dépendent de la façon particulière dont est collée l'échantillon.

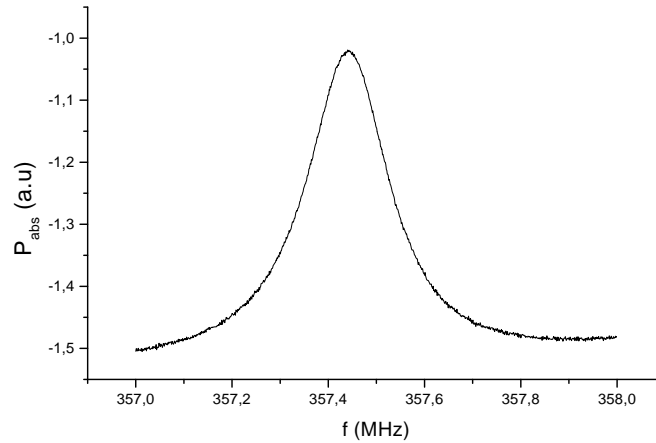


FIG. 5.6 – Courbe expérimentale de la puissance absorbée par le résonateur en fonction de la fréquence à  $T = 4.2K$ .

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} \quad (5.8)$$

La puissance absorbée à la résonance est proportionnelle au carré du facteur de qualité du résonateur  $P_0 = R\frac{Q^2 I^2}{2}$ , tandis que la largeur à mi-hauteur du pic de résonance vaut  $\delta\omega = \frac{\omega_0}{2Q}$ . Ces deux points nous serviront pour la mesure de  $Q$ . Près de la résonance, pour  $\omega = \omega_0 + \delta\omega$  tel que  $\delta\omega \ll \omega_0$ , l'impédance du résonateur peut être approximée par l'expression:

$$Z(\omega) = \frac{RQ^2}{1 - 2iQ\frac{\delta\omega}{\omega_0}} \quad (5.9)$$

#### 5.4.2 Cas réel: Importance du couplage entre générateur et résonateur

En pratique, on mesure la résonance de l'ensemble constitué par le résonateur et le générateur. Ce dernier comporte toujours une résistance d'entrée  $R_{ext}$  finie. Le couplage entre ces deux éléments est à l'origine d'un facteur de qualité effectif  $Q_{eff}$ , qui a pour expression:

$$\frac{1}{Q_{eff}} = \frac{1}{Q} + \frac{1}{Q_{ext}} \quad (5.10)$$

où  $Q_{ext} = \frac{R_{ext}}{L\omega_0}$ . Comme  $R_{ext} \ll L\omega_0$ , le facteur de qualité est essentiellement déterminé par la résistance du générateur. Pour pallier ce problème, le résonateur est isolé du reste du circuit par une capacité de couplage (fig. 5.7), éventuellement variable.

Par ce biais, le facteur de qualité est restauré. Néanmoins, la puissance absorbée est également réduite, ce qui rend la mesure plus difficile. On réalise un couplage optimum lorsque toute

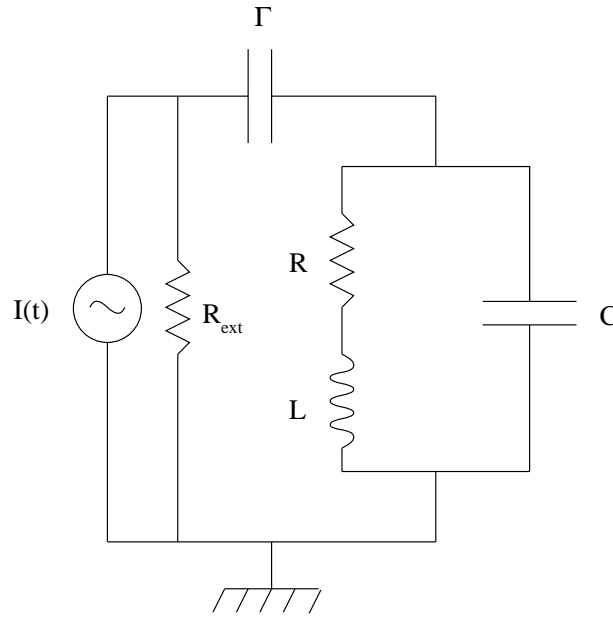


FIG. 5.7 – Circuit  $R, L, C$  couplé à un générateur de courant par le biais d'une capacité de couplage  $\Gamma$

la puissance fournie par le générateur est absorbée par le résonateur. Une telle condition est vérifiée lorsque:

$$\omega_1^2 \Gamma^2 R R_{ext} = 1 \quad (5.11)$$

où  $\omega_1$  est la nouvelle fréquence de résonance, qui dépend maintenant de la capacité de couplage  $\Gamma$ :

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L(C + \Gamma)}} \quad (5.12)$$

Au couplage optimum, on a  $Q_{ext} = Q$ . Par conséquent le facteur de qualité effectif vaut  $Q_{eff} = \frac{Q}{2}$ . Dans notre système, la capacité de couplage est réalisée par lithographie optique sur le même substrat que le résonateur. Il s'agit de 3 plots en niobium, d'espacement variable (qu'on aperçoit sur la figure 5.3) et qui forment donc des capacités de valeurs différentes. Les connections entre le porte-échantillon et les plots sont assurés par des fils de palladium de diamètre  $30\mu m$ , qu'on connecte à l'aide d'une soudeuse à ultra-sons. Le palladium a l'avantage de ne pas être supraconducteur. Ceci représente un net progrès par rapport aux soudures classiques à l'aluminium, qui sont la source de signaux parasites.

## 5.5 Couplage avec les échantillons

La nature du couplage entre la ligne et l'échantillon détermine la quantité physique mesurée. Un couplage inductif donne lieu à une réponse magnétique tandis que la réponse électrique est



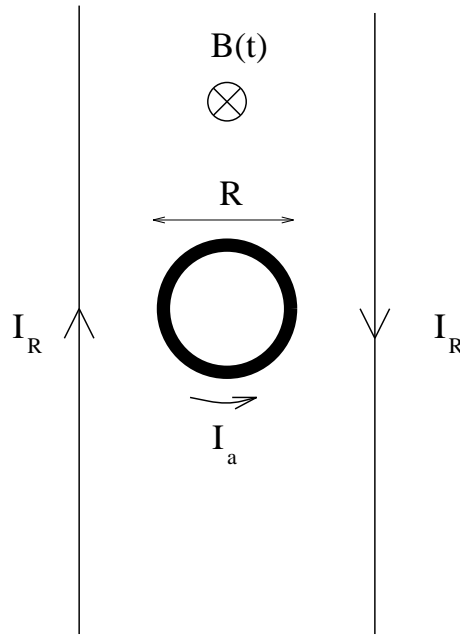


FIG. 5.8 – Anneau mésoscopique placé entre les fils de la ligne.

mesurée dans le cas d'un couplage capacitif. On s'intéresse tout d'abord au couplage magnétique.

### 5.5.1 Couplage magnétique

Soit un anneau mésoscopique placé entre les fils de la ligne bifilaire (fig. 5.8), dans laquelle circule un courant  $I_R(t)$ . Par définition, le flux créé par le résonateur sur l'anneau dépend du coefficient d'induction mutuel  $M$  entre le résonateur et l'échantillon:

$$\phi_a(t) = MI_R(t)$$

Il en résulte une force électromotrice,  $V = -\frac{\partial\phi_a}{\partial t} = -i\omega\phi_a$ , qui induit dans l'anneau un courant, proportionnel à la conductance  $G(\omega)$  de l'anneau:  $I_a(\omega) = G(\omega)V(\omega)$ . En remplaçant l'expression de  $V$  dans la formule précédente, on obtient:

$$I_a(\omega) = -iM\omega G(\omega)I_R(\omega)$$

Le courant dans l'anneau perturbe à son tour le résonateur, en créant à travers celui-ci un flux  $\phi_R(t) = MI_a(t)$ . La tension totale aux bornes du résonateur est alors modifiée:

$$V = ZI_R + \frac{\partial\phi_R}{\partial t}$$

La présence de l'anneau donne ainsi lieu à une variation de l'impédance du résonateur:

$$\delta Z(\omega) = \omega^2 M^2 G(\omega) \tag{5.13}$$

Pour un échantillon bidimensionnel de forme quelconque la variation d'impédance est proportionnelle à la susceptibilité de l'échantillon:

$$\delta Z(\omega) = \frac{i\omega M^2}{\mu_0 S^2} \chi(\omega) \quad (5.14)$$

où  $S$  est la surface de l'échantillon. La dissipation dans l'échantillon ( $\chi''$ ) affecte la résistance du résonateur, tandis que la partie non dissipative de la réponse ( $\chi'$ ) intervient dans l'inductance du résonateur:

$$\delta R = \frac{\omega M^2 \chi''(\omega)}{\mu_0 S^2} \quad (5.15)$$

$$\delta L = \frac{M^2 \chi'(\omega)}{\mu_0 S^2} \quad (5.16)$$

Le facteur de qualité du résonateur, ainsi que la fréquence de résonance sont ainsi modifiés<sup>7</sup>:

$$\frac{\delta Q}{Q} = -\frac{\delta R}{R} + \frac{\delta L}{2L} \quad (5.17)$$

$$\frac{\delta \omega}{\omega} = -\frac{1}{2} \frac{\delta L}{L} \quad (5.18)$$

Si  $\delta R \sim \omega \delta L$ , on a alors  $\frac{\delta L/L}{\delta R/R} \sim \frac{1}{Q}$ . Comme  $Q \gg 1$ , seule la variation de résistance intervient dans la variation de facteur de qualité. On obtient alors pour  $N$  échantillons identiques:

$$\frac{\delta \omega_0}{\omega_0} = -\frac{NM^2 \chi'(\omega)}{2L\mu_0 S^2} \quad (5.19)$$

$$\frac{\delta Q}{Q^2} = -\frac{NM^2 \chi''(\omega)}{L\mu_0 S^2} \quad (5.20)$$

### 5.5.2 Couplage électrique

Supposons maintenant que l'on place un conducteur entre les plaques d'une capacité (fig 5.9), à laquelle on applique une différence de potentiel alternative à la fréquence  $\omega$ . Quelle est la variation de capacité due à la présence du conducteur?

La capacité produit un champ électrique alternatif sur l'échantillon. Il en résulte un moment dipolaire induit  $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ , qui diminue localement  $\mathbf{E}$  au voisinage de l'échantillon.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E} + \mathbf{E}'(\mathbf{r})$$

---

7. Comme  $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ , on a  $\frac{\delta Q}{Q} = \frac{\delta L}{L} + \frac{\delta \omega}{\omega} - \frac{\delta R}{R}$ . En utilisant le fait que  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , on retrouve les relations 5.17 et 5.18.

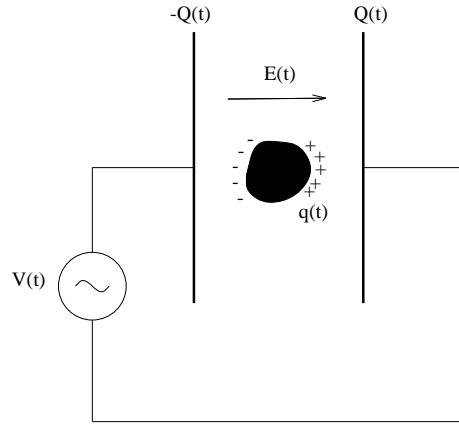


FIG. 5.9 – Conducteur placé entre les plaques d'une capacité, à laquelle est appliquée une différence de potentielle dépendante du temps.

La différence de potentiel aux bornes de la capacité  $V = \int E'(\mathbf{r})dr$  est donc modifiée, et par conséquent la capacité du résonateur:

$$C = C_0 [1 + k\chi_e] \quad (5.21)$$

où  $k$  est un coefficient de couplage entre le conducteur et la capacité, qui sera calculé plus loin pour une ligne bifilaire.

Considérons maintenant un circuit  $R, L, C$  parallèle, dont le facteur de qualité est donné par  $Q = \frac{R_0}{L_0\omega_0}$ , où  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0C_0}}$  est la fréquence de résonance du circuit. Comme on vient de le voir, la présence d'un échantillon modifie la valeur de la capacité<sup>8</sup>, qui devient  $C_1 = C_0(1 + k\chi')$ . Ceci a pour conséquence de modifier la fréquence de résonance du circuit, dont la nouvelle valeur s'écrit  $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC_1}}$ . Par ailleurs, la partie imaginaire ( $\chi_e''$ ) de la susceptibilité, donne naissance à une résistance effective,  $R_{eff} = \frac{1}{\omega C_0 k\chi_e''}$ , en parallèle avec la résistance initiale  $R_0$  du circuit, qui diminue le facteur de qualité du résonateur. Le nouveau facteur de qualité vaut  $Q_1 = \frac{R_1}{L\omega_1}$ , avec  $R_1 = \frac{R_0 R_{eff}}{R_0 + R_{eff}}$ . En faisant les hypothèses que  $Q_0 = \frac{R_0}{L\omega_0} \gg 1$  et  $k\chi' \sim k\chi'' \ll 1$ <sup>9</sup>, on peut montrer que les variations de la fréquence de résonance et du facteur de qualité du circuit induites par la présence de l'échantillon dans la capacité sont données par:

$$\begin{cases} \frac{\delta\omega_0}{\omega_0} = -\frac{k}{2}N\chi_e'(\omega) \\ \frac{\delta Q}{Q^2} = -kN\chi_e''(\omega) \end{cases} \quad (5.22)$$

8. En effet, en écrivant que  $\chi = \chi' - i\chi''$ , on a  $i\omega C = i\omega C_0(1 + k\chi') + k\omega C_0\chi''$ .

9. A un facteur  $Q$  près.

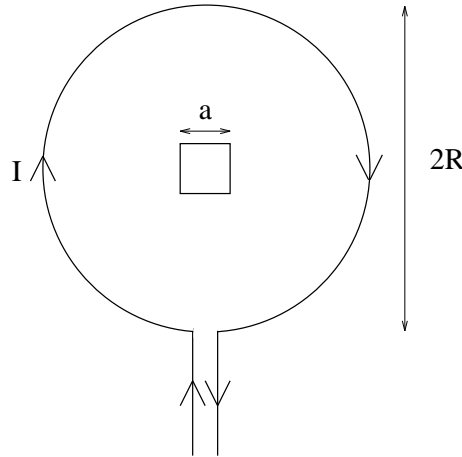


FIG. 5.10 – Boucle carrée de côté  $a$  placée au centre d'une inductance de rayon  $R$ , traversée par un courant  $I$ .

## 5.6 Calcul des coefficients de couplage entre la ligne et l'échantillon

### 5.6.1 Coefficient d'induction mutuelle

Soit une boucle d'inductance de rayon  $R$ , au centre de laquelle est placée une boucle carrée de côté  $a$  (fig. 5.10). Que vaut le coefficient d'induction mutuel entre les deux boucles?

Le courant  $I$  circulant dans l'inductance produit un champ magnétique au centre de l'anneau  $B = \int \frac{\mu_0 I d\mathbf{l} \wedge \mathbf{f}}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I}{2R}$ . Si  $R \gg a$ , les variations de  $B$  à l'intérieur de l'anneau peuvent être négligées. Moyennant cette approximation, le flux traversant l'anneau est  $\phi = BS = \frac{\mu_0 \pi a^2 I}{2R}$ . Le coefficient d'induction mutuelle entre l'inductance et l'anneau est défini par la relation  $\phi = MI$  et a pour expression:

$$M = \frac{\mu_0 \pi a^2}{2R} \quad (5.23)$$

A titre de comparaison, calculons maintenant le coefficient d'induction mutuel entre un fil et une boucle carrée de section  $a$ , placée à une distance  $b$  du fil (fig. 5.11). Le champ créé à une distance  $b$  par le fil est  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}$ . D'où l'on en déduit le flux dans la boucle,  $\phi = \int_b^{b+a} B(x) a dx$ , et par suite le coefficient d'induction mutuel:

$$M = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \left( \frac{a+b}{b} \right) \quad (5.24)$$

Si la boucle est placée près du fil, à une distance de l'ordre de  $a$ , l'expression se réduit à  $M \approx \frac{\mu_0 \ln(2)a}{2\pi}$ .  $M$  dépend cette fois-ci linéairement de  $a$  alors que, comme nous l'avons montré précédemment, le coefficient mutuel entre une grande et une petite boucle placée en son centre dépend quadratiquement de  $a$ . Ce point conditionne également le choix du résonateur. En effet, pour la situation schématisée sur la figure sur la figure 5.12, dans laquelle un grand nombre de

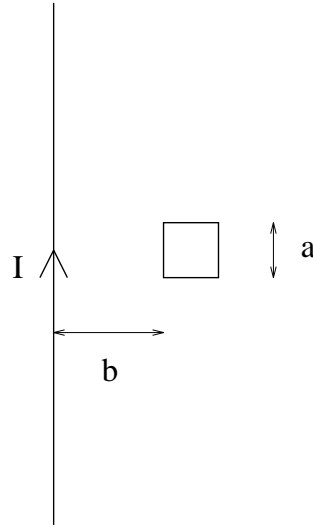


FIG. 5.11 – Boucle carrée de côté  $a$  placée à une distance  $b$  d'un fil parcouru par un courant  $I$ .

carrés sont entourés par une boucle d'inductance, seuls les carrés situés au bord de l'anneau sont efficacement couplés et contribuent à l'aimantation. Pour cette raison, il est préférable d'utiliser une ligne bifilaire à méandres, pour laquelle tous les carrés sont presque identiquement couplés.

### 5.6.2 Couplage électrique

On souhaite à présent calculer la capacité d'une ligne bifilaire au voisinage de laquelle est placé un échantillon métallique. Le problème est difficilement soluble car la présence du conducteur brise l'invariance par translation selon l'axe des fils. La symétrie est approximativement restaurée si l'on considère un grand nombre de conducteurs identiques placés en série suivant l'axe des fils (fig. 5.13). Le champ électrique entre les fils de la ligne a pour expression:

$$E(x) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x-d} \right) \quad (5.25)$$

où  $\lambda$  dénote la densité linéique de charge et  $d$  la distance entre les fils. En première approximation, la rangée de conducteurs est équivalente à deux fils (fig. 5.14) dont la densité linéique de charge est telle que  $\lambda_e a = N_u \epsilon_0 \chi E$ , avec  $E = \frac{V(x=a/2) - V(x=-a/2)}{a} = \frac{\lambda}{a\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d+a}{d-a}\right)$  et  $N_u = \frac{1}{2a}$ . Cette condition mène à  $\lambda_e = \lambda \frac{\chi}{2\pi a^3} \ln\left(\frac{d+a}{d-a}\right)$ . Il reste alors à calculer le nouveau potentiel aux bornes de la ligne dont on déduit la capacité par unité de longueur en présence de la rangée de conducteurs:

$$C'_l = C_l \left[ 1 + \frac{\chi}{2\pi a^3} \frac{\ln^2\left(\frac{d+a}{d-a}\right)}{\ln\left(\frac{d}{r_0}\right)} \right] \quad (5.26)$$

où  $C_l$  est la capacité par unité de longueur de la ligne qui est donnée par l'expression 5.6.

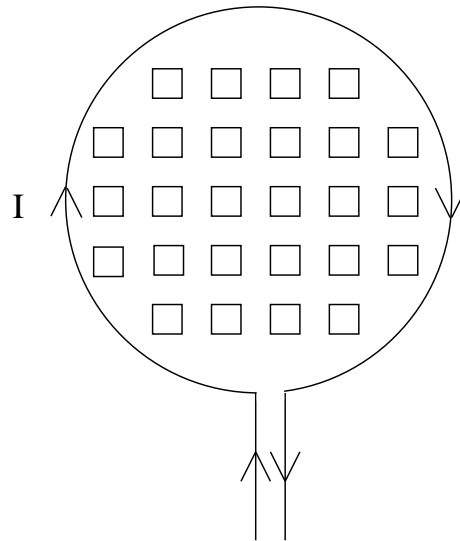


FIG. 5.12 – Réseau de conducteurs carrés placés dans une boucle d'inductance. En fait, seuls ceux qui sont proches de la boucle sont bien couplés à l'anneau.

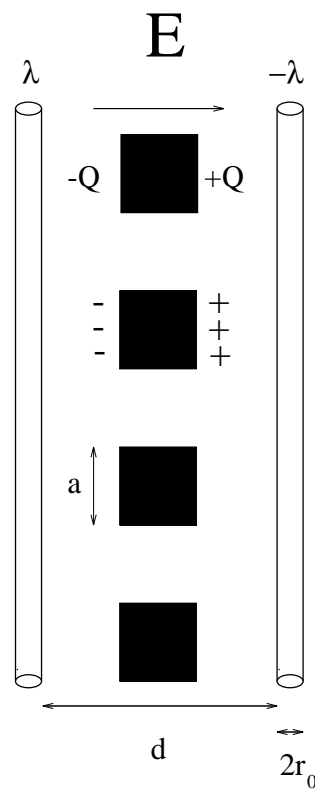


FIG. 5.13 – Conducteurs carrés placés entre les fils d'une ligne bifilaire.

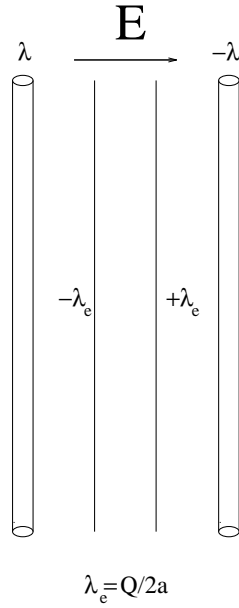


FIG. 5.14 – La rangée de conducteur est remplacée par deux fils de polarisation équivalente.

### 5.6.3 Couplage magnétique et électrique

Pour un couplage à la fois électrique et magnétique, la variation de la fréquence de résonance s'exprime (pour des carrés):

$$\frac{\delta f}{f} = k_e \chi_e + k_m \chi_m + k_e^{GaAs} \chi_e^{GaAs} + k_m^{GaAs} \chi_m^{GaAs} \quad (5.27)$$

avec  $k_e = k_m = \frac{-1}{4\pi a^3} \frac{\ln^2\left(\frac{d+a}{d-a}\right)}{\ln\left(\frac{d}{r_0}\right)}$ .  $\chi_{e,m}^{GaAs}$  est la susceptibilité électrique ou magnétique du diélectrique de l'échantillon.

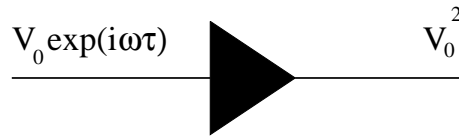
## 5.7 Principe de la mesure du facteur de qualité et de la fréquence de résonance

### 5.7.1 Rappel sur les lignes de transmission

Une ligne de transmission est constituée de deux conducteurs destinés à transmettre une onde électromagnétique. Les conducteurs peuvent être deux cylindres concentriques, formant ainsi un câble coaxial, ou encore deux fils parallèles: c'est le cas de la ligne bifilaire.

La propagation d'une onde électromagnétique dans une ligne de transmission est décrite par l'équation dite des "télégraphistes":

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (5.28)$$

FIG. 5.15 – *Le cristal*

où  $v = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}}$  dénote la vitesse de propagation de l'onde et  $L_u$  et  $C_u$  l'inductance et la capacité par unité de longueur de la ligne de transmission. L'impédance caractéristique d'une ligne de transmission est  $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ , et pour une ligne bifilaire a pour expression:

$$Z = \sqrt{\left(\frac{\mu_0}{\pi^2 \epsilon_{eff}}\right)} \ln\left(\frac{d}{r_0}\right) \quad (5.29)$$

Dans le cas où la ligne de transmission se termine par une impédance de valeur  $Z_0$ , toute la puissance est absorbée par celle-ci. En revanche, pour une ligne ouverte, presque toute la puissance est réfléchi. Plus généralement, si l'on connecte à la ligne de transmission une impédance (ou une autre ligne de transmission) de valeur  $Z_1$ , la puissance réfléchi est  $\frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0}$ . A la limite  $Z_1 \rightarrow \infty$ , toute la puissance est ainsi réfléchi.

## 5.7.2 Mesure de la puissance réfléchi

### “T magique”, cristal et mixer

La mesure de la puissance réfléchi fait appel aux composants radiofréquences suivant:

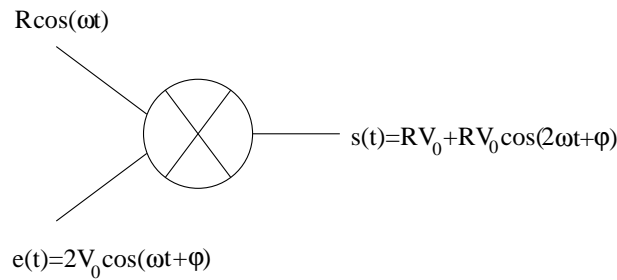
- “T magique”
- Cristal
- Mixer
- Déphaseur
- Amplificateur faible bruit

Le “T magique” permet de mesurer l'écart entre l'impédance d'une ligne et une impédance de référence, qu'on choisira égale à  $50\Omega$ . Le cristal (fig. 5.15) fonctionne de la même façon qu'une diode. Il transforme un signal haute fréquence  $V(t) = V_0 e^{i\omega_0 t}$  en un signal continu, proportionnel au carré de l'amplitude du signal d'entrée,  $V_0^2$ . Le mixer (fig. 5.16) effectue le produit de deux signaux. Supposons qu'on envoie à l'une de ses entrées un signal  $\omega_0$ ,  $V(t) = R \cos(\omega t)$ , et à l'autre de ses entrées un signal à la même fréquence mais déphasé par rapport au signal de référence:  $e(t) = 2V_0 \cos(\omega t + \varphi)$ . Le signal de sortie  $s(t)$  comporte une partie continue, proportionnelle à l'amplitude du signal d'entrée, et une partie haute fréquence à  $2\omega_0$ :

$$s(t) = RV_0 + RV_0 \cos(2\omega t + \varphi)$$

D'une manière générale, le mixer permet d'extraire la composante d'un signal à la fréquence du signal de référence. Grâce au déphaseur, on peut déphaser un signal haute fréquence. Le dépha-



FIG. 5.16 – *Le mixer.*

sage est contrôlé par une tension continue entre 0 et 15V. Enfin, nous utilisons un amplificateur large bande faible bruit ( $1.8dB/\sqrt{Hz}$ , 100MHz – 2GHz), de gain 100.

### La mesure

La mesure du signal réfléchi, dont le principe est schématisé sur la figure 5.17, s’effectue à l’aide du cristal ou du mixer. Un générateur haute fréquence (10kHz-2.7GHz) génère un signal à l’entrée du “T magique”. Ce dernier est d’une part connecté au résonateur, situé dans le cryostat, par l’intermédiaire de câbles coaxiaux rigides, et d’autre part à une résistance de 50Ω. Le signal RF à la sortie du “T magique” est proportionnel à  $\delta Z(\omega) = Z(\omega) - 50$ . L’utilisation du cristal donne accès à  $|\delta Z(\omega)|^2$  et le mixer à  $\delta Z(\omega)$ . Pour des raisons de sensibilité de la mesure, c’est cette dernière solution qui sera généralement retenue.

## 5.7.3 Asservissement du générateur sur la fréquence de résonance

### Modulation de phase et modulation d’amplitude

Dans les mesures qui vont suivre, nous utilisons fréquemment la technique de modulation. Celle-ci consiste à ramener un signal continu à fréquence finie, et limiter ainsi la nuisance du bruit en “ $\frac{1}{f}$ ”, toujours présent à basse fréquence.

Supposons par exemple que l’on mesure une grandeur  $S = A(\alpha)$ , dépendant d’un paramètre variable  $\alpha$ . Si une partie oscillante, de fréquence  $\Omega$ , est ajoutée à  $\alpha$ , le signal mesuré devient  $A(\alpha + \delta\alpha \cos(\Omega t))$ . Pour une modulation de faible amplitude ( $\delta\alpha \ll \alpha$ ), le signal mesuré comporte uniquement une composante à la fréquence  $\Omega$ , qui peut être détectée à l’aide d’une détection synchrone<sup>10</sup>:

$$S \approx A(\alpha) + \delta\alpha \frac{\partial A}{\partial \alpha} \cos(\Omega t)$$

Une augmentation de l’amplitude de la modulation entraîne l’apparition dans la réponse d’une composante à  $2\Omega$ , proportionnelle à  $\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha^2}$ . Nous utiliserons ce point pour nos mesures.

Nous allons maintenant décrire la modulation d’amplitude et de phase d’un signal  $V(t) = V_0 e^{i\omega t}$ .

#### -Modulation d’amplitude

10. La modulation constitue le signal de référence pour la détection synchrone.

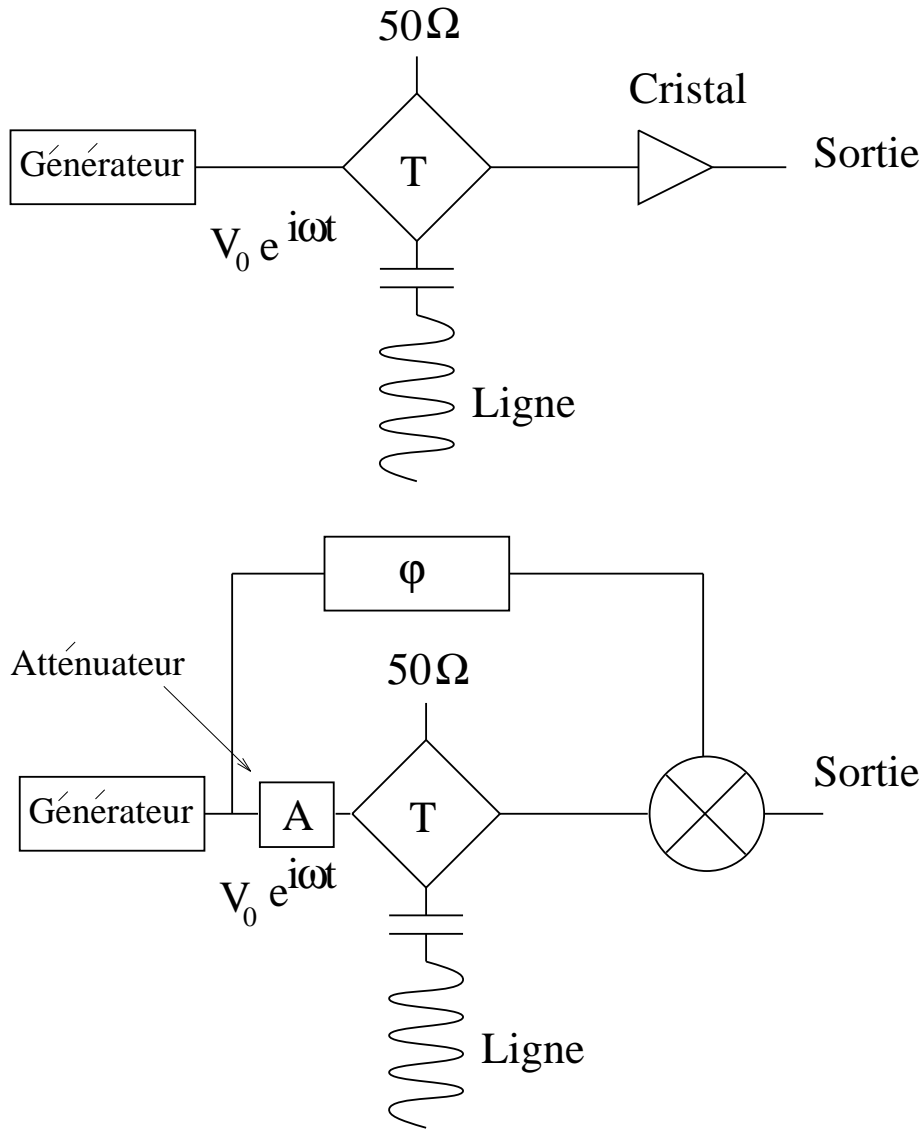


FIG. 5.17 – Schéma de principe de la mesure de la puissance réfléchie.

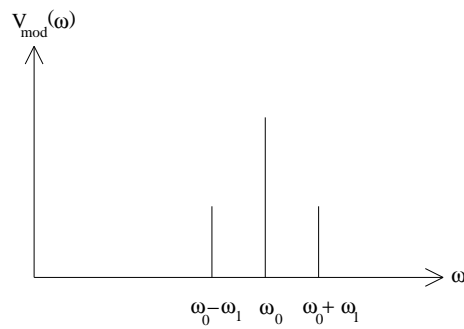


FIG. 5.18 – Spectre de fourier d'un signal de fréquence  $\omega_0$ , modulé en amplitude par un signal de fréquence  $\omega_1$ .

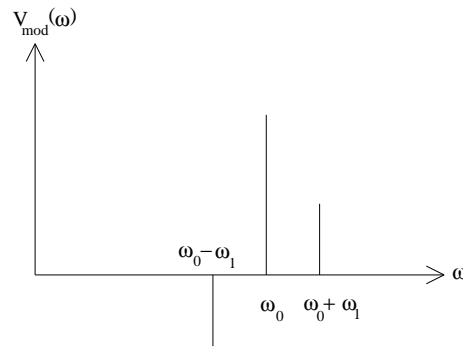


FIG. 5.19 – Spectre de Fourier d'un signal de fréquence  $\omega_0$ , modulé en fréquence par un signal de petite amplitude à la fréquence  $\omega_1$

La modulation d'amplitude du signal  $V(t)$  à la fréquence  $\omega_1$  s'écrit :

$$V_{mod}(t) = (A + \delta A \cos(\omega_1 t)) e^{i\omega_0 t}$$

$$\frac{V_{mod}(t)}{A} = e^{i\omega_0 t} + \frac{\delta A}{2A} e^{i(\omega_0 + \omega_1)t} + \frac{\delta A}{2A} e^{i(\omega_0 - \omega_1)t}$$

Cela revient donc à ajouter deux ondes aux fréquences  $\omega = \omega_0 \pm \omega_1$ , en phase avec le fondamental (fig. 5.18).

#### -Modulation de fréquence

La modulation d'un signal de fréquence fondamentale  $\omega_0$ , par un signal de fréquence  $\omega_1$  s'écrit :

$$V_{mod}(t) \approx V_0 e^{i\left[\omega_0 t + \frac{\delta\omega}{\omega_0} \cos(\omega_1 t)\right]} \quad (5.30)$$

Si  $\frac{\delta\omega}{\omega_0} \ll 1$ , on peut faire un développement limité de l'exponentielle :

$$V_{mod}(t) = V_0 e^{i\omega_0 t} + V_0 \frac{i\delta\omega}{2\omega_0} e^{i(\omega_0 + \omega_1)t} + V_0 \frac{i\delta\omega}{2\omega_0} e^{i(\omega_0 - \omega_1)t} \quad (5.31)$$

Dans le régime linéaire, la modulation de fréquence correspond à l'addition de 2 ondes, aux fréquences  $\omega = \omega_0 \mp \omega_1$ , en quadrature avec le fondamental (fig. 5.19). Pour une amplitude de modulation quelconque, il faut considérer un nombre infini de termes dans le développement précédent.

#### **Modulation de la fréquence du générateur**

Afin de mesurer  $Z(\omega)$  avec une plus grande précision, le champ RF est modulé en fréquence par une fréquence petite devant  $\omega_0$ , typiquement entre 50 et 100 kHz. A la sortie du "T magique", le signal est :

$$V(t) = Z(\omega_0) e^{i\omega_0 t} + Z(\omega_0 + \omega_1) \frac{i\delta\omega}{\omega_0} e^{i(\omega_0 + \omega_1)t} + Z(\omega_0 - \omega_1) \frac{i\delta\omega}{\omega_0} e^{i(\omega_0 - \omega_1)t}$$

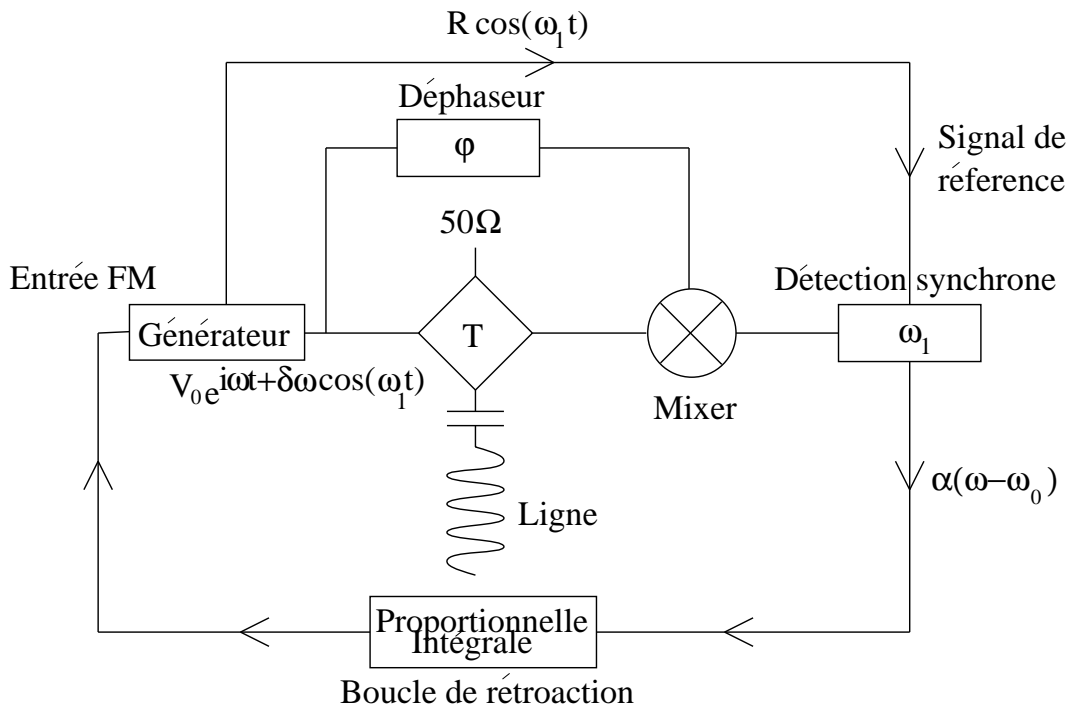


FIG. 5.20 – Schéma de principe de l'asservissement.

Le mixer multiplie  $V(t)$  par le signal référence  $e^{i\omega_1 t + \varphi}$ , dont la phase est ajustée manuellement à l'aide du déphaseur de façon à maximiser l'amplitude du signal de sortie. Celle-ci est modulée à la fréquence  $\omega_1$ , qu'on détecte à l'aide d'une détection synchrone:

$$s(t) = \frac{\delta\omega}{\omega} \frac{\partial Z(\omega)}{\partial \omega} \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

De l'expression 5.9 de l'impédance du résonateur au voisinage de la résonance, on déduit que  $\frac{\partial(\Re Z(\omega))}{\partial \omega} \propto (\omega - \omega_0)$ . Il en résulte que  $s(t)$  est proportionnel à l'écart à la résonance. De façon pratique, on se place dans la limite  $\omega_1 \sim \frac{\omega_0}{Q}$ , ce qui permet une détection à  $2\omega_1$ , utilisée pour la mesure du facteur de qualité (voir section 5.7.4).

### Asservissement

A fréquence du générateur fixe, il n'est pas possible de distinguer les variations de facteur de qualité de celles de la fréquence de résonance. Pour cette raison, on préfère asservir le générateur sur la fréquence de résonance. En outre, ceci permet de suivre la fréquence de résonance, même si celle-ci varie beaucoup. Le principe de l'asservissement est schématisé sur la figure 5.20.

Supposons qu'à cause d'une perturbation extérieure la fréquence du résonateur change d'une quantité  $\Delta\omega_R(t)$ . Quelle est la variation de la fréquence du synthétiseur  $\Delta\omega_s$ ? A fréquence du générateur fixe (c'est à dire en l'absence d'asservissement), la tension  $V_1$  à la sortie de la détection synchrone est proportionnelle à l'écart à la résonance:  $V_1 = \beta\Delta\omega_R(t)$ . Celle-ci constitue

donc un signal d'erreur, lequel est traité par un circuit de type "proportionnel intégrale", qui l'intègre et le multiplie par un coefficient de proportionnalité  $P$ :

$$V_2(t) = PV_1(t) + I \int_0^t V_1(t') dt'$$

La fréquence du générateur est commandée par la tension  $V_2$  à la sortie du circuit proportionnel-intégrale:  $\Delta\omega_s = \gamma V_2(t)$ . Une fois la boucle fermée, on a la relation:  $V_1(t) = \beta (\Delta\omega_R(t) - \Delta\omega_s(t))$ . En transformée de Fourier, les variations de fréquence du synthétiseur sont reliées à celles du résonateur par la relation:

$$\Delta\omega_s = \frac{\gamma\beta G}{1 + \gamma\beta G} \delta\omega_R \quad (5.32)$$

où  $G = P + \frac{I}{i\Omega}$  est le gain de l'intégrale-proportionnelle. Pour  $\Omega$  petit, la constante de temps de l'asservissement est donnée par  $\tau \approx \frac{1}{I\gamma\beta}$ . Elle est principalement déterminée par la partie intégrale du circuit. La qualité de l'asservissement dépend fortement des paramètres  $P, I$ . Si  $P$  est trop grand, le générateur oscille autour de la fréquence de résonance sans jamais l'atteindre. Par contre, s'il est trop petit, il n'atteint la résonance qu'au bout d'un temps très long. Plus généralement, le temps d'intégration doit être ajusté de manière à ce que l'asservissement soit capable de suivre les éventuelles variations de la fréquence de résonance.

#### 5.7.4 Mesure du facteur de qualité

Différentes méthodes permettent de mesurer le facteur de qualité du résonateur:

- Mesure absolue.
- Mesure par modulation d'amplitude.
- Détection à  $2\omega_1$

La première méthode, que nous utilisons au moment de tester la ligne résonante dans l'hélium, consiste à balayer la fréquence du générateur et à mesurer l'emplacement et la largeur en fréquence du pic de résonance, qui vaut  $\frac{\omega_0}{2Q}$ . Cette mesure constitue une mesure absolue du facteur de qualité.

Une fois l'asservissement effectué, l'amplitude du signal à la sortie du mixer est proportionnel au facteur de qualité, puisqu'à la résonance, l'impédance du résonateur vaut  $RQ^2 = QL\omega_0$ . Une amélioration de la sensibilité de la mesure est possible en modulant l'amplitude du signal du générateur, qui est alors de la forme:  $e(t) = V_0 \left(1 + \frac{\delta V_0}{V_0} \cos(\Omega t)\right) e^{i\omega t}$ . A la sortie du mixer, le signal comprend une partie haute fréquence à  $2\omega_0$  qui s'ajoute à une partie basse fréquence proportionnelle à  $Z(\omega) \left(1 + \frac{\delta V_0}{V_0} \cos(\Omega t)\right)$ . Cette dernière est détectée par une détection synchrone pour laquelle la tension de modulation tient lieu de référence.

Enfin, la dernière solution est de détecter (à l'aide d'une détection synchrone) la composante à  $2\omega_1$  du signal. Celle-ci est en effet proportionnelle au facteur de qualité puisque  $\left. \frac{\partial^2 Z}{\partial \omega^2} \right|_{\omega=\omega_0} \propto Q$ . C'est cette dernière méthode que nous avons adoptée.

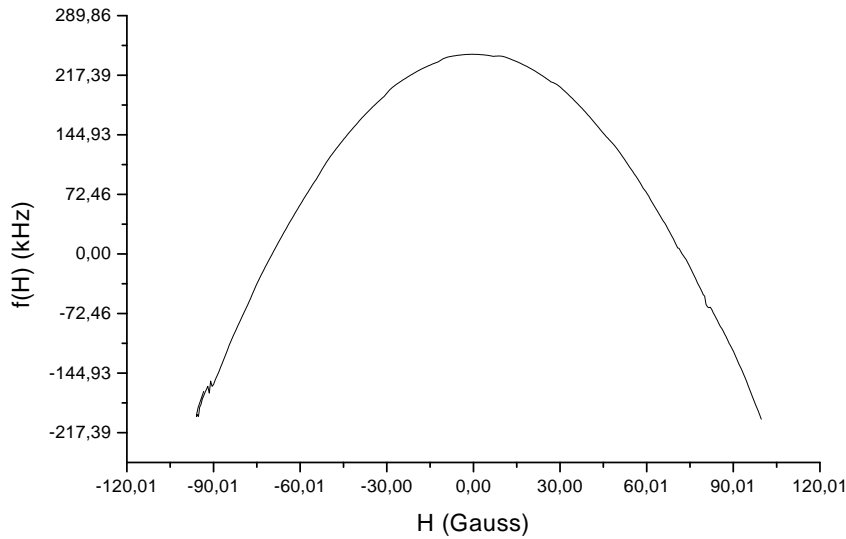


FIG. 5.21 – Dépendance de la fréquence de résonance avec le champ magnétique à  $T = 4.2K$ .

### 5.7.5 Mesure en fonction du champ magnétique

Nous mesurons les variations de la fréquence de résonance et du facteur de qualité en fonction du champ magnétique. Celles-ci sont en effet reliées à la dépendance en champ magnétique de la susceptibilité de nos échantillons. L'utilisation d'un matériau supraconducteur pour la ligne présente pour cela un léger désavantage. A cause du diamagnétisme du Niobium, les caractéristiques de la ligne à vide sont modifiées par le champ magnétique. Celui-ci donne lieu à une résistance de surface résiduelle, qui dans le cadre de la théorie de Ginzburg-Landau est donnée par:

$$R_s(H) = R_s(0) \exp\left(\frac{1}{2} \frac{\Delta(0)}{T} \frac{H^2}{H_c^2}\right) \quad (5.33)$$

où  $\Delta(0)$  désigne le gap du supraconducteur et  $H_c$  son champ critique. L'augmentation de  $R_s$  avec  $H$  cause une diminution du facteur de qualité. Par ailleurs, en raison de la pénétration du champ magnétique dans le niobium, sur une longueur caractéristique  $\lambda_L$  (la longueur de London) l'inductance de la ligne augmente<sup>11</sup> avec  $H$ . Il en résulte une variation de la fréquence de résonance de la ligne en fonction du champ magnétique. Ces effets sont beaucoup plus faibles à très basse température. Comme l'illustrent les figures 5.21 et 5.23, pour des champs inférieurs à 50 Gauss, la fréquence de résonance et le facteur de qualité varient quadratiquement en fonction du champ.

Les dépendances en champ du facteur de qualité et de la fréquence de résonance comportent

---

11. L'inductance (par unité de longueur) de la ligne a pour expression  $L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{d}{r_0(H)}\right)$ . Le rayon moyen du fil  $r_0(H) = r - \frac{\lambda_L}{2}$  diminue avec le champ magnétique. Par conséquent, l'inductance de la ligne augmente avec  $H$ . En revanche la capacité de la ligne ne varie pas avec  $H$ .

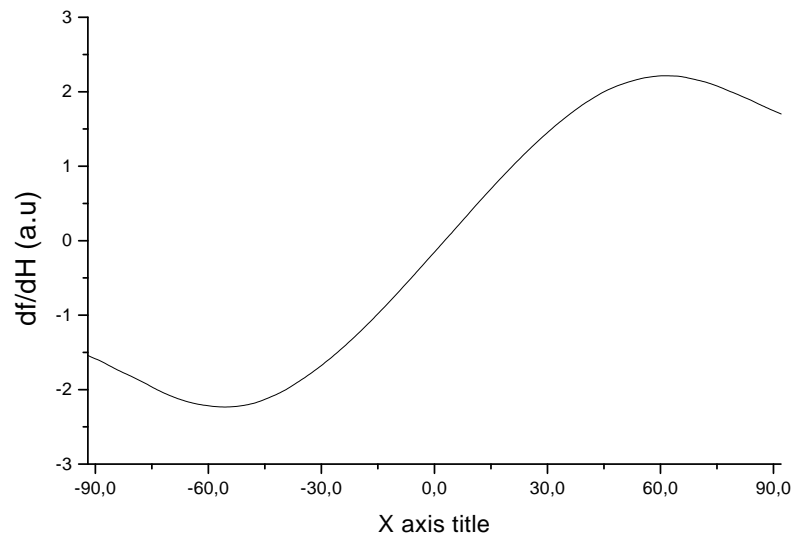


FIG. 5.22 – Dérivée de la fréquence de résonance par rapport au champ magnétique à  $T = 4.2K$ .

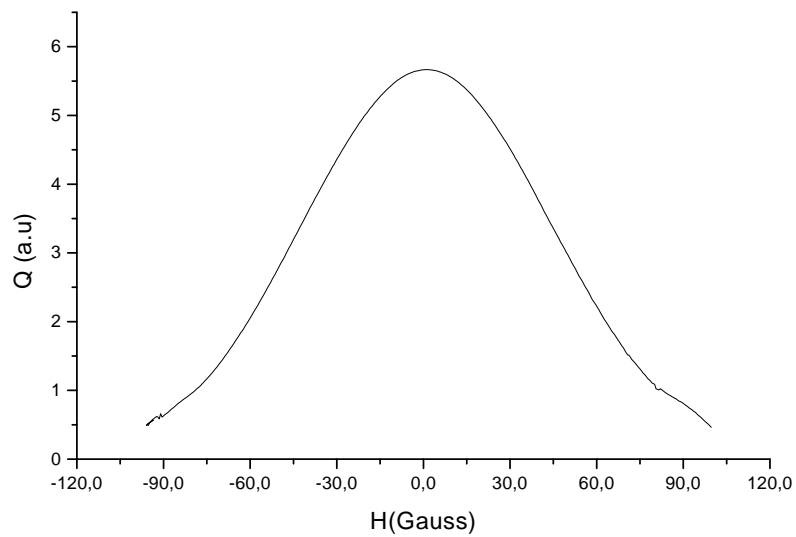


FIG. 5.23 – Dépendance du facteur de qualité en fonction du champ magnétique à  $T = 4.2K$ .

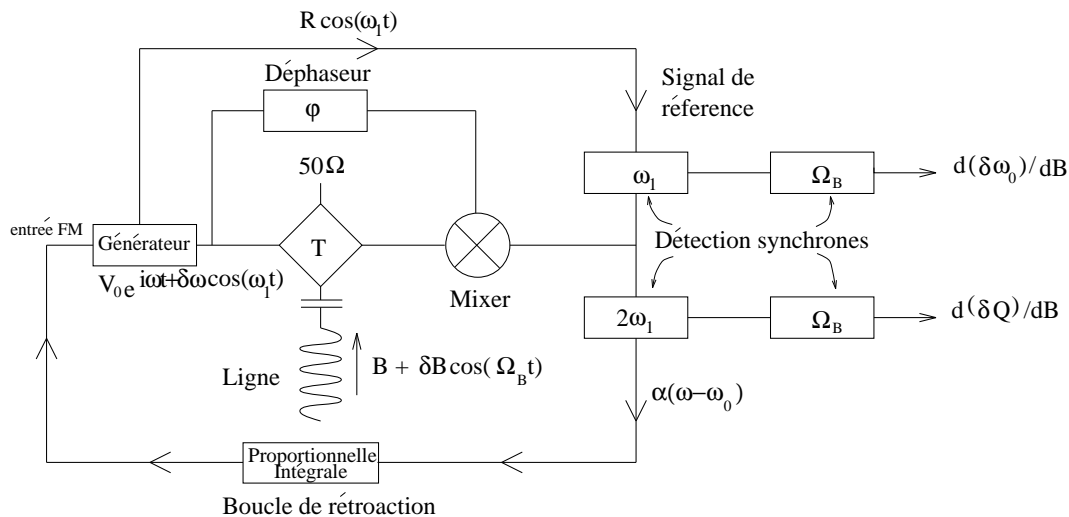


FIG. 5.24 – Schéma de principe de la mesure.

donc deux contributions: celle de la ligne et celle de l'échantillon à laquelle elle est couplée. Cette dernière s'obtient en soustrayant une ligne de base correspondant aux variations de la ligne à vide.

### 5.7.6 Modulation du champ magnétique

#### Intérêt

La sensibilité de la mesure est accrue en modulant le champ magnétique à basse fréquence, typiquement de quelques Hertz. Il en résulte que la fréquence de résonance, ainsi que le facteur de qualité, respectivement mesurés à  $\omega_1$  et  $2\omega_1$  (où  $\omega_1$  est la fréquence de modulation du champ électromagnétique), sont également modulés, et sont détectés à l'aide de détections synchrones. Le schéma général de la mesure est représenté sur la figure 5.24.

#### Réalisation pratique

La modulation du champ peut être effectuée à l'aide d'une grosse bobine qui enserre la canne à dilution, et dont le champ maximum est 5 Tesla. Cependant, cette méthode n'autorise que des fréquences de l'ordre de quelques Hertz, typiquement  $3\text{ Hz}$ . Le champ est en effet écranté à la fois par le porte échantillon, et par les parties métallique de la canne à dilution (en particulier l'écran du bouilleur).

Une autre technique fait appel à une petite bobine de champ, placée juste au dessus de l'échantillon dans un porte échantillon adapté, que nous décrirons plus loin. D'un diamètre de 5 millimètres et longue de 8 millimètres, elle est bobinée d'un fil de diamètre  $1/10\text{ mm}$ , supraconducteur afin d'éviter la dissipation d'énergie par effet Joule. L'étalonnage s'effectue en comparant les signaux des deux bobines pour une fréquence de  $1\text{ Hz}$ , pour laquelle l'écrantage est pratiquement nul. Nous avons ainsi déterminé qu'un champ de l'ordre de 1 Gauss correspond



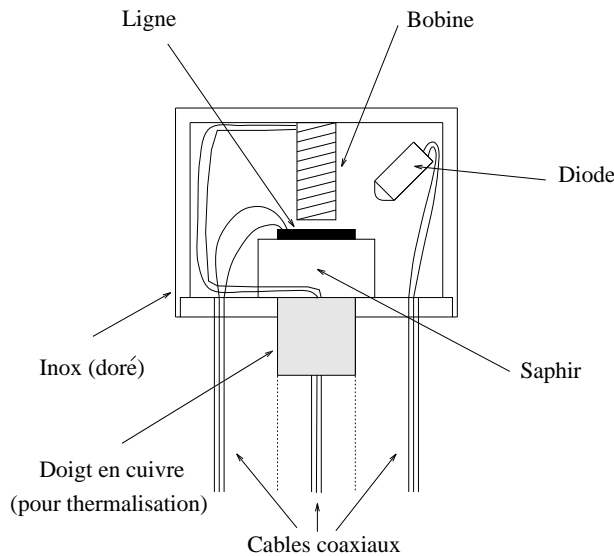


FIG. 5.25 – Schéma du porte échantillon.

à un courant de l'ordre de  $0.1mA$ .

Grâce à cette méthode, il est possible de moduler le champ jusqu'à des fréquences beaucoup plus élevées et d'être ainsi moins sensible au bruit en " $\frac{1}{f}$ ".

**Porte échantillon** L'échantillon est placé dans une boîte métallique fermée (fig. 5.26), qui le protège du bruit électromagnétique. Celle-ci est conçue de manière à ce que le champ magnétique créé par la petite bobine soit peu écranté. Pour cette raison, le porte échantillon a été réalisé en inox, qui est un mauvais conducteur, et sa surface a été dorée afin d'atténuer les pertes électromagnétiques.

La ligne est posée sur un cube de saphir de  $5mm$  de hauteur et de  $8mm$  de largeur. Ce matériau a l'avantage d'être un conducteur thermique mais un isolant électrique. L'échantillon est ainsi thermalisé sans pour autant que le champ magnétique modulé soit écranté.

Par ailleurs, on peut éclairer l'échantillon grâce à une diode électroluminescente<sup>12</sup>, située à proximité de celui-ci, et modifier ainsi la densité de porteurs dans l'hétérojonction.

### 5.7.7 Dépendances en température

Une résistance chauffante, placée à proximité du substrat permet de faire varier continuellement la température de l'échantillon entre la température seuil de la dilution, de l'ordre de  $20mK$ , et  $1K$ . La température est mesurée par une résistance d'oxyde de Ruthenium, qui a pour caractéristique d'être très sensible aux variations de température dans la gamme qui nous intéresse.

Les caractéristiques de la ligne dépendent également de la température, par l'intermédiaire de la longueur de pénétration de London. Lorsque la température diminue, le facteur de qualité

12. On fait circuler dans la diode un courant de l'ordre de  $1mA$ .

s'améliore et la fréquence de résonance augmente de pair avec le diamagnétisme du niobium qui devient plus efficace.

Par rapport à d'autres matériaux, le saphir a comme avantage de contenir peu d'impuretés magnétiques, dont la susceptibilité de Curie en  $\frac{1}{T}$  donne lieu à diminution de la fréquence de résonance en fonction de la température.

### 5.7.8 Description du dispositif de refroidissement

Le dispositif de refroidissement comprend divers éléments:

- Le cryostat
  - Il s'agit d'une enceinte destinée à contenir de l' $He^4$  liquide (dont la température est  $4.2K$ ), dans laquelle on plonge la canne à dilution. Le cryostat est isolé thermiquement par le biais d'une deuxième enceinte sous vide, concentrique de la première, et remplie de super-isolation.
- Le banc de pompage
  - Il comprend:
    - Une pompe primaire principalement destinée à prévider les tuyaux de pompage jusqu'à un vide de l'ordre de  $10^{-2}$  Torr
    - Une pompe secondaire à diffusion, qui permet d'atteindre un vide de  $10^{-5}$  Torr
    - Une pompe mécanique utilisée pour le pompage nécessaire au fonctionnement de la dilution
    - Un compresseur dont le rôle est de comprimer l' $He^3$  avant qu'il soit réinjecté dans la dilution
- Le réfrigérateur à dilution

### 5.7.9 Le réfrigérateur à dilution

Les mesures que nous présentons nécessitent de refroidir l'échantillon et la ligne jusqu'à des très basses températures. Cela est possible grâce à un cryostat à dilution [102] fabriqué au laboratoire par Marc Nardonne. Cet appareil utilise un mélange  $He^3-He^4$ . Il y a entre ces deux isotopes une différence de taille. L'atome d' $He^3$  est un fermion tandis que l'atome d' $He^4$  est un boson. Pour une température inférieure à  $2.17K$ , ce dernier devient superfluide. Au dessous de  $0.87K$ , l' $He^3$  et l' $He^4$  forment un mélange biphasique, cela pour une grande plage de composition. Un tel mélange se décompose en deux phases distinctes, l'une riche en  $He^3$ , l'autre pauvre. A la limite  $T \rightarrow 0$ , la concentration d' $He^3$  dans la phase diluée tombe à environ 6%, tandis que la phase riche en  $He^3$  est essentiellement pure.

En pompant sur la phase diluée, on diminue son rapport  $He^3 : He^4$ . Afin de restorer l'équilibre de la concentration, des atomes d' $He^3$  vont diffuser de la phase concentrée vers la phase diluée. La phase diluée est analogue à une phase gazeuse du point de vue des atomes d' $He^3$ , car les atomes d' $He^4$  sont condensés dans leur état fondamental et se comportent essentiellement

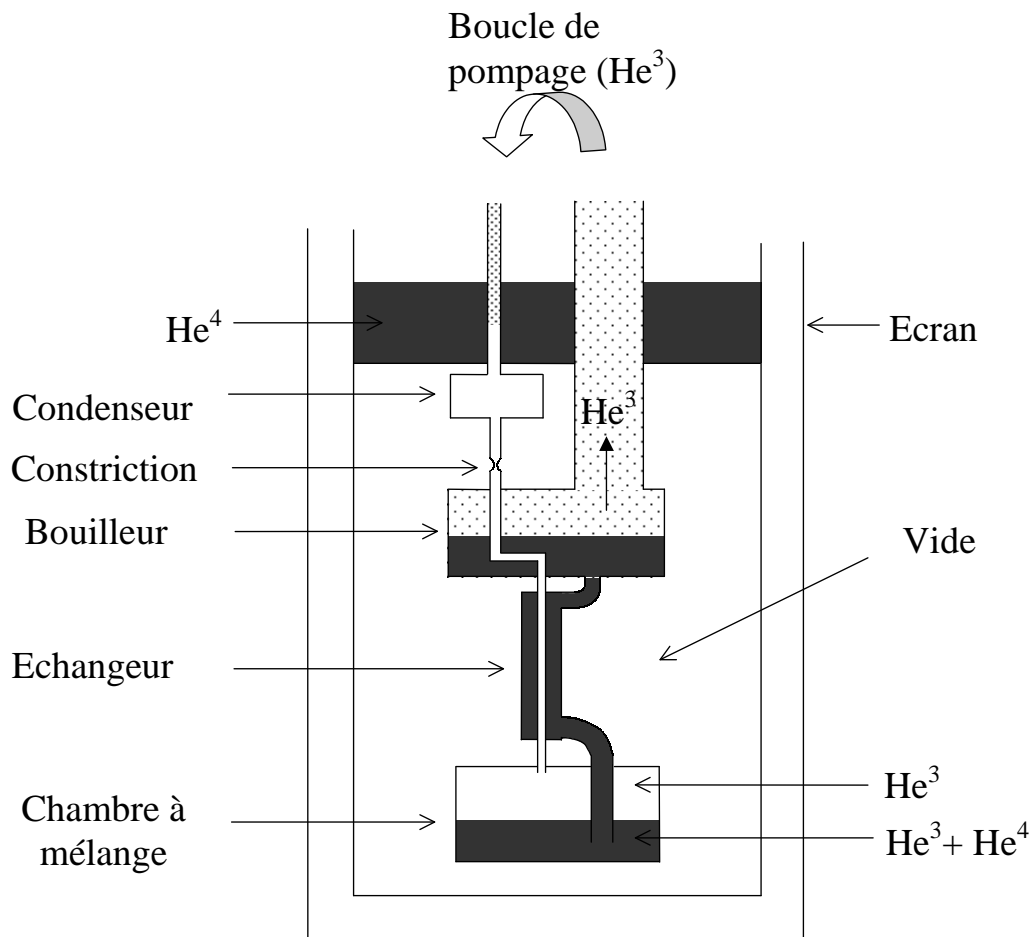


FIG. 5.26 – Schéma du réfrigérateur à dilution.

comme si ils étaient seuls. Ainsi, la diffusion des atomes d' $He^3$  de la phase concentrée à la phase diluée peut être comprise comme une "évaporation", dont il résulte un refroidissement.

Le prérefroidissement et la liquéfaction du mélange  $He^3-He^4$  s'effectuent par une détente adiabatique de type Joule-Thomson. Le pompage d' $He^3$  a lieu principalement au niveau du bouilleur, un cylindre de  $2cm$  de diamètre, dont la température est  $1K$ . Le mélange pompé est thermalisé avec celui réinjecté au moyen d'échangeurs. Notre cryostat bénéficie d'échangeurs discrets grâce auxquels il atteint une température limite de  $18mK$ , pour une puissance de refroidissement de l'ordre de  $0.1\mu W$ .

Le signal haute fréquence est transmis par des câbles coaxiaux d'impédance caractéristique  $50\Omega$ , afin d'éviter des réflexions parasites (voir section 5.7.1). Ceux-ci ont comme contrainte d'avoir une faible conductivité thermique et une bonne conductivité électrique. Pour cette raison nous avons utilisé des câbles dont l'âme intérieure de diamètre  $0.1mm$  est en Niobium et le blindage externe de diamètre  $1mm$  et d'épaisseur  $0.1mm$  est en cupro-Nickel. Ces matériaux ont été choisis pour leur faible conductivité thermique, respectivement  $\kappa = 10W/Km$  pour le Niobium et  $\kappa = 0.1W/Km$  pour le Cupro-Nickel à  $1K$ . Les câbles sont thermalisés par des contacts métalliques<sup>13</sup> en plusieurs points entre le bouilleur et la chambre à mélange.

---

13. L'âme intérieure des câbles est thermalisée par de la Stycast noire.

## Chapitre 6

# Susceptibilité de carrés et d'anneaux mésoscopiques isolés

### 6.1 Motivation

Les interférences électroniques sont la signature de la nature quantique des électrons. Celle-ci se manifeste dans le vide, comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, mais également dans les solides, où les *interférences électroniques* donnent lieu à de nombreux effets quantiques. La cohérence quantique a ainsi pour effet d'augmenter la résistance d'un conducteur par rapport à sa valeur classique: c'est la *localisation faible* [41] [39], qui résulte de l'interférence constructive de deux trajectoires fermées identiques et parcourues dans un sens différent (i.e renversées par le sens du temps). Cette correction disparaît quand on applique un champ magnétique suffisamment fort, donnant lieu à une *magnétoconductance positive*. Par ailleurs, la résistance d'un anneau mésoscopique oscille en fonction d'un flux magnétique le traversant avec une période  $\phi_0$  [44][55]. Tout comme pour la localisation faible, l'amplitude relative de cet effet est de l'ordre de  $\frac{1}{g}$ , où  $g$  est la conductance adimensionnée. Il s'agit donc d'une toute petite correction par rapport à la valeur classique de Drude  $G_D$ .

Comment expliquer la petitesse des corrections quantiques à la conductivité? L'explication réside dans le fait que le système étudié est connecté à des réservoirs macroscopiques, et par conséquent classiques. Ce point mène à la question suivante: La conductance d'un système mésoscopique dépend-elle de la façon dont on la mesure?

Une première approche pour répondre à cette question consiste à diminuer continuellement le couplage entre le système et les fils de mesure en introduisant entre eux des barrières tunnels. Une autre possibilité est de mesurer la conductance (ou plus généralement la susceptibilité) d'un système *électriquement isolé*. Le principe est d'appliquer sur l'échantillon un champ électrique (ou magnétique) alternatif, en le plongeant dans une capacité ou une inductance. La polarisation qui en résulte est proportionnelle à la susceptibilité de l'échantillon, qu'on mesure à l'aide d'un détecteur. Il s'agit donc d'une mesure *par influence*, réalisée à fréquence finie. Néanmoins, la taille réduite des échantillons mésoscopiques, limitée par la longueur de cohérence de phase, donne lieu à des signaux de très faible amplitude, ce qui rend les mesures difficiles. Ces dernières nécessitent une technique expérimentale spécifique, que nous avons présentée en détail dans le

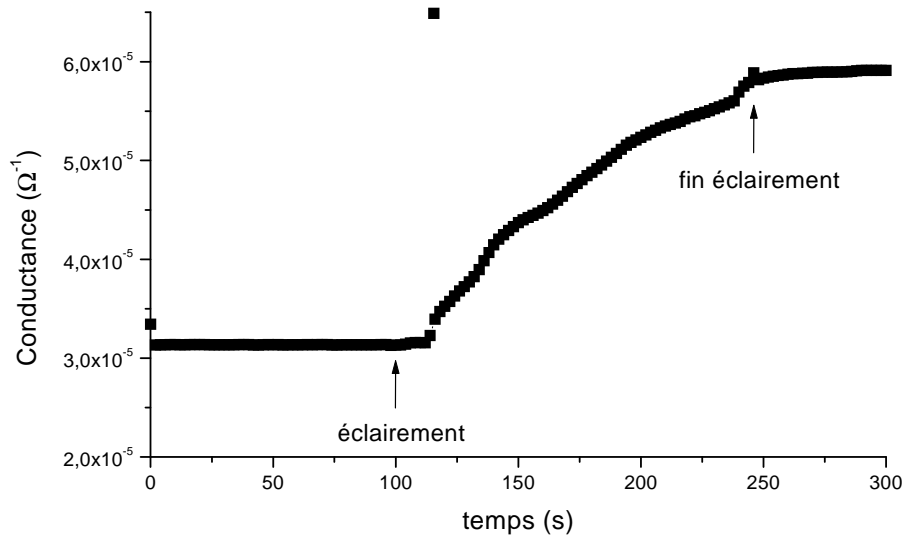


FIG. 6.1 – Conductance d’un fil gravé dans une hétérojonction GaAs/GaAlAs en fonction du temps d’éclairiments.

chapitre précédent.

Plusieurs études théoriques [90] [91] [89] ont montré que, dans cette limite, le caractère discret du spectre d’énergie électronique revêt toute son importance. Le système peut être traité comme une “grosse molécule”, dont la conductance s’interprète en terme de statistique des niveaux. Par ailleurs la susceptibilité est une grandeur complexe, dont la partie réelle correspond à la partie non-dissipative de la réponse, qui s’interprète en terme de polarisabilité ou de courant permanent suivant que le champ excitateur est électrique ou magnétique.

## 6.2 Caractérisation des échantillons

Les échantillons sont caractérisés par des mesures de transport sur des systèmes connectés, fabriqués simultanément avec les réseaux de carrés et d’anneaux isolés. Nous présentons dans le paragraphe suivant des mesures de résistance d’un fil, d’un anneau Aharonov-Bohm et d’une grille, gravés dans une hétérojonction semiconductrice GaAs/GaAlAs.

### 6.2.1 Résistance d’un fil

Nous avons mesuré la résistance d’un fil de longueur  $L = 100\mu m$  et de largeur  $W = 0.5\mu m$  en fonction de l’éclairiment et du champ magnétique. La conductance du fil augmente avec l’éclairiment, prouvant ainsi que la densité électronique dans le fil augmente quand celui-ci est éclairé. Sur la figure 6.1, on remarque qu’en première approximation, la conductance est linéaire avec le temps d’éclairiment. Par ailleurs, on observe à basse densité électronique des anomalies en fonction du champ magnétique, dont l’origine n’est pas encore bien comprise.

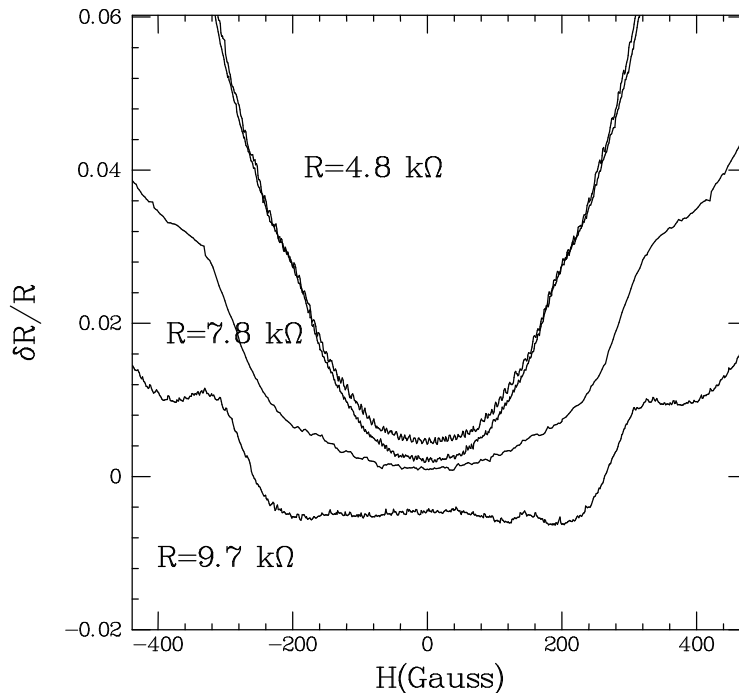


FIG. 6.2 – Conductance d'un fil gravé dans une hétérojonction GaAs/GaAlAs en fonction du champ magnétique pour différents d'éclairement.

Celles-ci disparaissent à fort éclairement. De la résistance résiduelle à champ nul d'un fil de largeur  $W$  et de longueur  $L$ , on déduit le produit  $Wl_e$ , où  $l_e$  est le libre parcours moyen élastique. En effet, la conductance du fil a pour expression:  $G = \frac{e^2}{h} k_F \frac{Wl_e}{L}$ . On connaît par ailleurs la valeur de la densité électronique, qui s'obtient par la mesure de l'effet Hall<sup>1</sup>. A plus basse température, la résistance du fil diminue en fonction du champ magnétique à cause de l'effet de localisation faible. En ajustant la courbe expérimentale avec les prédictions théoriques [109][110], on en déduit la longueur de cohérence de phase  $L_\phi$ , ainsi que la largeur du fil  $W$ . De plus, nous avons de cette façon mis en évidence les effets de déplétion: La largeur réelle du fil est inférieure à la largeur gravée. En revanche, la largeur du fil est quasiment indépendante de l'éclairement.

### 6.2.2 Anneau Aharonov-Bohm

La mesure de la résistance d'un anneau<sup>2</sup> unique est nécessaire afin de vérifier la cohérence quantique de nos échantillons.

La résistance d'un anneau de dimension  $a = 1.5\mu\text{m}$  et  $W = 0.2\mu\text{m}$ , où  $a$  est le côté de l'anneau et  $W$  sa largeur est présentée sur la figure 6.4. A basse température, la résistance

1. La tension de Hall s'écrit  $V_H = R_H IB$ , où  $R_H = \frac{1}{n_e e}$  est la résistance de Hall, qui est inversement proportionnel à la densité électronique

2. Il s'agit en réalité d'un carré évidé, plus facile à réaliser par lithographie électronique qu'un véritable anneau.

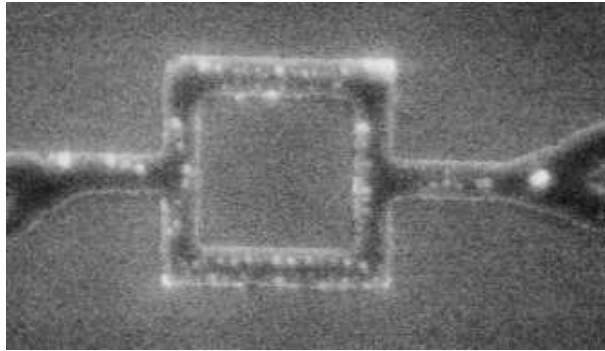


FIG. 6.3 – Image d'un anneau connecté, obtenue par microscopie électronique.

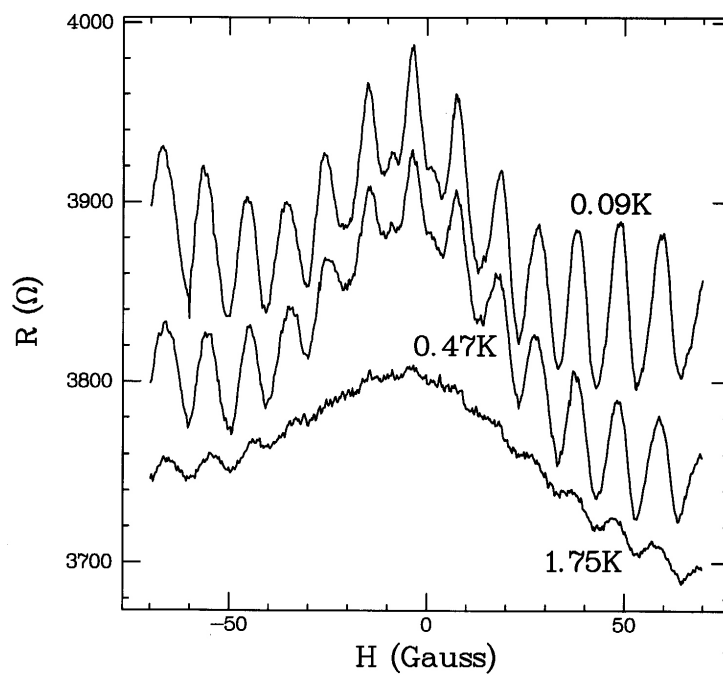


FIG. 6.4 – Résistance d'un anneau Aharonov-Bohm en fonction du champ magnétique, à différentes températures ( $T = 0.09K, 0.47K, 1.75K$ ).



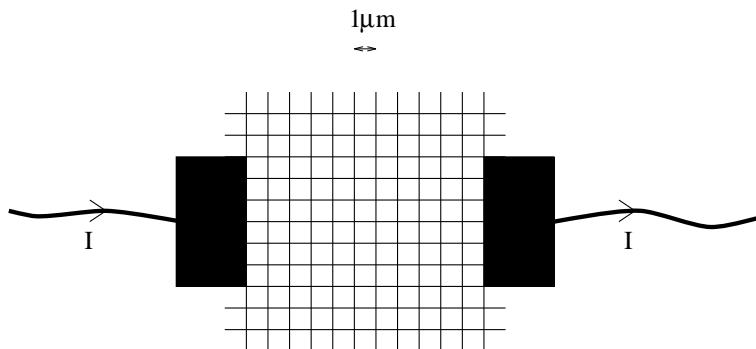


FIG. 6.5 – Schéma d'une grille connecté à des fils de mesure.

oscille en fonction du champ magnétique. La période des oscillations est de l'ordre de 12 Gauss, correspondant à un flux  $\phi_0$  à travers la surface de l'anneau. Soulignons qu'il s'agit d'un petit effet puisque l'amplitude relative des oscillations vaut  $\frac{\delta R}{R} \approx 0.02$ . Les oscillations diminuent quand on augmente la température et disparaissent complètement pour  $T \approx 2K$ .

### 6.2.3 Résistance d'une grille

Nous avons également mesuré la résistance d'une grille gravée dans une hétérojonction semiconductrice GaAs/GaAlAs (fig. 6.5) en fonction du champ magnétique. Les résultats sont reportés sur la figure 6.6 pour différentes températures:  $T = 0.1, 0.257, 0.642K$ . Conformément aux prédictions théoriques, la résistance oscille en fonction du champ magnétique. La période de l'oscillation correspond à un demi quantum de flux à travers une maille de la grille. Leur amplitude diminue en fonction de la température.

## 6.3 Mesures sur des systèmes isolés

### 6.3.1 Echantillons

Nos échantillons sont réalisés par D. Mailly (L2M, Bagneux). Les principes généraux de la fabrication sont exposés dans le chapitre 4. Il s'agit de réseaux de systèmes mésoscopiques isolés, qui sont gravés dans des hétérojonctions semiconductrices GaAs/GaAlAs. Ces dernières sont réalisées par croissance épitaxiale (MBE) par B. Etienne (L2M Bagneux). Nous avons considéré deux géométries différentes: Des anneaux ou des carrés. Des images de ces échantillons obtenues par microscopie électronique sont présentées sur les figures 6.7 et 6.8.

Dans le tableau 6.3.1 sont reportés les valeurs des paramètres caractéristiques de ces échantillons.  $n_e$  est la densité électronique dans l'hétérojonction avant gravure. Les dimensions reportées sont celles de la gravure. En raison de la déplétion, elles sont surestimées par rapport aux dimensions réelles des échantillons. L'écartement moyen entre les niveaux est estimé par la formule  $\Delta = \frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$ , où  $a$  est la largeur du carré ou de l'anneau. Avant éclairage, les carrés sont *complètement déplétés*. Les carrés sont en effet plus profondément gravés que les anneaux,

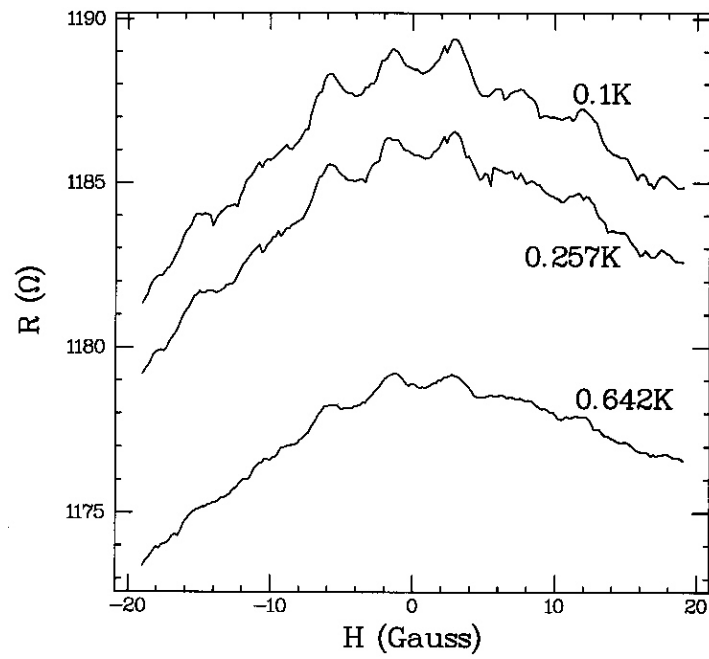


FIG. 6.6 – Résistance d'une grille gravée dans une hétérojonction GaAs/GaAlAs en fonction du champ magnétique.

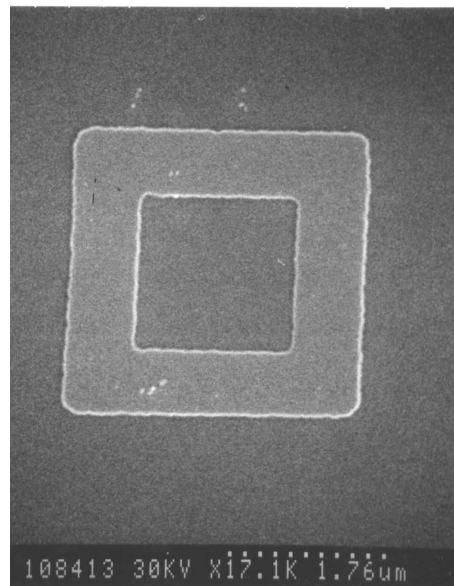


FIG. 6.7 – Image par microscopie électronique d'un anneau semiconducteur gravé dans une hétérojonction GaAs/GaAlAs.

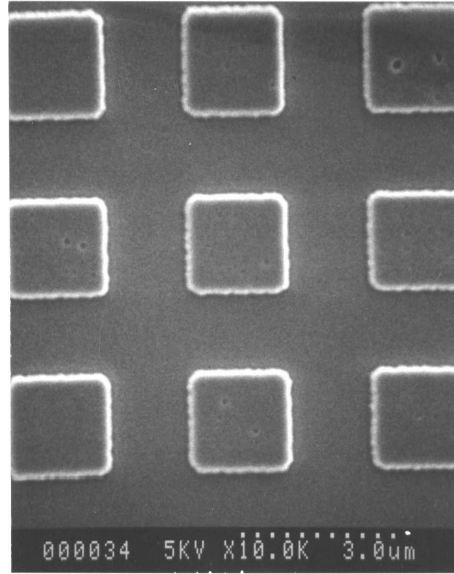


FIG. 6.8 – Image par microscopie électronique d'un réseau de carrés semiconducteurs obtenus après gravure dans une hétérojonction  $GaAs/GaAlAs$ .

ce qui nous a permis de minimiser les pertes radiofréquences du substrat à haute fréquence et de pouvoir ainsi mesurer plusieurs harmoniques, ce qui n'était pas possible pour les anneaux.

	Taille	$ne$	$l_e$	$L_\Phi$	$\Delta$	$E_c$
anneaux	$a = 2\mu m$ $W = 0.2\mu m$	$3 \times 10^{11} cm^{-2}$	$3\mu m$	$7\mu m$	$53mk$ (915MHz) 915MHz	200mK (4.2GHz)
carrés éclairés	$a = 1.5\mu m$	$6 \times 10^{11} cm^{-2}$	$10\mu m$	$> 10\mu m$	$38mk$ (670MHz)	4.5K (95GHz)

Le mouvement des électrons dans les anneaux est diffusif dans la direction longitudinale, tandis qu'il est ballistique dans les carrés. L'écartement moyen entre les niveaux est dans les deux cas supérieur à la température seuil de la dilution, laquelle est de l'ordre de  $18mK$ , ainsi qu'à la fréquence de résonance du mode fondamental ( $f_1 \approx 350MHz$ ).

### 6.3.2 Description des résultats

#### Anneaux

Nous avons mesuré les dépendances de la fréquence de résonance  $f_1 = 310MHz$  et du facteur de qualité  $Q_1 = 1650$  du résonateur en fonction du champ et de la température, dans un intervalle de température compris entre  $10mK$  et  $1K$  pour  $f_1$ , et entre  $40mK$  et  $1K$  pour  $Q_1$ .

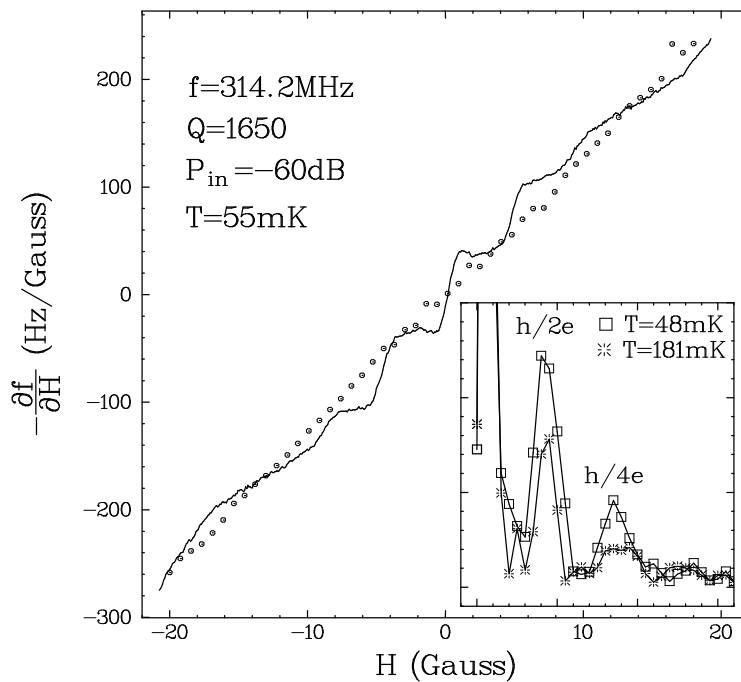


FIG. 6.9 – Dérivée de la fréquence de résonance en fonction du champ magnétique.

**Dépendance en champ magnétique** Afin d'accroître la sensibilité de la mesure, il a été très utile de pouvoir moduler le champ magnétique à basse fréquence (environ  $3Hz$ ). L'amplitude de la modulation a été choisie de l'ordre de  $1Gauss$ , de sorte que les signaux mesurés sont proportionnels à la dérivée de  $f$  et de  $Q$  par rapport au champ magnétique.

Sur la figure 6.9, nous montrons la dépendance en champ de  $-\frac{\partial f}{\partial H}$ , moyenné 40 fois. A bas champ, on observe des oscillations associée à la réponse des anneaux, superposée à la dépendance linéaire du niobium. La périodicité de 5 Gauss correspond à un flux d'amplitude  $\frac{\phi_0}{2}$  dans chaque anneau. Les oscillations disparaissent à plus fort champ en raison du rapport d'aspect relativement faible des anneaux ( $r \approx \frac{a^2}{4aw} = 2.5$ ). Les résultats que nous présentons sont dans la limite où le signal ne dépend pas de la puissance injectée.

Soulignons que l'amplitude des oscillations est très faible, de l'ordre de  $10^{-7}$  par rapport à la fréquence de résonance. Les mesures ont été effectuées avec deux résonateurs différents, prouvant ainsi leur reproductibilité. L'amplitude des signaux mesurés  $\delta f$  et  $\delta Q$  est indépendante de la puissance injectées au dessous de  $1nW$ , mais décroît à plus forte excitation, probablement à cause des effets de chauffage dans l'échantillon. A partir de  $\frac{\partial f}{\partial H}$ , et  $\frac{\partial Q}{\partial H}$ , il est possible de reconstruire, après soustraction d'une droite correspondant à la contribution du Niobium et intégration numérique, la partie réelle et la partie imaginaire de la susceptibilité moyenne des anneaux, lesquelles sont simplement reliées à la conductance:

$$\begin{cases} \Re(G(\omega)) \propto \chi''(\omega) \\ \Im(G(\omega)) \propto \chi'(\omega) \end{cases} \quad (6.1)$$

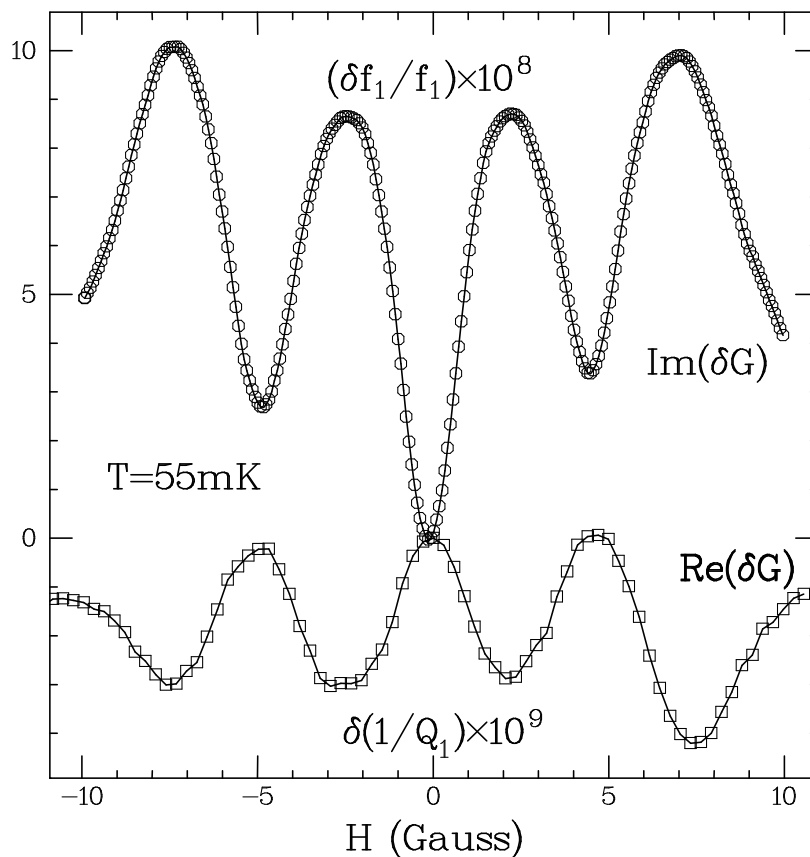


FIG. 6.10 – Dépendance en champ magnétique de la fréquence de résonance et du facteur de qualité.

Par la suite, on utilisera la notation suivante:

$$\begin{aligned}\delta\chi(H) &= \chi(H) - \chi(H=0) \\ \delta f(H) &= f(H) - f(H=0) \\ \frac{\delta Q}{Q^2}(H) &= \frac{Q(H) - Q(H=0)}{Q^2}\end{aligned}$$

**Discussion sur l'amplitude du signal** Il est fondamental de comparer l'ordre de grandeur du signal celle correspondant à la conductance classique. Dans le cas d'un couplage magnétique la variation de facteur de qualité du résonateur peut être reliée, en utilisant la formule 5.20, à la conductance des carrés:

$$\frac{\delta Q}{Q^2} = \frac{\mu_0 a \ln^2\left(\frac{d+a}{d-a}\right) \omega G}{8\pi \ln\left(\frac{d}{r_0}\right)} \quad (6.2)$$

où  $d$  est la distance entre deux fils adjacents de la ligne et  $r_0$  le rayon d'un fil. En cas de couplage électrique, la variation d'impédance du résonateur est reliée aux variations de capacité:

$\delta Z_R = -\frac{\delta C}{C} \frac{1}{jC\omega}$ , où on a supposé que  $\delta C \ll C$ . La partie dissipative de la susceptibilité donne donc lieu à une résistance effective, qui entraîne une diminution du facteur de qualité:

$$\delta \left( \frac{1}{Q} \right) = \frac{\chi''(\omega)}{4\pi a^3} \frac{\ln^2 \left( \frac{d+a}{d-a} \right)}{\ln \left( \frac{d}{r_0} \right)} \quad (6.3)$$

La susceptibilité électrique s'exprime en fonction de la conductance (électrique):

$$\chi_e''(\omega) = \frac{a^2 G_e(\omega)}{\omega \epsilon_0} \quad (6.4)$$

La conductance électrique a été calculée dans le chapitre 3. En utilisant la formule 3.13, on montre que:

$$\chi_e''(\omega) = \frac{\epsilon_0 a^4}{G_D} \quad (6.5)$$

En remplaçant l'expression de  $\chi_e$  dans 6.3, on trouve:

$$\delta \left( \frac{1}{Q} \right) = k \frac{\epsilon_0 \omega a}{4\pi G_D} \frac{\ln^2 \left( \frac{d+a}{d-a} \right)}{\ln \left( \frac{d}{r_0} \right)} \quad (6.6)$$

où  $k$  est un facteur associé à la réduction du signal causée par l'éloignement de l'hétérojonction par rapport à la ligne et ainsi que par l'inhomogénéité probable du couplage entre la ligne et les échantillons. Le premier facteur de réduction est estimé grâce au déplacement en fréquence du résonateur comparée à la valeur théorique<sup>3</sup>. Pour cette raison, on suppose qu'un échantillon sur deux contribue de manière effective au signal. On prend donc  $k = \frac{1}{6}$ . Il faut par ailleurs tenir compte de la réduction d'un facteur  $\frac{1}{\epsilon_{GaAs}}$ , de la susceptibilité électrique, du à l'écrantage de l'hétérojonction. On en déduit les variations de facteur de qualité en fonction de la conductance adimensionnée  $g$  de l'échantillon, pour les couplages magnétiques et électriques:

$$\delta \left( \frac{1}{Q} \right)_m \approx 5 \times 10^{-10} g \quad (6.7)$$

$$\delta \left( \frac{1}{Q} \right)_e \approx \frac{4.4 \times 10^{-7}}{g} \quad (6.8)$$

$$(6.9)$$

Ceci nous permet de dessiner les barres correspondant à  $G_e$  et  $G_m$  sur la figure 6.10.

---

3. La fréquence de résonance dépend de la constante diélectrique du milieu. Quand l'hétérojonction est parfaitement plaquée contre le résonateur, le GaAs remplit un demi-espace. Par conséquent, la constante diélectrique vaut  $\epsilon_{eff} = \frac{\epsilon_{GaAs} + \epsilon_{S_a}}{2} = 11$ . Par ailleurs, la constante diélectrique en l'absence d'échantillon vaut  $\epsilon_{eff} = \frac{\epsilon_{S_a} + 1}{2} = 5.5$ . En présence d'un échantillon parfaitement plaqué contre le résonateur, la fréquence de résonance doit alors être réduite d'un facteur  $\sqrt{\frac{5.5}{11}} \approx 0.7$ .

**Dépendance en température** La dépendance en température de la composante en  $\frac{h}{2e}$  des oscillations, mesurée entre 10 et 400mK, est reportée sur la figure 6.19. Quand la température diminue, le signal augmente continuellement avec une échelle caractéristique de 200mK (i.e.  $E_c$ ), sur un intervalle de température correspondant à  $0.3\Delta$ . Le fait que nous n’observons pas de saturation dans le signal à basse température est une indication encourageante concernant l’absence de chauffage dans notre échantillon. La dépendance en température du facteur de qualité ( $\chi''$ ) est notablement différente de celle de  $\chi'$ . Il est presque indépendant de  $T$ , jusqu’à 200mK, puis décroît fortement à plus haute température. Ce comportement est très analogue à celui observé pour des oscillations Aharonov-Bohm  $\frac{h}{e}$  et  $\frac{h}{2e}$  de la conductance DC d’anneaux similaires.

### Carrés

Nous avons mesuré la dépendance en champ magnétique de la fréquence de résonance, pour plusieurs harmoniques,  $f_1 = 330MHz$ ,  $f_2 = 670MHz$ ,  $f_3 = 1065MHz$ , et pour plusieurs éclaircissements successifs. La valeur en mK des différentes harmoniques du résonateur est reportée dans le tableau 6.3.2.

$\omega_1$	16mK
$\omega_2$	32mK
$\omega_3$	52mK

Grâce à une petite bobine placée à proximité de l’échantillon, le champ a pu être modulé jusqu’à 30Hz environ, avec une amplitude de l’ordre de 1 Gauss. Par ailleurs, une diode électroluminescente placée à l’intérieur du porte échantillon (celui-ci est décrit dans le chapitre 5) a permis de modifier la densité électronique dans les carrés. La procédure consiste à faire circuler dans la diode un courant DC de l’ordre de  $1\mu A$  pendant une trentaine de secondes, puis à attendre environ une heure que le système se stabilise. Chaque éclaircissement a pour effet une diminution du facteur de qualité, relié à l’augmentation des pertes dans l’hétérojonction. Nous n’observons aucun signal avant éclaircissement, ce qui nous indique que la densité électronique dans les carrés est alors pratiquement nulle.

### Dépendance en champ magnétique après éclaircissement

**Premier éclaircissement** Sur la figure 6.12 est reportée la fréquence de résonance en fonction du champ magnétique après éclaircissement<sup>4</sup> de l’échantillon, obtenue en soustrayant une ligne de base à la courbe 6.11, puis en l’intégrant numériquement.

La fréquence de résonance présente un pic à flux nul dont la largeur à mi-hauteur est de l’ordre de 20 Gauss, ainsi qu’un pic pour un champ  $H \approx 23$  Gauss, qui correspond approximativement à un quantum de flux dans les carrés. Tout comme les anomalies observées lors des mesures de transport sur des fils connectés (voir section 6.2.1), ces pics disparaissent à plus fort éclaircissement, suggérant une même origine physique.

---

4. Ce premier éclaircissement sera appelé “éclaircissement 0”.

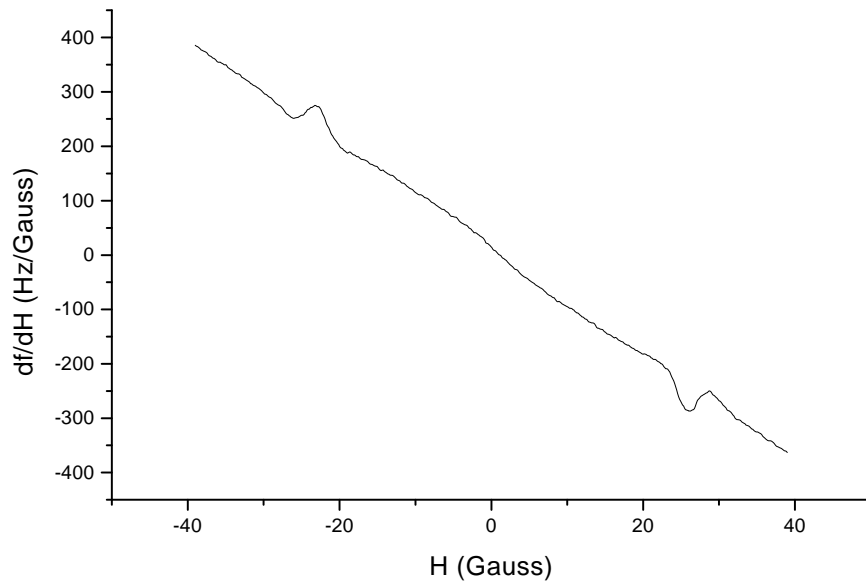


FIG. 6.11 – Dépendance en champ magnétique de la dérivée de la fréquence de résonance après éclairage de l'échantillon.

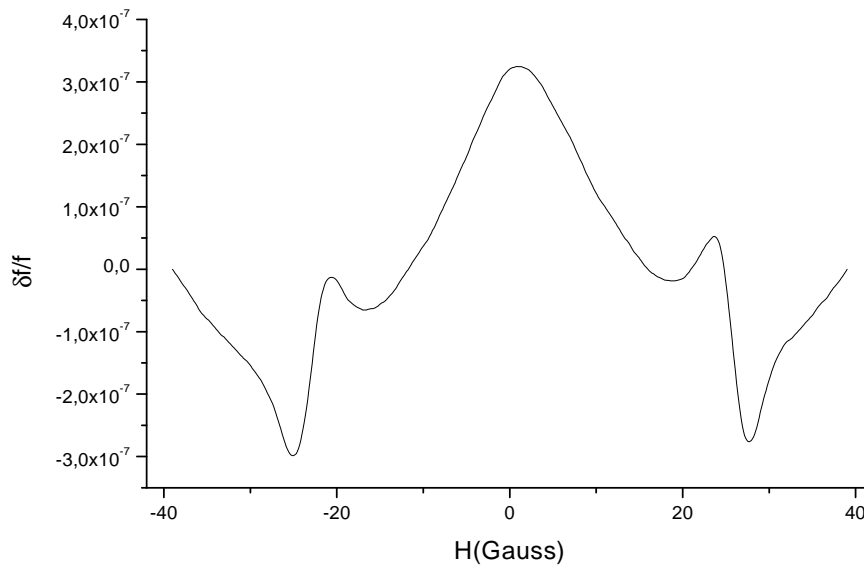


FIG. 6.12 – Dépendance en champ magnétique de la fréquence de de résonance pour l'éclairage 0, après soustraction de la ligne de base et intégration numérique.



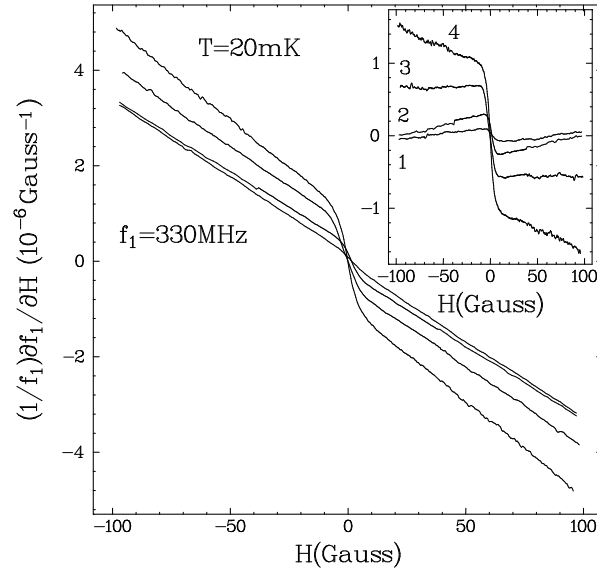


FIG. 6.13 – *Dépendance en champ magnétique des fréquences de résonance, pour différents éclaircissements. En inset est représenté le signal après soustraction de la ligne de base.*

**Eclaircissements 1 à 4** Les signaux dus aux carrés sur  $\frac{\partial f}{\partial H}$  et  $\frac{\partial Q^{-1}}{\partial H}$  ont une forme de marche, dont la largeur, de l'ordre de 10 gauss, correspond approximativement à un quantum de flux dans un carré (fig. 6.13). La forme en champ est indépendante de l'éclaircissement ainsi que de la fréquence. Il semble donc que l'éclaircissement n'altère pas la forme des échantillons.

Après soustraction de la ligne de base et intégration numérique (fig 6.16), nous observons que la partie réelle et imaginaire de la susceptibilité présentent une forme fortement triangulaire, qui ressemble à celle observée dans des expériences sur des points quantiques ballistiques connectés de géométrie similaire [111]. Cette forme est interprétée en terme de trajectoires électroniques régulières dans ces systèmes. L'amplitude des signaux observés,  $\frac{\delta f}{f} \sim 10^{-5}$ , est beaucoup plus grande que celle observée pour les anneaux ( $\frac{\delta f}{f} \sim 10^{-7}$ ). L'amplitude du signal peut être comparée à celle correspondant à la conductance classique. En utilisant la formule 5.20, la variation de facteur de qualité du résonateur peut être reliée à la conductance des carrés:

$$\frac{\delta Q}{Q^2} = \frac{\mu_0 a \ln^2 \left( \frac{d+a}{d-a} \right)}{8\pi \ln \left( \frac{d}{r_0} \right)} \omega G \quad (6.10)$$

où  $d$  est la distance entre deux fils adjacents de la ligne et  $r_0$  le rayon d'un fil. En utilisant les valeurs numériques données dans le chapitre 5, la variation de facteur de qualité en fonction de la conductance adimensionnée des carrés a pour valeur:

$$\frac{\delta Q}{Q^2} \approx 5 \times 10^{-10} g \quad (6.11)$$

La conductance d'un carré ballistique est donnée par  $G = \frac{e^2}{h} M$ , où  $M = \frac{\lambda_F}{a}$  est le nombre de canaux. Par ailleurs la longueur d'onde de Fermi dans un système bidimensionnel a pour

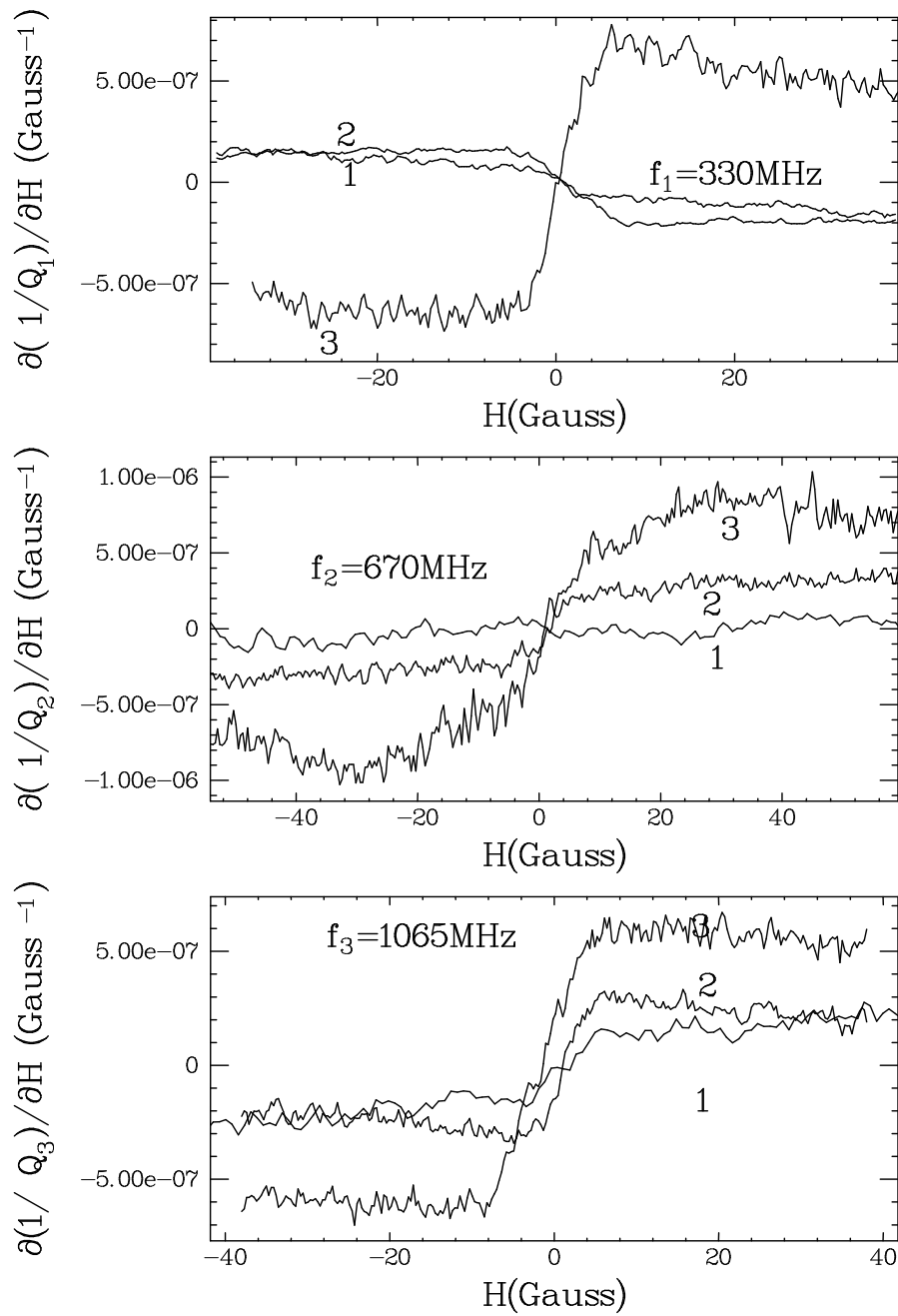


FIG. 6.14 – Dépendance en champ magnétique de la dérivée du facteur de qualité pour différents éclairagements et pour les fréquences  $f_1$ ,  $f_2$ , et  $f_3$ .

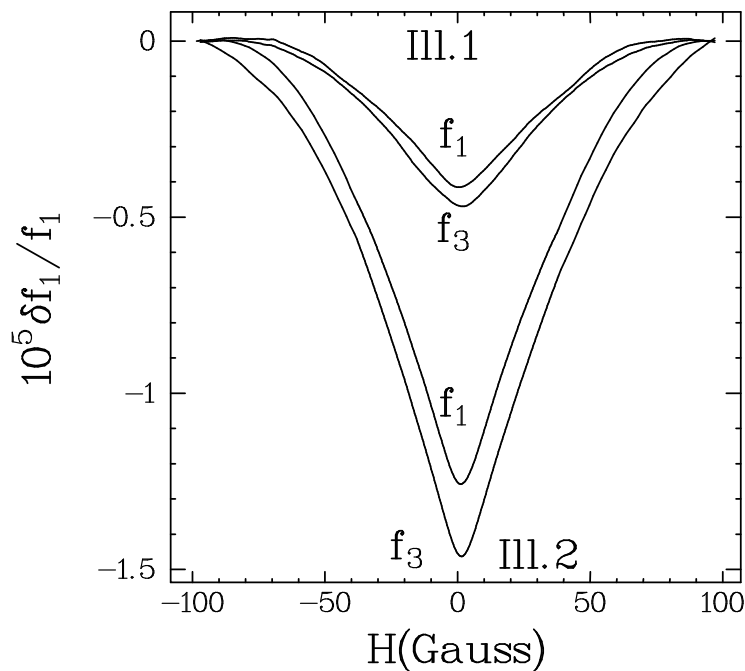


FIG. 6.15 – Dépendance en champ magnétique de la fréquence de résonance, pour les éclaircissements 2 et 3 et pour les fréquences  $f_1$  et  $f_3$ .

expression  $\lambda_F = \sqrt{\frac{2\pi}{n_e}}$ . Afin de calculer la conductance, il nous faut donc estimer la densité électronique en fonction de l'éclairement. La susceptibilité orbitale moyenne d'un carré ballistique est proportionnel à la conductance [77, 78]. On fait donc l'hypothèse que l'amplitude du signal observé sur la fréquence de résonance est proportionnel à  $g$  et que les carrés restent ballistiques quelque soit l'éclairement:

$$\frac{\delta f}{f} \sim g \propto \sqrt{n_e} \quad (6.12)$$

En supposant que pour l'éclairement 4 la densité électronique est égale à la densité nominale  $n_e = 3 \times 10^{11} \text{cm}^{-2}$  de l'hétérojonction, on en déduit  $n_e$  et  $g$  pour chaque éclaircissement. Les valeurs ainsi calculées sont reportées sur la figure 6.17. Pour l'harmonique  $f_1$ , la densité ainsi estimée augmente quadratiquement en fonction de l'éclairement. La valeur calculée à l'aide des harmoniques  $f_2$  et  $f_3$  est proche de celle calculée avec la première harmonique pour les éclaircissements 3 et 4. Un écart significatif apparaît à plus bas éclaircissement. Ceci nous permet d'estimer la magnétoconductance en unité de  $G_D$  (fig. 6.16). On remarque alors que l'amplitude de la magnétoconductance est toujours de l'ordre de  $G_D$ .

**Effet de la fréquence et de la densité électronique**  $\delta\chi'(H)$  et  $\delta\chi''(H)$  ont un comportement très différent en fonction de la fréquence.  $\delta\chi'(H)$  est toujours positif, et son amplitude augmente fortement après éclaircissement de l'échantillon, c'est à dire quand on augmente le nombre d'électrons dans les carrés, puis sature. Pour un nombre d'électrons fixé, il est presque

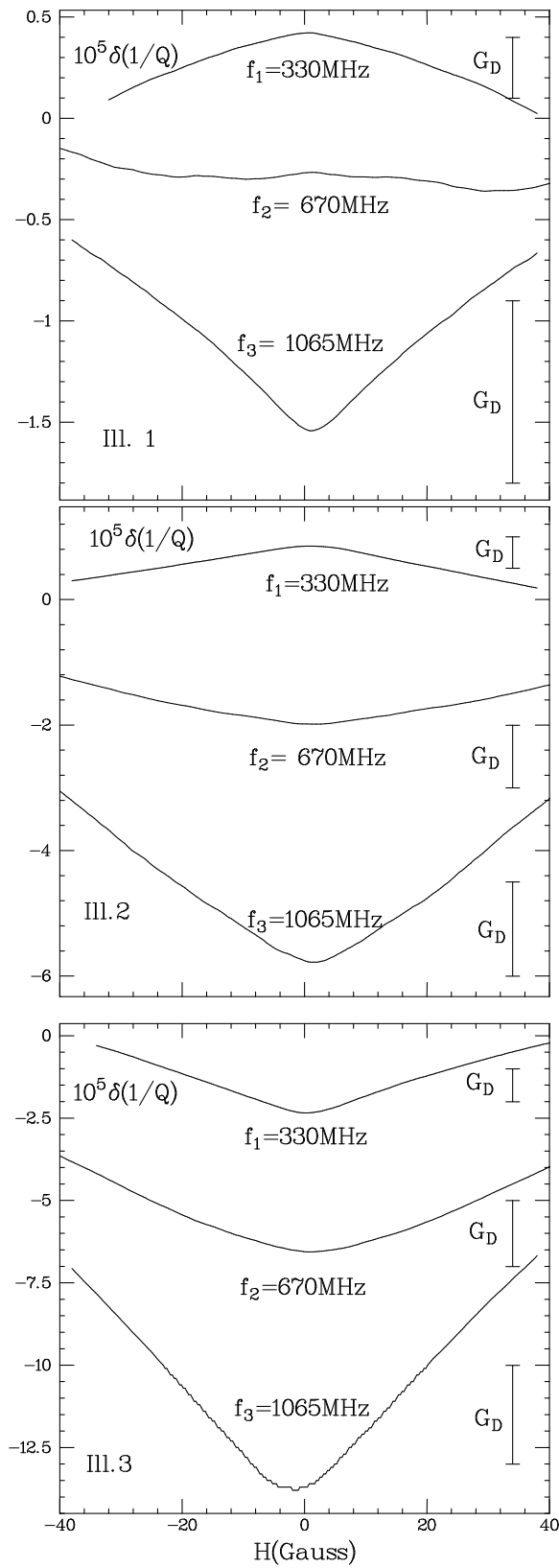


FIG. 6.16 – Dépendance en champ magnétique du facteur de qualité, pour les trois premiers éclaircissements et pour les fréquences  $f_1$ ,  $f_2$ , et  $f_3$ .

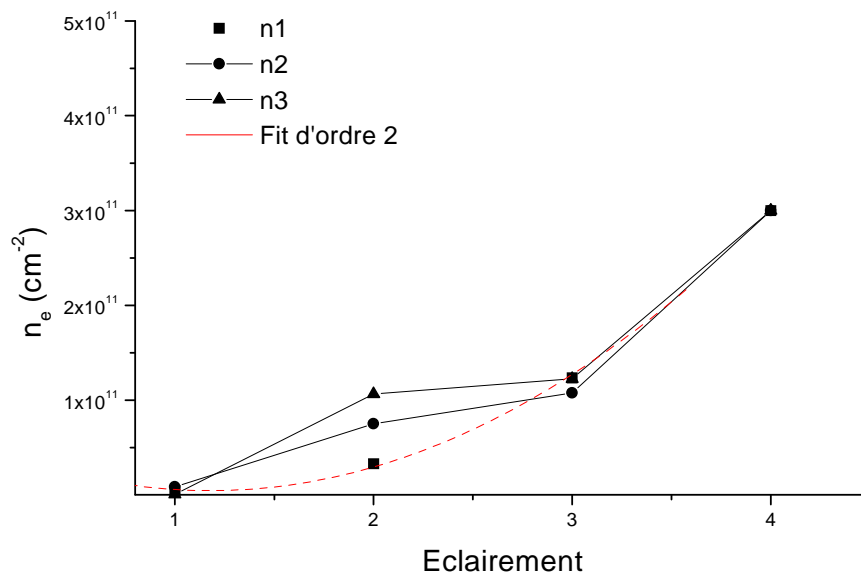


FIG. 6.17 – Estimation de la densité électronique en fonction de l'éclairement et pour les différentes harmoniques ( $f_1$ ,  $f_2$ , et  $f_3$ ), obtenue en supposant que  $\frac{\delta f}{f} \propto \sqrt{n_e}$ .

indépendant de la fréquence (fig 6.18).

Le signe de  $\delta\chi''(H)$  change à la fois en fonction de la fréquence et du nombre d'électrons dans les carrés. Pour un petit nombre d'électrons,  $\delta\chi''(H)$  est négatif pour les deux premières harmoniques et positif pour la dernière. Quand on augmente la densité,  $\delta\chi''(H)$  devient positif à la fréquence  $f_2$ . Enfin, quand on atteint la saturation,  $\delta\chi''(H)$  est positif pour les trois harmoniques. L'amplitude augmente continuellement avec l'éclairement jusqu'à atteindre une valeur limite, correspondant à une saturation de la densité électronique dans les carrés.

**Dépendance en température** La dépendance en température de  $\delta\chi'$  et  $\delta\chi''$  a aussi été mesurée. Au dessus de  $100mK$ ,  $\delta\chi'$  décroît suivant une loi de puissance, approximativement décrite par  $\frac{1}{T^2}$ . Cette décroissance devient plus lente quand on augmente le nombre d'électrons dans les carrés. A faible éclairement, correspondant à une magnétoconductance négative,  $\delta\chi''$  est presque indépendant de la température jusqu'à  $300mK$  (fig 6.19), puis décroît et disparaît à plus haute température. Ces différences entre  $\delta\chi'(T)$  et  $\delta\chi''(T)$  disparaissent à plus haute densité et pour les fréquences pour lesquelles  $\delta\chi''(H)$  est positif (fig. 6.20).

### Remarques

L'amplitude du signal pour les anneaux est largement dominée par la partie non dissipative de la conductance, qui est 30 fois plus grande que la partie dissipative, pour une fréquence de l'ordre de  $0.3\Delta$ . En ce qui concerne les carrés, l'amplitude de la partie imaginaire de la conductance est toujours du même ordre de grandeur que la partie réelle. La première fréquence correspond à  $0.5\Delta$ , puisque l'écart moyen entre les niveaux des carrés est plus petit que celui des anneaux. Ces

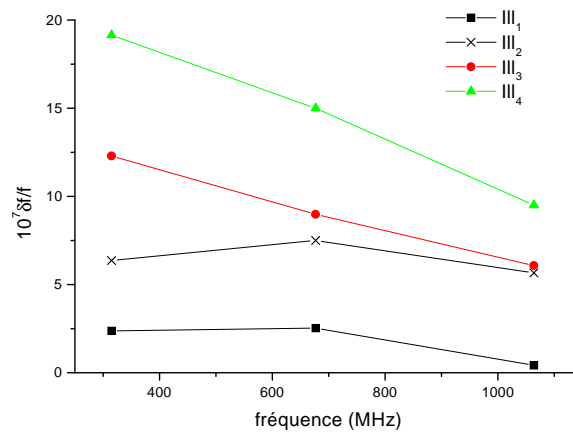


FIG. 6.18 – Dépendance en fréquence de la dérivée de la fréquence de résonance pour les éclairissements 1,2 , 3 et 4.

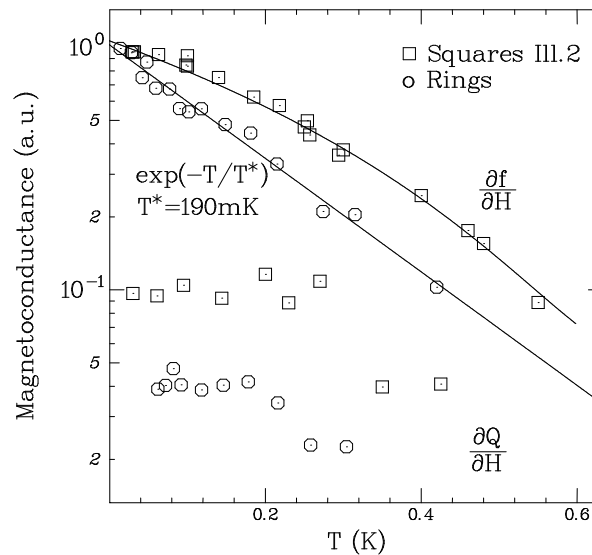


FIG. 6.19 – Dépendance en température de  $\chi'$  et  $\chi''$  pour les anneaux et pour les carrés à faible éclairissement et pour la première harmonique.

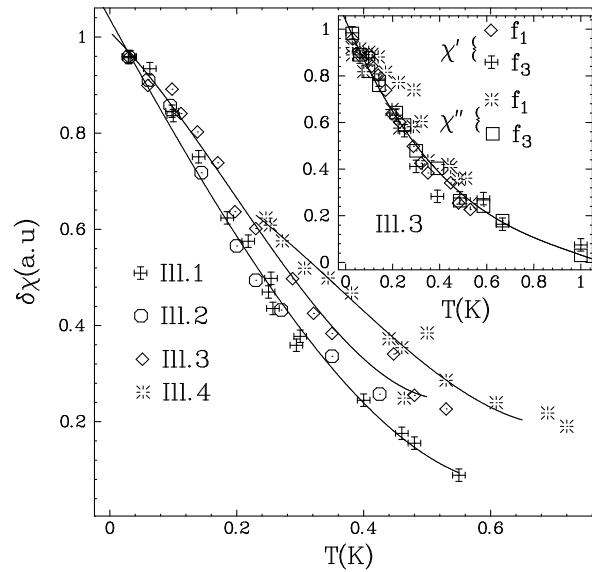


FIG. 6.20 – *Dépendance en température de  $\delta\chi'$  pour la première harmonique et différents nombre d'électrons dans les carrés correspondant à des éclaircissements successifs (les lignes continues sont de simples guides). En inset: Dépendance en température de  $\delta\chi'$  et  $\delta\chi''$  pour la première et la troisième harmonique, après le troisième éclaircissement.*

résultats sont à comparer à ceux obtenus par Pieper et Price [103] [104] sur des échantillons connectés. Ces auteurs ont mesuré l'impédance complexe d'un anneau d'argent et d'un fil, directement connecté à une ligne de transmission. Il ont trouvé que la partie imaginaire de la conductance de l'anneau devient de l'ordre de grandeur de la partie réelle pour des fréquences de l'ordre de l'énergie de Thouless, mais n'existe pas à plus basse fréquence. De plus, ils n'observent pas de changement qualitatif dans la partie réelle de la magnétoconductance du fil, son signe correspondant toujours à la localisation faible.

### 6.3.3 Comparaison avec les prédictions théoriques

Comme nous l'avons souligné, notre expérience mesure à la fois la réponse électrique et magnétique d'un réseau de systèmes isolés. Nous allons maintenant essayer d'interpréter ces résultats en terme de ces deux différents mécanismes.

Le rapport de la susceptibilité magnétique et électrique a pour expression (voir chapitre 3):

$$r = \frac{\delta\chi'_m(\omega)}{\delta\chi'_e(\omega)} \approx \frac{\delta\chi''_m(\omega)}{\delta\chi''_e(\omega)} \approx (Z_v G_D)^2 = \alpha^2 g^2 \quad (6.13)$$

Par ailleurs, il faut tenir compte du diélectrique entourant l'échantillon, qui réduit le champ électrique d'un facteur  $\frac{1}{\epsilon_{GaAs}}$ , avec  $\epsilon_{GaAs} \approx 12.85$ . Dans notre cas,  $r$  est de l'ordre de 1 pour les anneaux et varie entre 8 et 400 pour les carrés. Nous concluons donc que la contribution dominante à  $\chi$  est magnétique pour les carrés. Pour les anneaux, il est difficile de trancher en l'absence d'expériences supplémentaires.

La partie réelle de la susceptibilité est reliée à la dérivée des courants permanents par rapport au flux et plus généralement à la susceptibilité orbitale de l'échantillon [66, 97, 90, 113]. La modulation  $AC$ , du champ magnétique sur les échantillons induit un moment magnétique orbital à la même fréquence. A basse fréquence, telle que  $\omega < \gamma$ ,  $\chi'_m$  est proportionnel à la dérivée du moment magnétique de l'échantillon en fonction du champ magnétique. En effet, pour  $\delta H \ll H$ , on a :

$$M(H + \delta H \cos(\omega t)) \approx M(H) + \delta H \frac{\partial M}{\partial H} \cos(\omega t)$$

En identifiant avec la relation  $M(\omega) = \chi(\omega)H(\omega)$ , on trouve la relation qui lie la partie imaginaire (non-dissipative) de la susceptibilité au courant permanent, ou plus généralement à l'aimantation.

$$\chi'(\omega) = \frac{\partial M}{\partial H} \quad (6.14)$$

Notons que cette contribution adiabatique domine la réponse à basse fréquence uniquement, pour  $\omega \ll \gamma$ . A plus haute fréquence, d'autres mécanismes rentrent en compte, donnant lieu à des contributions supplémentaires [97] [90]. Le courant permanent dans des anneaux [112] ainsi que la susceptibilité orbitale de carrés ballistiques ont été calculés par de nombreux auteurs [105]. Dans tous les cas, il est prédit une susceptibilité paramagnétique. Ce résultat, dérivé en l'absence d'interactions, reste en principe vrai en présence d'interactions répulsives [106]. Ce signe paramagnétique a été observé pour la première fois par Lévy et al. sur l'aimantation de carrés GaAs/GaAlAs [114]. Nos résultats indiquent au contraire un signe diamagnétique à la fois pour les carrés et pour les anneaux [115]. Notons cependant que l'amplitude de  $\delta\chi'(H)$  correspond à une susceptibilité orbitale moyenne de l'ordre de la prédiction théorique: pour les anneaux un courant permanent de  $\frac{2E_c}{\phi_0} = 1.4nA$  (la valeur mesurée correspond à  $1.5nA$ ), et pour les carrés, une susceptibilité orbitale [77, 78, 79] égale à  $\frac{ga^2\mu_0e^2}{m^*}$ . La limite  $\omega > \gamma$  a également été étudiée pour des électrons sans interactions. Dans cette limite, le terme de relaxation de Debye devient imaginaire et donne lieu à une contribution à  $\chi'$ , proportionnelle au carré du courant permanent d'un seul niveau. Cependant, ce mécanisme augmente la dépendance en flux d'un facteur 2, mais ne change pas son signe. Dans le cas d'un couplage électrique dominant, le signal peut être interprété en terme de magnétopolarisabilité moyenne des échantillons. Cette quantité a été récemment calculée pour des anneaux [107] [108] [82]. Son signe correspond à une polarisabilité qui augmente avec le champ (voir chapitre 2), et pourrait expliquer nos résultats sur  $\delta\chi'$ . L'ordre de grandeur est

$$\frac{\delta\chi_e}{\chi_e} \approx \frac{0.5}{Mg} \quad (6.15)$$

où  $M$  est le nombre de canaux.  $M \sim \frac{W}{\lambda_F}$  pour des anneaux et  $M \sim \frac{a}{\lambda_F}$  pour des points quantiques. La variation relative de fréquence attendue correspond à  $5 \cdot 10^{-7}$  pour les anneaux et  $2 \cdot 10^{-10}$  pour les carrés, à comparer aux valeurs expérimentales  $10^{-7}$  et  $10^{-5}$ . Il est ainsi possible que la magnétopolarisabilité constitue la contribution dominante à  $\chi'$  pour les anneaux, mais cela est exclu pour les carrés. Notons aussi que l'augmentation du signal avec le nombre



d'électrons pour les carrés est contradiction avec l'équation 6.15. En conclusion, nos mesures concernant  $\delta\chi'(H)$  sur les carrés ne sont pas bien comprises. Notons cependant le même signe diamagnétique a été trouvé par Webb dans des mesures récentes sur un réseau d'anneaux en or.

Nous considérons maintenant la partie dissipative de la réponse. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3, il est possible d'exprimer la susceptibilité  $\delta\chi'' = \chi''(GUE) - \chi''(GOE)$ <sup>5</sup> en fonction de la probabilité  $R(s)$  de trouver deux niveaux séparés par un intervalle d'énergie  $s$ , et du paramètre  $\gamma$ , décrivant le couplage avec le réservoir thermodynamique, supposé petits par rapport à l'écartement moyen entre les niveaux  $\Delta$ .

$$\delta\chi'' = \chi''_{cl} \int \gamma \frac{(R_{GUE}(s) - R_{GOE}(s))}{(\hbar\omega - s)^2 + \gamma^2} ds + \eta_{m,e} \chi''_{cl} \frac{\gamma\Delta}{\omega^2 + \gamma^2} \quad (6.16)$$

où  $\eta_m = 1$  et  $\eta_e = -0.5$  correspondent au couplage magnétique et électrique respectivement. Le premier terme dans l'expression 6.16  $\delta\chi''_{off}$  décrit les transitions entre niveaux induites par le champ alternatif. Le second terme dans 6.16 décrit des processus de relaxation intra-niveaux de type Debye qui contribuent seulement pour  $T \neq 0$ . La contribution dominante pour  $\gamma \ll \omega$  est

$$\delta\chi_{off}(H) \sim \chi''_{cl} (R_{GUE}(\omega) - R_{GOE}(\omega)) \quad (6.17)$$

La distribution d'espacement des niveaux  $R(s)$  obéit aux règles universelles de la théorie des matrices aléatoires. Celles-ci dépendent de la symétrie du hamiltonien. Pour  $\omega < \Delta$ , la probabilité de trouver deux niveaux séparés de  $\hbar\omega$  est plus petite en présence de champ. Par conséquent,  $\delta\chi_{off}$  est négative. Puis, elle change de signe pour une fréquence de l'ordre de  $\Delta$ , comme on l'observe sur la figure 3.9.

Nous pensons que le changement de signe observé pour les carrés lors des deux premiers éclaircissements correspond à cette situation. Le changement de signe disparaît quand  $\gamma$  augmente et devient tel que le terme de relaxation devient supérieur (en valeur absolue) au terme d'absorption. La magnétoconductance est alors toujours négative pour un couplage électrique et toujours positive pour un couplage magnétique, tout comme pour la localisation faible observée sur des systèmes connectés. Nous suggérons que les éclaircissements 3 et 4 correspondent à cette situation.

Corrélativement, une augmentation de  $\gamma$  avec l'éclaircissement est nécessaire afin d'expliquer nos résultats. Les interactions électron-électron dans le point quantique ne permettent pas d'expliquer cette augmentation, puisque la longueur de cohérence de phase augmente avec la densité électronique. En effet, dans un point quantique ballistique, le temps de cohérence de phase est donné par [116]:

$$\frac{1}{\tau_\phi(T)} \sim \frac{T^2}{E_F} \frac{q_{T,F}}{k_F} \quad (6.18)$$

où  $k_F$  est le vecteur d'onde de Fermi,  $q_{TF} = \frac{1}{\pi a_0}$  est le vecteur d'onde de Thomas-Fermi,  $a_0 = \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}$  le rayon de Bohr. Sachant que pour un échantillon 2d, on a  $k_F \sim n^{\frac{1}{2}}$ . On en déduit que  $\frac{1}{\tau_\phi} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ .

---

5. L'ensemble GUE correspond à un champ tel que la symétrie par renversement du temps est brisé. L'ensemble GOE correspond à un champ nul.

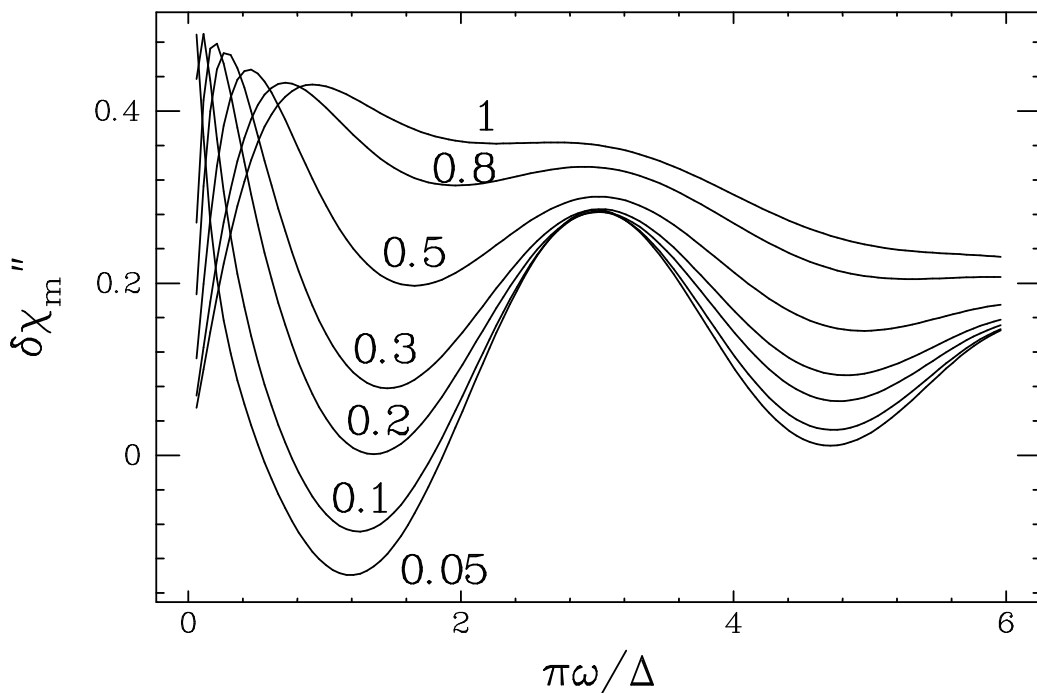


FIG. 6.21 – Calcul numérique de la partie imaginaire de la susceptibilité magnétique  $\delta\chi_m''$ , en fonction de  $\gamma$  et  $\omega$ .

Nous pensons que l'augmentation de  $\gamma$  dans notre cas est plutôt lié à l'augmentation des pertes dans le substrat de GaAs. De fait, nous observons une diminution substantielle du facteur de qualité après chaque éclaircissement. Le bruit électromagnétique relié à ces pertes contribue à l'élargissement des niveaux, dont une estimation à l'aide de la règle d'or de Fermi donne:

$$\gamma_{n,p} \approx \frac{e^2}{ga} \frac{\epsilon''_{GaAs}}{\epsilon'_{GaAs}} \coth\left(\frac{\epsilon_n - \epsilon_p}{k_B T}\right) \quad (6.19)$$

Cette formule donne des valeurs raisonnables si on suppose que les variations de  $\epsilon''(GaAs)$  sont directement reliées à celles du facteur de qualité après chaque éclaircissement. Remarquons cependant que l'accord avec l'expérience est seulement qualitatif. La valeur expérimentale de la conductance des anneaux est 4 fois plus petite que la valeur prédite en supposant un couplage électrique. En revanche, elle est dix fois plus grande pour les carrés en supposant un couplage magnétique. Une explication possible réside dans le fait que les carrés sont ballistiques. Il ne s'agit donc pas véritablement d'une transition orthogonal-unitaire, comme nous le supposons. La théorie prévoit également, pour l'ensemble canonique, des changements de signe de la magnétoconductance avec la température pour  $T < \Delta$ . Un tel effet n'a pas été observé, peut-être à cause de l'absence de points expérimentaux dans le regime où  $T \ll \Delta$ .

# Chapitre 7

## Mesure de la magnétopolarisabilité à haute fréquence

### 7.1 Motivation

La polarisabilité d'un conducteur "classique", dont la taille est très grande devant la longueur de cohérence de phase électronique, est essentiellement déterminée par sa géométrie<sup>1</sup>. Pour un conducteur tridimensionnel par exemple, elle est de l'ordre de son volume (voir chapitre 2). Nous avons montré dans le chapitre 2 que dans un système quantiquement cohérent, les interférences quantiques peuvent donner lieu à une correction quantique  $\delta\alpha$  à la valeur classique [107] [108] [82]:

$$\alpha = \alpha_{cl} + \delta\alpha \quad (7.1)$$

En raison de l'invariance du champ électrique par rapport au renversement du temps,  $\delta\alpha_Q$  est nul dans l'ensemble canonique pour un système diffusif. En revanche, dans l'ensemble grand canonique, pour une fréquence du champ électrique supérieure à l'élargissement des niveaux  $\gamma$ , la polarisabilité d'un système mésoscopique comporte une correction quantique<sup>2</sup>, dont l'amplitude relative, pour un anneau de largeur  $W$  et de conductance adimensionnée  $g$  a pour expression  $\frac{\delta\alpha}{\alpha} \sim \frac{\lambda_{TF}}{W} \frac{1}{g}$ , où  $\lambda_{TF}$  est la longueur d'onde de Thomas-Fermi. Ces prédictions théoriques ont motivé une étude expérimentale de la polarisabilité.

### 7.2 Principe de la mesure

Un conducteur placé entre les plaques d'une capacité plane, polarisée par une tension  $V$  (fig. 7.1), acquiert un moment dipolaire  $\mathbf{P} = \epsilon_0 \alpha \mathbf{E}$ , qui a pour effet de modifier le champ électrique à l'intérieur de la capacité. Il s'en suit une variation de capacité, reliée à la polarisabilité du conducteur:

---

1. Aux corrections de Thomas-Fermi près.

2. On entend par "correction quantique", la partie dépendante du flux de la polarisabilité. Il peut également exister une correction quantique à champ nul.

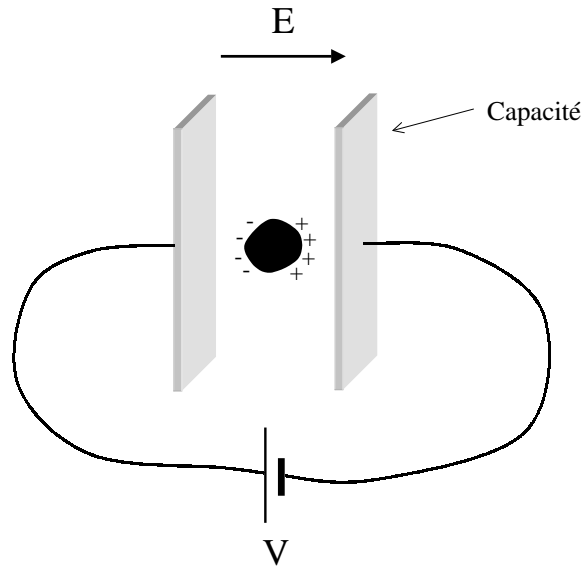


FIG. 7.1 – Conducteur placé entre les plaques d’une capacité, polarisée avec une tension  $V$ .

$$\frac{\delta C}{C} \approx \frac{\alpha}{\epsilon_0 V_{eff}} \quad (7.2)$$

où  $V_{eff}$  est le volume effectif<sup>3</sup> de la capacité. Celui-ci est calculé dans le chapitre 5 pour le cas particulier d’un échantillon placé entre les fils d’une ligne bifilaire. La polarisabilité du système est donc directement reliée aux variations de capacité à laquelle il est couplé.

La sensibilité de la mesure est augmentée en utilisant une technique résonante: la capacité fait partie intégrante d’un résonateur  $R, L, C$ , dont la fréquence de résonance est modifiée par la présence de l’échantillon:

$$\frac{\delta f}{f} = -\frac{1}{2} \frac{\delta C}{C} \quad (7.3)$$

La technique expérimentale présentée dans le chapitre 5 fait appel à une ligne bifilaire, qui présente le désavantage de mélanger les parties électriques et magnétiques. Pour cette raison, nous avons conçu et mis au point un nouveau type de microrésonateur. Celui-ci est schématisé sur la figure 7.2. Tout comme la ligne bifilaire présentée dans le chapitre 5, le matériau constituant le résonateur est le Niobium, et le substrat est en saphir. Il est fabriqué par la technique exposée dans l’appendice E. Il comporte une partie capacitive en forme de peigne et une partie inductive bien séparée en forme de méandre. Les effets magnétiques et électriques sont de cette façon découplés. L’échantillon est soit collé sur la partie capacitive, soit sur la partie inductive, suivant la nature de la réponse que l’on souhaite mesurer. Il s’agit d’un résonateur monomode, contrairement à celui présenté dans le chapitre 5. On détecte l’amplitude réfléchie par le résonateur, en modulant la fréquence du générateur de manière à asservir celui-ci sur la fréquence

3. Le volume effectif représente un coefficient de couplage entre la capacité et l’échantillon.

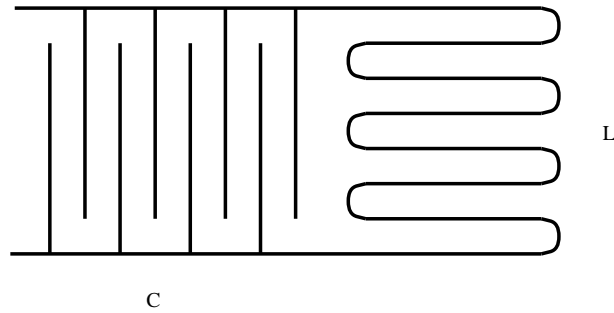


FIG. 7.2 –  $S_c$ ,  
partie inducti

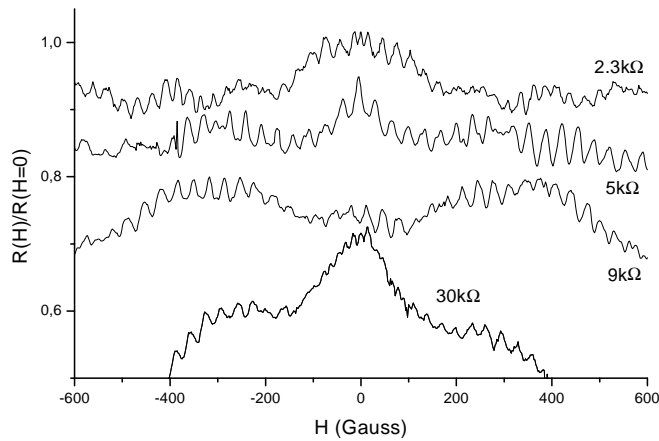


FIG. 7.3 – Résistance d'un anneau connecté en fonction du champ magnétique pour plusieurs éclairagements.

de résonance. Celle-ci est mesurée en fonction du champ magnétique à très basse température. Les anneaux étudiés sont différents de ceux du chapitre 6. Ils ont été obtenus par une gravure profonde de l'hétérojonction, et sont après refroidissement complètement déplétés. Leur densité électronique peut être modifiée grâce à une diode électroluminescente placée à l'intérieur du porte échantillon. La technique de mesure est exposée en détails dans le chapitre 5.

### 7.3 Effet de l'éclairément sur la résistance d'un anneau connecté

La résistance d'un anneau connecté a été étudié en fonction de l'éclairément. Avant éclairément, la résistance du fil est infinie. La résistance du fil devient finie quand on éclaire l'échantillon jusqu'à la valeur  $2k\Omega$ . Des oscillations Aharonov-Bohm en fonction du champ magnétique

apparaissent pour  $R \approx 30k\Omega$ , qui correspond approximativement au quantum de résistance  $\frac{h}{e^2}$ . Ces oscillations sont modifiées par l'éclairement. Leur amplitude relative est maximum pour  $R(H = 0) = 9k\Omega^4$ , et sont de l'ordre de  $\frac{\delta R}{R} \sim 10^{-2}$ , ce qui correspond à  $0.3\frac{e^2}{h}$ .

## 7.4 Description des mesures

L'échantillon est fabriqué par D Mailly (L2M bagneux). Il s'agit d'un réseau d'anneaux gravés dans une hétérojonction semiconductrice GaAs/GaAlAs. Les paramètres caractéristiques sont reportés dans le tableau 7.4.

Taille	$ne$	$l_e$	$L_\Phi$	$\Delta$	$E_c$
$a = 1.5\mu m$	$3 \times 10^{11} cm^{-2}$	$3\mu m$	$7\mu m$	$53mk$ (915MHz)	200mK
$W = 0.2\mu m$				915MHz	(4.2GHz)

Nous avons mesuré la fréquence de résonance en fonction du champ magnétique pour plusieurs éclairagements, correspondant à différentes densités électroniques dans les anneaux. Avant éclairage, la dérivée de la fréquence de résonance varie linéairement en fonction du champ magnétique. Cette dépendance s'explique par le diamagnétisme du Niobium (voir chapitre 5). La fréquence de résonance et le facteur de qualité avant éclairage ont pour valeurs:

$$\begin{aligned} f_0 &= 375MHz \\ Q_0 &= 1570 \end{aligned} \tag{7.4}$$

L'éclairage consiste à faire circuler dans la diode un courant de l'ordre de  $1\mu A$ , pendant quelques dizaines de seconde, puis d'attendre une à deux heures que le système se stabilise avant d'effectuer des mesures. Avant éclairage, aucun signal n'est mesuré, ce qui signifie que le nombre d'électrons dans les anneaux est quasiment nul. Après éclairage de l'échantillon, un signal apparaît sur la fréquence de résonance. L'éclairage de l'échantillon provoque également une diminution du facteur de qualité et de la fréquence de résonance ( $\delta f \approx 500kHz$ ,  $\delta Q \approx 800$  entre les éclairages 1 à 5), résultant de la variation des parties réelle et imaginaire de la constante diélectrique du GaAs. Les valeurs du facteur de qualité et de la fréquence de résonance

---

4. Cette valeur correspond à un quantum de résistance pour chaque branche de l'anneau.

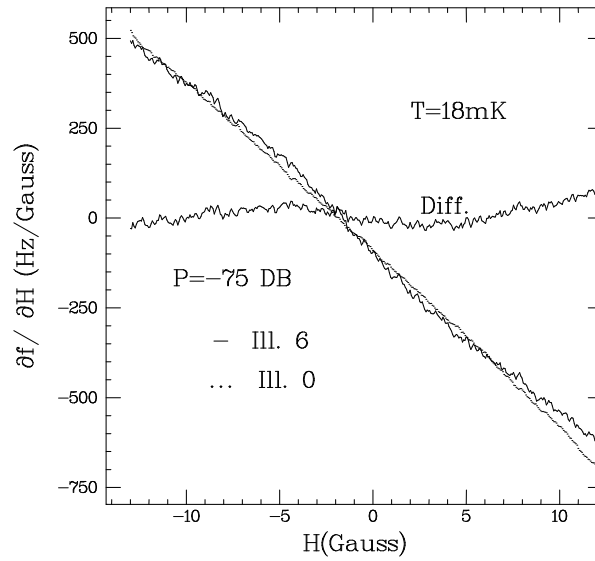


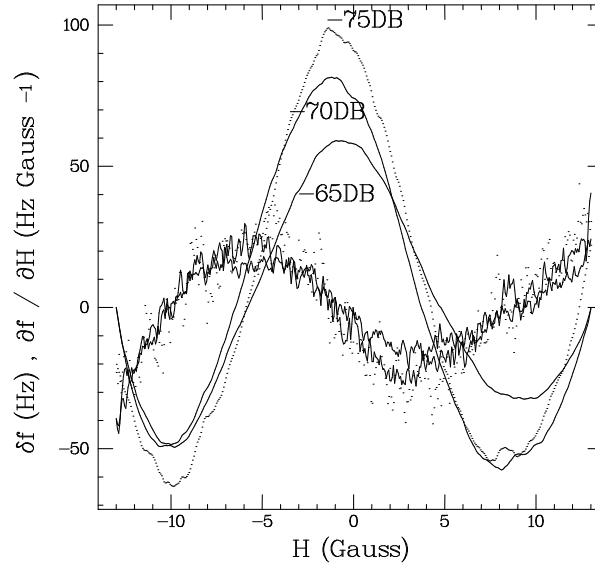
FIG. 7.4 – Fréquence de résonance en fonction du champ magnétique avant éclairement et après éclairement. La courbe annotée “diff” est obtenue par soustraction des deux courbes.

en fonction de l’éclairement sont reportées dans le tableau suivant<sup>5</sup> :

Eclairement	$f$ (MHz)	Q
0	375.9	1685
1	375.9	1570
2	375.9	1570
3	375.7	1220
4	375.5	790
5	375.4	855
6	375.4	830
7	375.46	850
8	375.52	865
9	375.6	970
10	375.7	1100
11	375.75	1300

Après soustraction de la ligne de base du résonateur, une oscillation de la fréquence de résonance avec le champ magnétique est clairement visible. La fréquence de résonance avant et après soustraction de la ligne de base est présentée pour l’éclairement 6 sur la figure 7.4. A cause de la présence de défauts dans la ligne bifilaire, il n’a pas été possible d’effectuer des mesures a plus fort champ. Des expériences en cours montrent qu’il y a plusieurs oscillations. A champ nul,  $f(H)$  diminue en fonction de  $H$ . Comme  $\frac{\delta f}{f} \sim -\frac{\delta \alpha}{\alpha}$ , ce comportement correspond à une *magnétopolarisabilité positive*. La période de l’oscillation est de l’ordre de 13 Gauss, correspondant à un demi-quantum de flux à travers la surface d’un anneau. Le signal décroît

5. L’éclairement 0 correspond à la situation avant éclairement

FIG. 7.5 –  $f(H)$  pour trois puissances différentes:  $P = 75, 70, 65dB$ .

en fonction de la puissance du générateur, comme l'illustre la figure 7.5, sur laquelle est tracée  $f(H)$  pour trois puissances différentes:  $P = -75, -70, -65dB$ . Cette décroissance résulte du chauffage induit par le champ électromagnétique.

Le signal augmente ensuite avec l'éclairement. Après soustraction de la ligne de base, on obtient  $f(H)$  en intégrant numériquement  $\frac{\partial f}{\partial H}$ , comme l'illustre la figure 7.6. Sur la figure 7.7 est reportée  $f(H)$  après soustraction de la ligne de base et intégration numérique pour les éclaircissements 1 à 6. Ce régime de faible densité n'est pas décrit par nos calculs théoriques.

A plus fort éclaircissement, le signal décroît avec la densité électronique. C'est ce qu'on peut observer sur la figure 7.8, correspondant aux éclaircissements 6 à 10. La conductance d'un anneau diffusif bidimensionnel a pour expression  $G = \frac{e^2}{h} M \frac{l_e}{L}$ , où  $M = \frac{W}{\lambda_F}$  est le nombre de canaux. Par conséquent, la conductance adimensionnée se comporte<sup>6</sup> comme  $g \sim n_e$ . En revanche, la longueur d'écrantage dans un système bidimensionnel est indépendante de la densité électronique. Par conséquent, on a:

$$\frac{\delta\alpha}{\alpha} \sim \frac{1}{\sqrt{n_e}} \quad (7.5)$$

En supposant que la densité électronique pour le dernier éclaircissement correspond à la densité nominale de l'hétérojonction ( $n_e = 3 \times 10^{11} cm^{-2}$ ), il est possible d'estimer la densité pour chaque éclaircissement. Les valeurs sont reportées sur la figure 7.9.

Cette décroissance est conforme à nos prédictions théoriques, et résulte de l'augmentation de la conductance de l'anneau<sup>7</sup>.

6. Si on tient compte du fait que les impuretés sont situés à une certaine distance  $d$  du gaz d'électrons, le temps de transport se comporte comme  $\frac{1}{\tau_{lr}} \sim \frac{1}{k_F^3}$ . Il en résulte que  $l_e \sim n_e^2$  et  $g \sim n_e^{\frac{5}{2}}$ .

7. Dans l'approximation de Thomas-Fermi, la longueur d'écrantage est indépendante de la densité électronique à 2d.



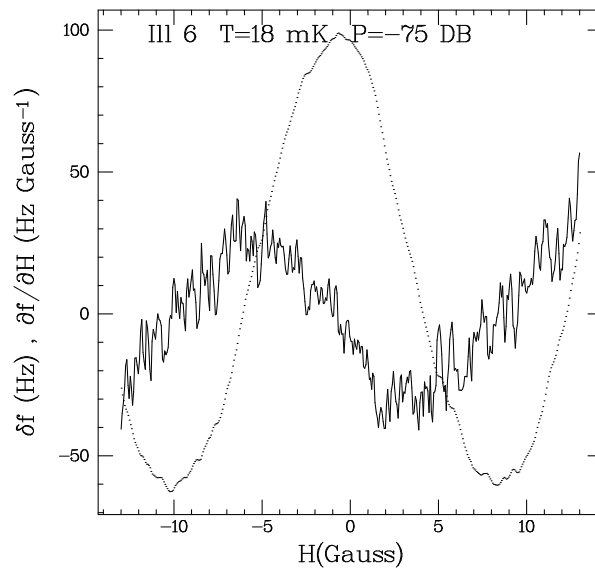


FIG. 7.6 –  $\frac{\partial f}{\partial H}$  après soustraction de la ligne de base, et  $f(H)$  après intégration numérique de  $\frac{\partial f}{\partial H}$  pour l'éclairement 6.

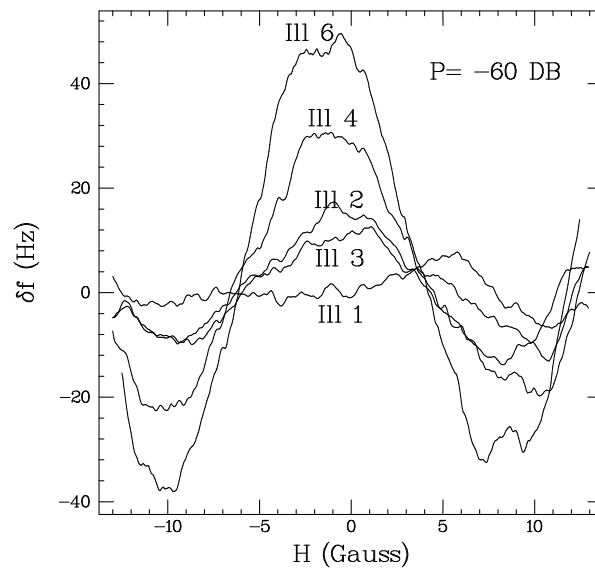


FIG. 7.7 – Fréquence de résonance en fonction du champ magnétique pour les éclairements 1 à 6.

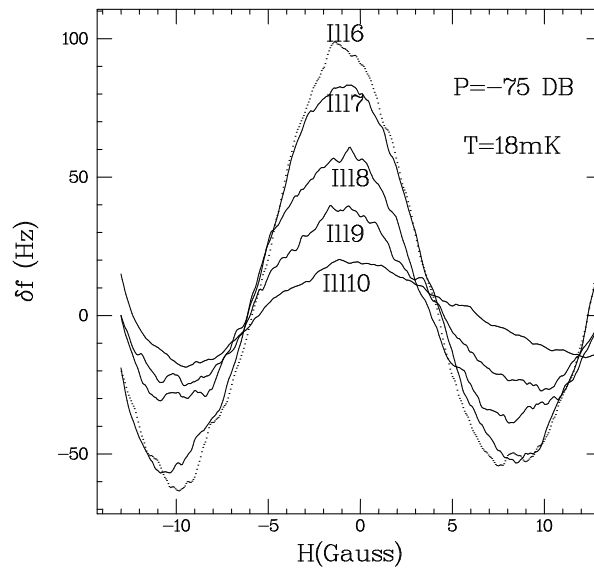


FIG. 7.8 – Fréquence de résonance en fonction du champ magnétique pour les éclaircissements 6 à 10.

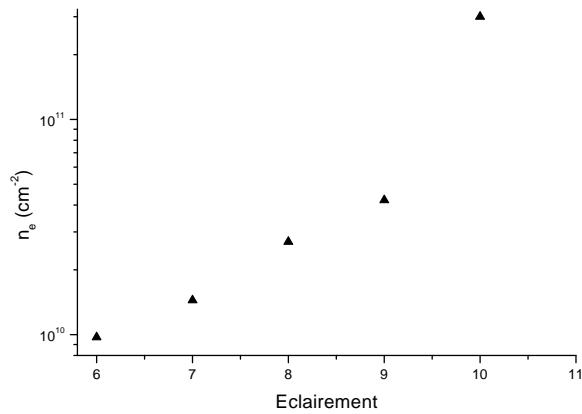


FIG. 7.9 – Estimation de la densité électronique en fonction de l'éclairement, obtenue en supposant que la densité électronique pour l'éclairement 10 correspond à la densité nominale de l'hétérojonction.

Le signal est maximum pour l'éclairement 6. Son amplitude est compatible avec nos prédictions théoriques, obtenues dans l'ensemble grand canonique pour  $\omega \gg \gamma$ , en prenant la valeur de la densité électronique à saturation  $n_e \approx 6 \cdot 10^{11} \text{cm}^{-2}$ . En utilisant les résultats 5.26 et 7.3, et le fait que la polarisabilité à flux nul est de l'ordre de la valeur classique,  $\alpha(\phi = 0) \approx \epsilon_0 a^3$ , la variation de fréquence du résonateur s'exprime en fonction de la polarisabilité d'un anneau:

$$\frac{\delta f}{f} = -k \frac{\delta \alpha}{\alpha} \frac{1}{4\pi \epsilon_{eff}} \frac{\ln^2\left(\frac{d+a}{d-a}\right)}{\ln\left(\frac{d}{r_0}\right)} \quad (7.6)$$

où  $\epsilon_{eff} \approx 12.85$  est la constante diélectrique du GaAs, et  $k$  un facteur numérique inférieur à 1, qui dépend d'une part de l'éloignement de l'hétérojonction par rapport au résonateur auquel est associée une réduction de signal (typiquement de l'ordre de  $\frac{1}{3}$ ) et qui traduit également les imperfections du couplage, à cause desquels une partie des anneaux n'est pas couplée au résonateur. Celles-ci ne sont pas prises en compte dans le calcul du chapitre 5 menant à la formule 5.26. En prenant  $k = \frac{1}{3 \times 2}$ ,  $a = 1.4 \mu\text{m}$ ,  $W = 0.2 \mu\text{m}$ ,  $g = 7$ ,  $n_e = 3 \times 10^{11} \text{cm}^{-2}$ ,  $\lambda_{T.F} \approx \lambda_F = \sqrt{\frac{2\pi}{n_e}} \approx 420 \text{ \AA}$ , on obtient  $\frac{\delta \alpha}{\alpha} = \frac{8}{3\pi^3} \frac{\lambda_{T.F}}{W} \frac{1}{g} \approx 2.6 \times 10^{-3}$ , ce qui mène à l'estimation de la variation de fréquence de résonance:

$$\left(\frac{\delta f}{f}\right)_{th} \approx 1.02 \times 10^{-6} \quad (7.7)$$

Cette valeur est à comparer avec la valeur expérimentale:

$$\left(\frac{\delta f}{f}\right)_{exp} \approx 3.3 \times 10^{-7} \quad (7.8)$$

La fréquence de résonance en fonction du champ magnétique à différentes températures est présentée sur la figure 7.10, correspondant à l'éclairement 6. Le signal décroît en fonction de la température avec une loi de puissance (fig. 7.11). Cette décroissance se fait plus lente quand on augmente l'éclairement. Les dépendances en température pour les éclaircissements 8 et 9 et 10 sont comparés sur la figure 7.12.

### 7.4.1 Discussion sur l'ensemble statistique

Nos calculs théoriques (voir chapitre 2) montrent qu'il existe une correction mésoscopique à la polarisabilité dans l'ensemble grand-canonique, pour  $\omega > \gamma$ . En revanche, notre expérience correspond en principe à l'ensemble canonique pour lequel nous ne prévoyons aucun effet. Plusieurs hypothèses permettraient d'expliquer nos mesures:

- Effet de la température
- Constante de temps de l'équilibrage du potentiel chimique
- Effet de la fréquence

Si l'écartement moyen entre les niveaux électroniques est plus petit dans notre échantillon que la valeur théorique  $\Delta \approx 53 \text{mK}$ , notre expérience, bien que canonique, serait équivalente à une

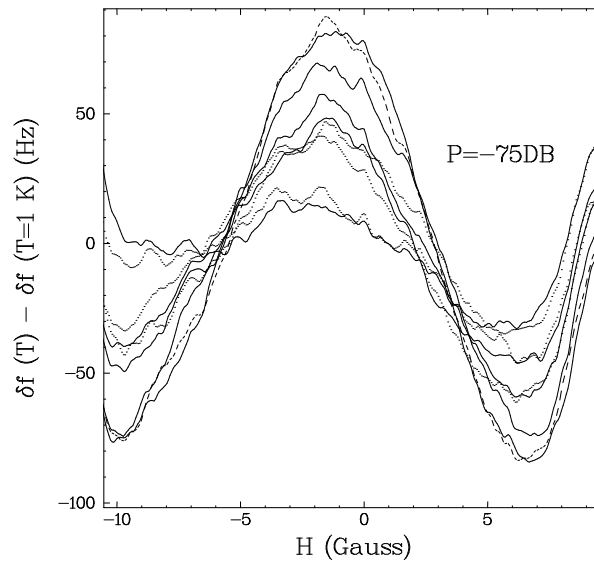


FIG. 7.10 -  $f(H) - f(T = 1K)$  en fonction de la température pour l'éclairement 6.

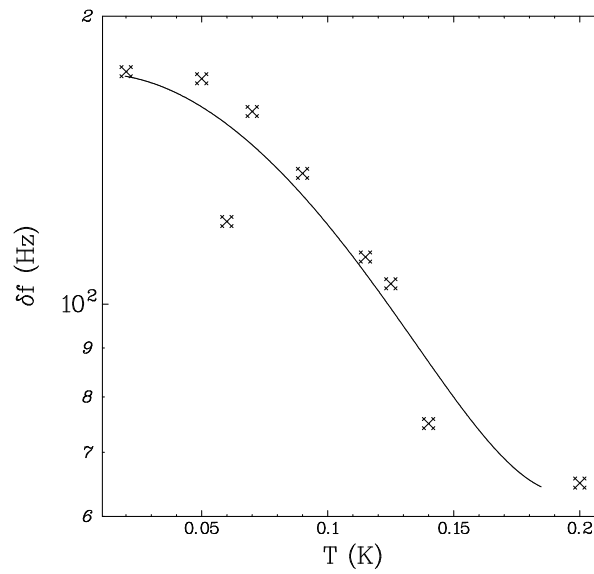


FIG. 7.11 - Dépendance en température de l'oscillation pour l'éclairement 6.

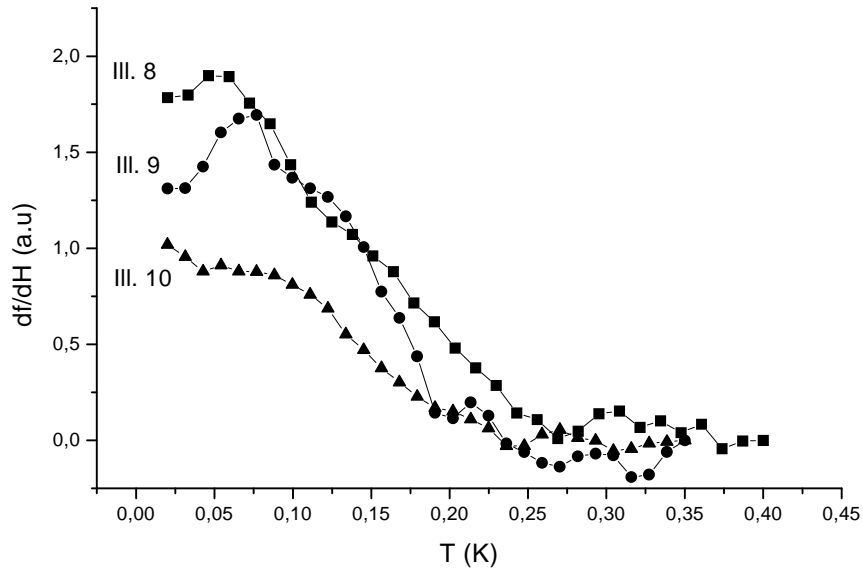


FIG. 7.12 –  $\frac{df}{dH}$  en fonction de la température pour les éclaircissements 8 et 9 et 10.

expérience grand-canonique puisqu'il n'existe de différences entre ces deux ensembles que pour des températures inférieures à l'écartement moyen entre les niveaux électroniques  $\Delta$ .

Une autre explication suppose un équilibrage des populations électroniques sur une échelle de temps caractéristique de l'ordre de celle du champ statique (typiquement  $1s$ ). Dans cette situation le système est alors canonique du point de vue du champ alternatif et grand-canonique du point de vue du champ statique. Il en résulte que le potentiel chimique et les populations électroniques ne dépendent pas du flux:  $\frac{\partial \mu}{\partial \phi}, \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \phi} \approx 0$ . Cette situation est équivalente à l'ensemble grand-canonique pour  $\omega > \gamma$ .

Enfin le terme non-diagonal dans l'ensemble canonique est affecté par la fréquence. La contribution du dénominateur d'énergie,  $\int \frac{R(s)}{s - \omega + i\gamma}$ , s'annule pour  $\omega = \frac{\Delta}{3}$ . Pour cette fréquence particulière, la magnétopolarisabilité dans l'ensemble canonique ne dépend donc que des éléments de matrice non-diagonaux de l'opérateur écranté. On retrouve donc de nouveau le résultat grand-canonique, pour  $\omega > \gamma$ . Ce mécanisme permet donc également d'expliquer notre expérience, qui constitue la première évidence expérimentale de corrections mésoscopiques à la polarisabilité électrique.



## Conclusion

Comme nous l'avons vu dans le chapitre introductif, dans un métal à basse température les électrons gardent une phase déterminée sur une longueur caractéristique  $L_\phi$ , appelée la longueur de cohérence de phase. Celle-ci est limitée par les collisions inélastiques, ou plus généralement par celles qui provoquent un changement d'état du réservoir thermodynamique auquel est couplé l'échantillon (environnement).  $L_\phi$  est typiquement de l'ordre du micron à  $T \sim 100mK$ .

Par définition, un système mésoscopique est de taille suffisamment réduite pour qu'un électron garde sa cohérence en le traversant. Sa taille est par conséquent inférieure ou de l'ordre de  $L_\phi$ . La mesure d'un tel système nécessite de le coupler à des appareils de mesure macroscopiques. Ce couplage a pour effet de perturber le système. L'ampleur de la perturbation induite dépend de la nature et de la force de ce couplage.

Les propriétés de conduction électrique des systèmes mésoscopiques sont généralement étudiés par des mesures de transport, qui consistent à connecter le système à des fils de mesure. En raison du fort couplage entre les réservoirs et le système proprement dit, les effets quantiques dans les systèmes connectés sont toujours petits en comparaison des effets classiques, typiquement de l'ordre de  $\frac{1}{g}$ , où  $g$  est la conductance adimensionnée<sup>8</sup>. Par ailleurs de tels systèmes ont un spectre des niveaux d'énergie continu, en raison du caractère infini des fils de mesure auxquels ils sont connectés. La conductance représente dans cette limite la transmission d'une onde électronique par le système.

Au contraire, dans les systèmes électriquement isolés, le couplage avec l'environnement peut être beaucoup plus faible, permettant ainsi d'explorer la limite du spectre discret. La conductance d'un système isolé représente la réponse en courant à une onde électromagnétique. Sa partie dissipative est une mesure de l'absorption du système. Elle peut être très différente de celle d'un système connecté. Le rapport entre l'élargissement des niveaux et l'écartement entre les niveaux  $\frac{\gamma}{\Delta}$ , joue un grand rôle. La conductance d'un système électriquement isolé est qualitativement et quantitativement très différente du cas connecté. L'amplitude des oscillations de conductance est parfois du même ordre de grandeur que la conductance de Drude.

La première partie de ce travail est une étude théorique de la réponse d'un système mésoscopique à un champ électrique (polarisabilité électrique), qui n'avait pas été étudiée auparavant. La polarisabilité d'un conducteur classique est principalement déterminée par sa géométrie. Qu'en est-il pour un système quantiquement cohérent? Le problème est abordé à la fois de façon analytique et numérique. Le couplage avec l'environnement, qui permet la relaxation, est pris en compte au moyen d'une équation maîtresse, dans laquelle intervient le paramètre

---

8. La conductance adimensionnée est définie par  $g = \frac{G}{e^2/h}$ , où  $G$  est la conductance du système.

$\gamma$ , qui représente l'élargissement moyen des niveaux électroniques. Le potentiel écranté est calculé par le formalisme de la fonction de réponse, grâce auquel les corrections quantiques sont prises en compte. La polarisabilité s'exprime par la théorie de la réponse linéaire en fonction des vecteurs propres et des énergies propres du système d'électrons sans interactions dans un potentiel désordonné. Nous avons montré que la cohérence de phase électronique donne lieu à une correction quantique à la polarisabilité. Dans l'ensemble canonique, la magnétopolarisabilité est négative et d'amplitude très faible ( $\frac{\delta\alpha}{\alpha} \sim -\frac{1}{N^2}$ , où  $N$  est le nombre d'électrons dans le système) dans le régime ballistique, et strictement nulle dans le régime diffusif. Ce dernier point résulte de l'invariance du champ électrique par rapport au renversement du sens du temps. Dans l'ensemble grand-canonique, la magnétopolarisabilité est strictement nulle à basse fréquence. En revanche, pour une fréquence supérieure à l'élargissement des niveaux  $\gamma$ , la magnétopolarisabilité est positive et son amplitude relative vaut pour un anneau de largeur  $W$ :  $\frac{\delta\alpha}{\alpha} \sim \frac{\lambda_{T,F}}{W} \frac{1}{g}$ , où  $\lambda_{T,F}$  est la longueur d'onde de Thomas-Fermi. Ce résultat analytique est confirmé par un calcul numérique. Le système désordonné est modélisé par le hamiltonien d'Anderson, que l'on diagonalise exactement. Un fait remarquable réside dans l'augmentation de la polarisabilité avec le désordre. Par ailleurs, son amplitude décroît avec la densité électronique, à cause des effets conjugués de la longueur de Thomas-Fermi et de la conductance. L'effet des interactions électron-électron, traité par la théorie des perturbations a également été étudié. Nous montrons que dans l'ensemble canonique, les interactions augmentent la magnétopolarisabilité. Pour ces calculs, nous avons été amenés à déterminer la limite de validité de la réponse linéaire. Le calcul numérique prouve que celle-ci est justifiée jusqu'à des champs électriques de l'ordre de l'énergie de Fermi du système.

Le chapitre suivant porte sur la réponse dissipative à un champ électrique alternatif. Un corps conducteur placé dans un champ électrique alternatif dissipe de l'énergie. Que vaut cette dissipation pour un échantillon mésoscopique? La partie imaginaire de la susceptibilité électrique a été calculée à l'aide du même formalisme que celui utilisé pour le calcul de la polarisabilité. Tout comme la susceptibilité magnétique, elle comporte un terme d'absorption, qui représente les transitions induites par le champ, et un terme de relaxation. Le premier terme est relié aux propriétés statistiques des niveaux d'énergie électroniques, et constitue la contribution dominante dans le régime du spectre discret et à des fréquences inférieures à l'écartement moyen entre les niveaux  $\Delta$ . Il s'exprime en fonction de la probabilité  $R(s)$  de trouver deux niveaux séparés par l'intervalle d'énergie  $s$ . Le second terme est un terme de relaxation, lié au retard de l'équilibrage des populations lorsqu'elles dépendent du champ électrique. Pour  $\omega \gg \Delta$ , c'est le second terme qui domine. Les propriétés statistiques du spectre d'énergie d'un système désordonné sont décrites par la théorie des matrices aléatoires, et dépendent de la symétrie du hamiltonien considéré. Nous avons ainsi montré que dans le régime du spectre discret ( $\gamma \ll \Delta$ ), la partie dépendante du flux de la susceptibilité change de signe en fonction de la fréquence. Par ailleurs, son amplitude est de l'ordre de la susceptibilité classique. La dissipation électrique a également été comparé avec la dissipation magnétique. Nous avons montré que le rapport des corrections quantiques aux susceptibilités électriques et magnétiques s'exprime en fonction de la constante de structure fine:  $r = \frac{\delta\chi_m''}{\delta\chi_e''} \approx \alpha^2 g^2$ .

La deuxième partie de la thèse est expérimentale. Les techniques de croissance et de nanofabrication sont présentées dans le chapitre 4, illustré par la fabrication de transistors à effet de



champ (FET) en GaAs. Le fonctionnement de ces FET se situe dans le domaine des ondes millimétriques et nécessite une grille de longueur submicronique, réalisée par lithographie électronique. Le principe de fabrication d'un réseau de systèmes mésoscopiques isolés, gravé dans une hétérojonction GaAs/GaAlAs est également exposé.

La principale difficulté de la mesure sur des systèmes mésoscopiques isolés tient dans la petitesse des signaux. En effet, pour un conducteur de taille typique  $a$ , la susceptibilité électrique se comporte comme  $a^3$ , et la susceptibilité magnétique comme  $a^4$ . Il faut donc une technique de mesure adaptée, dotée d'une très grande sensibilité. La technique de mesure fait l'objet du chapitre 5. Elle consiste à coupler un réseau de systèmes mésoscopiques à un microrésonateur multimode très sensible. Il s'agit d'une ligne bifilaire en niobium supraconducteur, repliée en forme de méandre. La distance entre les fils est de  $4\mu m$  et la longueur totale des fils dépliés est de  $20cm$ , menant à une fréquence de résonance fondamentale de l'ordre de  $350MHz$ . Le facteur de qualité est de l'ordre de 80000 en l'absence d'échantillon. On mesure la puissance réfléchie par le résonateur. Le champ électromagnétique, produit par un générateur haute fréquence, est modulé à plus basse fréquence (typiquement de l'ordre de  $50kHz$ ), ce qui permet d'asservir le générateur sur la fréquence de résonance. On mesure les variations de fréquence de résonance et de facteur de qualité en fonction du champ magnétique. Celui-ci est modulé à basse fréquence afin d'accroître la sensibilité de la mesure. La modulation est produite par une petite bobine de champ placée dans une cavité métallique contenant l'échantillon. Celle-ci limite l'écrantage de la modulation. Elle contient également une diode électroluminescente. En éclairant l'hétérojonction, on peut ainsi modifier la densité électronique dans les échantillons. Nous avons conçu et mis en oeuvre cet ensemble expérimental.

Par cette technique, nous avons mesuré la susceptibilité d'anneaux et de carrés mésoscopiques à très basse température ( $T \sim 20mK$ ). Les échantillons sont fabriqués par D. Mailly (L2M Bagneux) dans des Hétérojonctions GaAs/GaAlAs, réalisées par MBE par B. Etienne (L2M Bagneux). La susceptibilité des anneaux oscille en fonction du champ magnétique. La période correspond à un demi-quantum de flux à travers un échantillon. Pour les anneaux le rapport des susceptibilités magnétique et électrique est de l'ordre de 1. Par conséquent, il est difficile d'interpréter ces signaux en l'absence d'expériences supplémentaires. Pour les carrés, nous avons pu mesurer la susceptibilité à la fois en fonction de la fréquence ( $f_1 = 330MHz$ ,  $f_2 = 670MHz$ ,  $f_3 = 1065MHz$ ), et du nombre d'électrons, grâce à la diode électroluminescente placée dans le porte échantillon. La partie dissipative de la magnéto-susceptibilité change de signe à la fois en fonction de la fréquence et du nombre d'électrons. A faible densité, le signe est opposé à la localisation faible (magnétoconductance négative) pour  $\omega < \Delta$  et change de signe à fréquence supérieure. L'amplitude du signal augmente avec la densité électronique, et est de l'ordre de la susceptibilité classique. Le comportement de la susceptibilité est interprété en terme de sensibilité de la statistique des niveaux à un champ magnétique. La partie non-dissipative correspond à un courant permanent diamagnétique. L'amplitude de l'effet est compatible avec les valeurs prédites par plusieurs auteurs. En revanche, le signe est contraire à la plupart des prédictions théoriques, et reste incompris.

La polarisabilité électrique d'un réseau d'anneaux mésoscopiques diffusifs, gravé dans une hétérojonction GaAs/GaAlAs a été mesurée à haute fréquence. Pour cela un nouveau type de résonateur a été conçu. Il comporte une partie capacitive en forme de peigne et une partie in-

ductive en forme de méandre, permettant un découplage des effets électriques et magnétiques. Quand l'échantillon est collé sur la partie capacitive, les variations de la fréquence de résonance du résonateur sont reliées à la polarisabilité de l'échantillon:  $\frac{\delta f}{f} \sim -\frac{\delta \alpha}{\alpha}$ . Nous observons une oscillation de la fréquence de résonance en fonction du flux. La largeur en champ de l'oscillation correspond à un demi-quantum de flux à travers la surface d'un anneau. L'amplitude du signal augmente avec la densité électronique à faible densité, puis diminue à plus forte densité. Conformément à nos prédictions théoriques, le signe de l'effet correspond à une magnétopolarisabilité positive. L'amplitude maximum du signal est de l'ordre de grandeur de l'effet prédit, en prenant la densité électronique nominale de l'hétérojonction. Néanmoins, ces prédictions concernent l'ensemble grand-canonique, alors que nos mesures correspondent en principe à l'ensemble canonique. Plusieurs explications sont proposées pour expliquer ce résultat.

# Annexe A

## Modèle d'Anderson

Le hamiltonien d'Anderson (fig. A.1) modélise un système d'électrons se déplaçant dans un potentiel désordonné [11]. Dans ce modèle, le réseau cristallin est représenté par des sites atomique comportant une ou plusieurs orbitales. Un élément de saut entre sites  $t$  représente le recouvrement entre orbitales atomiques d'atomes voisins. Afin de simuler le désordre dans le matériau, l'énergie de site est choisi aléatoirement dans l'intervalle  $[-\frac{w}{2}, +\frac{w}{2}]$ . Par ailleurs, la présence d'un champ ou d'un flux magnétique introduit un terme de phase dans l'élément de saut. Le hamiltonien d'Anderson s'écrit:

$$H = \sum_k \epsilon_k c_k^+ c_k + t e^{i\phi_k} c_k^+ c_{k+1} + t e^{i\phi_k} c_{k+1}^+ c_k \quad (\text{A.1})$$

avec  $\epsilon_i \in [-\frac{w}{2}, \frac{w}{2}]$ . Dans le cas particulier d'un anneau traversé par un flux, le terme de phase est non nul uniquement pour l'élément de saut entre le premier et le dernier site  $\varphi_k = 2\pi \frac{\phi}{\phi_0} \delta_{k,n_x}$ . Il est compris entre zéro et  $2\pi$ , cette dernière valeur correspondant à un quantum de flux traversant l'anneau.

Pour un système plongé dans un champ magnétique, l'élément de saut dépend du point considéré, traduisant le fait que  $\psi(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = e^{\frac{ie}{\hbar} \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}+\mathbf{R}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}} \psi(\mathbf{r})$ , avec  $\mathbf{A} = \frac{By}{2} \hat{\mathbf{y}} - \frac{Bx}{2} \hat{\mathbf{y}}^1$ . L'élément de saut vaut:

$$\varphi_k = \begin{cases} -\pi \frac{\phi}{\phi_0} \frac{y_k}{\Delta l} & \text{selon } x \\ \pi \frac{\phi}{\phi_0} \frac{x_k}{\Delta l} & \text{selon } y \\ 0 & \text{selon } z \end{cases}$$

---

1. Pour un champ orienté suivant l'axe  $z$

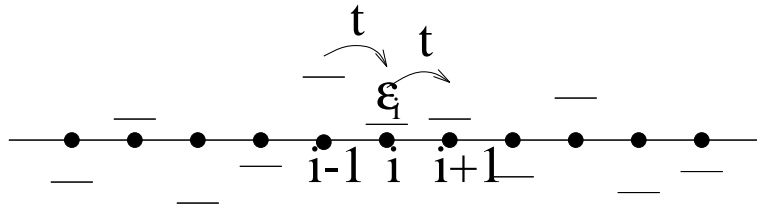


FIG. A.1 – Le modèle d'Anderson à 1d.

**Quelques résultats utiles** Nous présentons dans ce paragraphe quelques résultats utiles concernant le modèle d'Anderson. En dimension  $d = 1$ , et à désordre strictement nul la relation de dispersion est de la forme:

$$E = 2t \cos(ka) \quad (\text{A.2})$$

A désordre faible, les énergies sont comprises dans l'intervalle  $[-2dt, 2dt]$ . L'écartement moyen entre les niveaux dépend du nombre total de sites  $n_t$ :

$$\Delta \approx \frac{4d \times t}{n_t} \quad (\text{A.3})$$

Le désordre est choisi de manière à se trouver dans le régime souhaité. Le libre parcours moyen élastique a été estimé et vaut:

$$l_e \approx \begin{cases} 105 \left(\frac{t}{w}\right)^2 & 1d \\ 30 \left(\frac{t}{w}\right)^2 & 2d \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

La conductance dans un système bidimensionnel vaut par ailleurs:

$$g = 96\pi\nu \left(\frac{t}{w}\right)^2 \quad (\text{A.5})$$

où  $\nu = \frac{N}{n_t}$  est le facteur de remplissage qui dépend du nombre d'électrons  $N$  dans le système. Enfin, pour un fil quasi-unidimensionnel, la longueur de localisation dépend linéairement du nombre de canaux  $M$ :

$$\xi = Ml_e \quad (\text{A.6})$$

## Annexe B

### Effet d'un potentiel sur la phase

Soit un système d'électrons sans interaction, dans un potentiel  $V(x)$ , dont l'échelle caractéristique de variation spatiale est  $\frac{1}{\kappa}$ <sup>1</sup>. Le hamiltonien s'écrit:

$$H = H_0 + V(x) \quad (\text{B.1})$$

où  $H_0 = \frac{p^2}{2m}$  est le hamiltonien d'électrons libre dont les fonctions propres, notées  $|\psi_0\rangle$  et associées aux énergies propres  $\epsilon_0$ , satisfont l'équation de Shrödinger  $H_0|\psi_0\rangle = \epsilon_0|\psi_0\rangle$ .

Considérons la fonction d'onde  $|\psi\rangle = e^{-\frac{iV(x)t}{\hbar}} e^{-\frac{iH_0t}{\hbar}} |\psi_0\rangle$ . Dans quelle mesure est-elle fonction propre de  $H$ ?

Pour cela,  $|\psi(t)\rangle$  doit satisfaire l'équation de Shrödinger dépendante du temps:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \quad (\text{B.2})$$

Appliquons l'opérateur  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  à l'état  $|\psi_0(t)\rangle = e^{-\frac{iH_0t}{\hbar}} |\psi_0\rangle$ :

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = V(x) e^{-\frac{iVt}{\hbar}} |\psi_0(t)\rangle + e^{-\frac{iVt}{\hbar}} H_0 |\psi_0(t)\rangle$$

Il est donc nécessaire que  $H_0$  et  $V(x)$  commutent. Pour déterminer le critère de validité, considérons la fonction  $g(x) = e^{-iV(x)t} f(x)$  (on a pris  $\hbar = 1$ ), où la fonction  $f(x)$  a pour échelle de variation spatiale  $\frac{1}{k_0}$ , c'est à dire telle que  $\frac{\partial f(x)}{\partial x} \sim k_0 f(x)$ , à laquelle on applique l'opérateur  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (e^{-iVt} f(x)) = f(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (e^{-iV(x)t}) + e^{-iV(x)t} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + 2 \left( \frac{\partial e^{-iV(x)t}}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right) \quad (\text{B.3})$$

On a donc  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} (e^{-iVt} f(x)) \approx e^{-iV(x)t} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}$  si les deux autres termes dans l'équation B.3, peuvent être négligés. Par ailleurs, compte tenu de l'échelle de variation de la fonction  $V(x)$ , on a

---

1. Par exemple un potentiel de la forme  $V(x) = V_0 e^{-\kappa x}$ .

$\frac{\partial e^{iV(x)t}}{\partial x} \sim i\kappa V(x)te^{iV(x)t}$ . On en déduit que la fonction  $|\psi(t)\rangle$  est fonction propre de  $H$  si la condition  $\frac{\kappa t V(x)}{\hbar k_0} \ll 1$  est réalisée, c'est à dire jusqu'au temps:

$$t_{max} = \frac{\hbar}{V(x)} \frac{k_0}{\kappa} \quad (\text{B.4})$$

$t_{max}$  est d'autant plus grand que l'échelle de variation du potentiel  $V(x)$  est lente devant l'échelle de variation  $1/k$  de  $\psi_0(x)$ , qui correspond à la longueur d'onde de Fermi. Notons enfin que dans la limite  $V(x) \rightarrow 0$ , qui correspond à la situation de réponse linéaire, cette condition est toujours réalisée.

# Annexe C

## Grille en forme de T

### C.1 Motivation

Une grille très courte présente l'inconvénient d'avoir une grande résistance. Cette dernière, conjuguée à la capacité qui existe entre la source et le drain, agit comme un filtre pour les hautes fréquences. La résistance d'une grille en or<sup>1</sup> de longueur  $L = 1\mu m$ , d'une largeur  $W = 100\mu m$ , et d'épaisseur  $0.1\mu m$  est  $R_g = \rho \frac{LW}{Ld} \sim 30\Omega$ .

La résistance de la grille peut être diminuée de façon significative en fabriquant une grille en forme de T ("T gate") C.1. Cette forme présente l'avantage de préserver une faible capacité entre la grille et le canal conducteur.

### C.2 Procédé

La fabrication de la grille suit celle des contacts Ohmiques par lithographie optique. La première étape consiste à déposer par PECVD<sup>2</sup> une couche isolante de nitrure de silicium ( $Si_3N_4$ ) d'épaisseur  $1000\text{\AA}$ . Cette technique utilise un plasma de silane ( $H_4Si$ ) et d'azote ( $N_2$ ) créé par

- 
1. La résistivité de l'or à température ambiante est de l'ordre de  $2.84 \cdot 10^{-6} \Omega cm$
  2. Plasma Enhanced Chemical Vapor Deposition

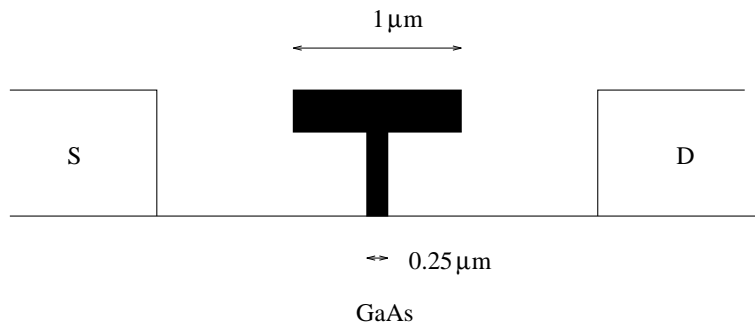


FIG. C.1 – Grille en forme de T ("T gate")

une onde radiofréquence à  $13.6GHz$ . Une couche de PMMA de poids moléculaire  $495K$  (5% d'anisole) et d'épaisseur  $1500\text{\AA}$  est ensuite déposée<sup>3</sup>. Après le séchage habituel sur une plaque chauffante à  $180^{\circ}C$ , on procède à l'étape de lithographie électronique, suivie d'une attaque ionique directive<sup>4</sup> (RIE) du nitrure de silicium, à l'aide d'un plasma de  $SF_6$ . L'échantillon est nettoyé en l'immergeant dans du posistrip (PS 600) pendant une dizaine de minutes. Comme pour les grilles habituelles, deux couches de PMMA sont ensuite déposées sur l'échantillon. Les conditions pour la lithographie sont:

	Courant ( $pA$ )	Dose ( $\mu C/cm^2$ )
Grille ( $L = 1\mu m$ )	60	300
Plot	800	300

Après le développement, les différents métaux constituant la grille sont déposés.

Métal	Epaisseur ( $\text{\AA}$ )
Ti	200
Pt	100
Au	2000

Enfin, on procède au Lift-Off dans de l'acétone, puis au nettoyage habituel de l'échantillon (acétone, méthanol, propanol). Une image d'une grille en forme de  $T$ , obtenue par microscopie après clivage de l'échantillon est présentée sur la figure C.2

L'image C.3 représente une autre grille en vue de dessus. Nous avons donc réussi à obtenir la forme "en T" désirée. Ce procédé devrait dans le futur permettre une amélioration des performances des FET.

---

3. La vitesse de rotation de la tournette est de l'ordre de  $8000\text{tours}/\text{min}$ , permettant d'obtenir une couche dont l'épaisseur est de l'ordre de  $1500\text{\AA}$ .

4. Pour une pression de  $100\text{ mTorr}$ , et une puissance du rayonnement RF de  $100Watt$ , le temps nécessaire à l'attaque de  $1000\text{\AA}$  de niture de silicium est d'environ  $30s$ . Notons que le plasma attaque également le  $PMMA$ , à une vitesse d'environ  $600\text{\AA}/\text{min}$ .



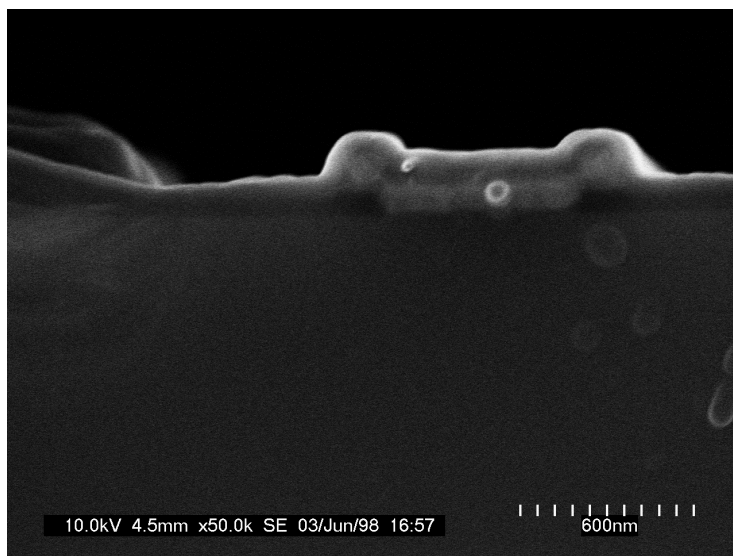


FIG. C.2 – Image par microscopie électronique d'une grille en forme de *T*, obtenue après clivage de l'échantillon.

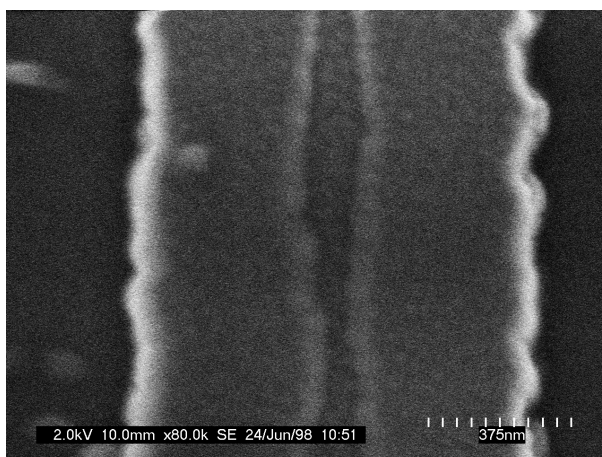


FIG. C.3 – Image par microscopie électronique d'une grille en forme de *T*, en vue de dessus.



## Annexe D

### Circuit $R, L, C$ résonant

L'impédance d'un circuit  $R, L, C$  résonant (fig. D.1) est:

$$Z(\omega) = \frac{R + jL\omega}{(1 - LC\omega^2) + jRC\omega} \quad (\text{D.1})$$

Connecté à un générateur de courant, il absorbe une puissance  $P = \frac{(\Re Z)I^2}{2}$ . En remplaçant l'impédance par son expression D.1, on obtient:

$$P = \frac{R(1 - LC\omega^2) + RLC\omega^2}{(1 - (LC)\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}$$

$P$  est maximum à la fréquence  $\omega_R^2 = \frac{1}{LC} - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}\right)^2$ . Pour un circuit peu dissipatif, tel que  $\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC}$ , la fréquence de résonance est donc:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{D.2})$$

La condition précédente s'écrit encore:

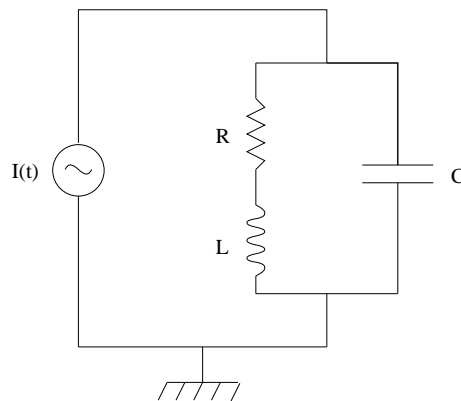


FIG. D.1 – Circuit  $R, L, C$ .

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} \gg 1 \quad (\text{D.3})$$

# Annexe E

## Fabrication de la ligne bifilaire

### – Dépot du Niobium

On réalise tout d'abord une couche mince de niobium d'épaisseur  $1\mu m$  sur un substrat de Saphir, par pulvérisation cathodique. Cette méthode de déposition consiste à bombarder une cible de *Nb* par des ions d'Argon énergétiques.

### – Résonateur en résine

On dépose ensuite à l'aide d'une tournette<sup>1</sup> une couche de résine photo-sensible. Celle-ci est polymérisée en la chauffant. Nous disposons d'un masque en verre chromé, sur lequel est dessiné un grand nombre de résonateur. Celui-ci est appliqué sur le substrat, puis on éclaire avec de la lumière ultraviolette. Après développement<sup>2</sup>, on obtient un résonateur en résine dessiné sur le Nb.

### – Masque en Aluminium

L'étape suivante consiste à réaliser un masque en aluminium. Une couche d'Aluminium est déposé sur l'échantillon par évaporation<sup>3</sup>. L'échantillon est ensuite immergé dans de l'acétone, afin de dissoudre la résine. Des ultra-sons sont utilisés afin d'en faciliter le départ.

### – Gravure du Niobium

On procède alors à une attaque chimique par RIE<sup>4</sup>, utilisant un plasma de  $SF_6$ , qui réagit avec le Niobium pour donner un composé volatil. L'ion fluorine, en revanche, n'attaque pas l'Aluminium. L'Aluminium est ensuite éliminé par un bain de soude. On obtient à la fin de cette étape des résonateurs en Niobium sur le substrat de Saphir, dont on ne sait encore rien sur leur qualité...

---

1. Paramètres utilisés pour la tournette:  $3600\text{tours}/\text{min}$ , 30s.

2. L'échantillon est trempé dans un liquide qui réagit avec la résine monorisé par le rayonnement UV, mais pas avec la résine polymérisé, protégée par les parties chromés du masque.

3. L'Aluminium est déposé dans un creuset en Tungstène, dans lequel on fait circuler un courant, donnant lieu à l'évaporation d'atomes d'Aluminium.

4. Reactive Ion Etching.



# Bibliographie

- [1] Imry Y., *Introduction to mesoscopic physics*, (Oxford University Press), (1997)
- [2] Y. Imry, in *Directions in Condensed Matter Physics*, edited by G. Grinstein and G. Mazenko (World Scientific, Singapore, 1986), pp. 221–236.
- [3] Tonomura A., Matsuda T., Susuki R., Fukuhara A., Osakabe N., Umezaki H., Endo J., Shinogawa K., Sugita Y., and Fujiwara H., *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1443, (1982)
- [4] A. Yacoby, U. Sivan, C. P. Umbach, and J. M. Hong, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1938 (1991).
- [5] Aharonov Y., Bohm D., *Phys. Rev* **115** (1959) 485
- [6] Chambers R.G., *Phys. Rev. Lett.* **5** (1960) 3
- [7] Schmid H., in Proc. *8th European Congress on Electron Microscopy* (eds Csanady A., Rohlich P., Szabo D.) 285 (Programme committee of the 8th Eur. Congr. on Electron Microsc., Budapest, 1984).
- [8] Ashcroft N. W., Mermin N. D., “Solid State physics”, *Ed. W.B. Saunders company*, (1976)
- [9] *Les Houches 1994, Mesoscopic Quantum Physics*, edited by E.Akkermans et al. (Elsevier Science Publishers 1995)
- [10] Altshuler B., Cours des houches, *Les Houches 1994, Mesoscopic Quantum Physics*, edited by E.Akkermans et al. (Elsevier Science Publishers 1995)
- [11] P. W. Anderson, *Phys. Rev.* **109**, 1492 (1958).
- [12] D. Thouless, *Phys. Rep.* **13**, 93 (1974).
- [13] D. Thouless, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 1167 (1977).
- [14] P. W. Anderson, D. Licciardello, and T. Ramakrishnan, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 673 (1979).
- [15] M. Paalanen, T. R. and G.A. Thomas, and R. Bhatt, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1896 (1983).
- [16] Kravchenko S. V., Simonian D., Sarachik M. P., Mason W., Furneaux J. E., *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 4938
- [17] A. Stern, Y. Aharonov, and Y. Imry, *Phys. Rev. A* **41**, 3436 (1990).
- [18] A. Stern, Y. Aharonov, and Y. Imry, in *Quantum Coherence in Mesoscopic Systems*, edited by B. Kramer (Plenum Press, New-York, 1991), pp. 99–104.
- [19] A.Schmid, *Z. Physik* **271**, 251 (1973).
- [20] A. Schmid, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 80 (1991).
- [21] B. L. Altshuler, A. G. Aronov and D. E. Khmel'nitskii, *J. Phys. C* **15**, 7367 (1982).
- [22] B. L. Altshuler and A. G. Aronov, in *Electron-Electron Interactions in Disordered Systems*, edited by A. L. Efros and M. Pollak (North Holland, Amsterdam, 1985), p. 1.

- [23] R. P. Peters, G. Bergmann, and R. Mueller, Phys. Rev. Lett. **58**, 1964 (1987).
- [24] E. L. Altshuler, B. L. Altshuler, and A. G. Aronov, Solid State Commun. **54**, 617 (1985).
- [25] A. Kamenev and Y. Gefen "Correlated Fermions and transport in mesoscopic structures", T. Martin, G. Montambaux and J. Trân Thanh Vân (1996)
- [26] S. Wind, M. J. Rooks, V. Chamdrasekhar, and D. E. Prober, Phys. Rev. Lett. **57**, 633 (1986).
- [27] P. Echternach *et al.*, Phys. Rev. B **48**, 11516 (1993).
- [28] J. Lin and N. Giordano, Phys. Rev. B **33**, 1519 (1986).
- [29] T. J. Thornton *et al.*, Phys. Rev. Lett. **56**, 1198 (1986).
- [30] D. Pook, N. Paquin, M. Pepper, and A. Gundlach, J. Phys. C **1**, 3289 (1989).
- [31] R. Landauer, Phil. Mag. **21**, 863 (1970).
- [32] P. Lee, A. Stone, and H. Fukuyama, Phys. Rev. B **35**, 1039 (1987).
- [33] B. J. van Wees *et al.*, Phys. Rev. Lett. **60**, 848 (1988).
- [34] K. Kubo, J. Phys. Soc. Jpn. **12**, 570 (1957).
- [35] K. Kubo, J. Phys. Soc. Jpn. **17**, 975 (1962).
- [36] D. A. Greenwood, Proc. Phys. Soc., London **71**, 585 (1958).
- [37] D. S. Fisher and P. A. Lee, Phys. Rev. B **23**, 6851 (1981).
- [38] Mehta M. L., *Random Matrices and the Statistical Theory of Energy Levels*(New York, Academic Press 1967).
- [39] S. Chakravarty and A. Schmid, Phys. Rep. **140**, 193 (1986).
- [40] Montambaux G., Cours des houches, *Les Houches 1994, Mesoscopic Quantum Physics*, edited by E. Akkermans *et al.* (Elsevier Science Publishers 1995)
- [41] G. Bergmann, Phys. Rep. **107**, 1 (1984).
- [42] G. Bergmann, Sol. State Com. **42**, 815 (1982).
- [43] S. Washburn and R. Webb, Advances in Physics **35**, 375 (1986).
- [44] R. Webb, S. Washburn, C. Umbach, and R. Laibowitz, Phys. Rev. Lett. **54**, 2696 (1985).
- [45] Y. Gefen, Y. Imry, and M. Y. Azbel, Phys. Rev. Lett. **52**, 129 (1984).
- [46] D. Y. Sharvin and Y. V. Sharvin, JETP Lett.(Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **34**, 285 (1981)). **34**, 272 (1981).
- [47] B. L. Altshuler, A. Aronov, and B. Z. Spivak, JETP Lett. (Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **33**94 (1981)) **33**, 101 (1981).
- [48] B. Pannetier, J. Chaussy, R. Rammal, and P. Gandit, Phys. Rev. Lett. **53**, 718 (1984).
- [49] G. Dolan, J.C. Licini, and D. Bishop, Phys. Rev. Lett. **56**, 1493 (1986).
- [50] P. Lee and A. Stone, Phys. Rev. Lett. **55**, 1622 (1985).
- [51] B. Al'tshuler and B. Spivak, JETP Lett.(Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz) **42**, 447 (1986).
- [52] D. Mailly and M. Sanquer, Journal de Physique I France **2**, 357 (1992).
- [53] W. Skocpol *et al.*, Phys. Rev. Lett. **56**, 2865 (1986).
- [54] C. Umbach *et al.*, Phys. Rev. B **30**, 4048 (1984).



- [55] S. Washburn, in *Mesoscopic Phenomena in Solids*, edited by B. Al'tshuler, P. Lee, and R. Webb (Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1991), pp. 1–36.
- [56] K. Ralls and R. Buhrman, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2434 (1988).
- [57] S. Feng, P. Lee, and A. Stone, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1960 (1986).
- [58] Feng S., in *Mesoscopic Phenomena in Solids*, edited by B. Al'tshuler, P. Lee, and R. Webb (Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1991), pp. 107–128.
- [59] L. P. Lévy, G. Dolan, J. Dunsmuir, and H. Bouchiat, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2074 (1990).
- [60] L. Lévy, *Physica B* **169**, 245 (1991).
- [61] V. Chandrasekhar *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 3578 (1991).
- [62] D. Mailly, C. Chapelier, and A. Benoit, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2020 (1993).
- [63] Hund, *Analen den Physik Leipzig* **32**, 102 (1938).
- [64] I. O. Kulik, *ZhETF Pis. Red.* **11**, 407 (1970) [*JETP* ,275 (1970)].
- [65] F. Bloch, *Phys. Rev.* **137**, A787 (1965).
- [66] M. Büttiker, Y. Imry and R. Landauer, *Phys. Rev. Lett.* **96A**, 365 (1983).
- [67] H. Bouchiat and G. Montambaux, *J. de Physique* **50**, 2695 (1989).
- [68] B. L. Altshuler, Y. Gefen, and Y. Imry, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 88 (1991).
- [69] H. F. Cheung, E. K. Riedel, and Y. Gefen, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 587 (1989).
- [70] H.-F. Cheung and E. K. Riedel, *Phys. Rev. B* **40**, 9498 (1989).
- [71] H.-F. Cheung, Y. Gefen, E. K. Riedel and W.-H. Shih, *Phys. Rev. B* **37**, 6050 (1988).
- [72] G. Montambaux, H. Bouchiat, D. Sigeti and R. Friesner, *Phys. Rev. B* **42**, 7647 (1990).
- [73] Y. Gefen and O. Entin-Wohlman, *Ann. Phys.* **206**, 68 (1991).
- [74] V. Ambegaokar and U. Eckern, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 3192 (1991).
- [75] G. Bouzerar, D. Poilblanc and G. Montambaux, *Phys. Rev. B* **49**, 8258 (1994).
- [76] M. Ramin, B. Reulet and H. Bouchiat, *Phys. Rev. B* **51**, 5582 (1995).
- [77] Y. Gefen, D. Braun, and G. Montambaux, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 154 (1994).
- [78] D. Ullmo, K. Richter, and R. Jalabert, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 383 (1995).
- [79] F. Von Oppen, *Phys. Rev. B* **50**, 17151 (1994).
- [80] R. Berkovits, B. L. Altshuler, *Phys. Rev. B* **46**, 12526 (1992).
- [81] R. Berkovits and B. Altshuler, *Europhysics Letters* **19**, 115 (1992).
- [82] Blanter Y., Mirlin, *Phys. Rev. B* **57**, 4566, (1998)
- [83] Devoret M., Cours des Houches, *Les Houches 1994, Mesoscopic Quantum Physics*, edited by E. Akkermans et al. (Elsevier Science Publishers 1995)
- [84] Sivan U., Milliken F. P. and Milkove K., *Europhysics Letters* **25**, 605 (1994).
- [85] M. Büttiker, in *New Techniques and Ideas in Quantum Measurement Theory*, edited by D. N. Greenberger (*Ann. N. Y. Acad. Sci.*, 1986), pp. 194–195.
- [86] U. Sivan and Y. Imry *Phys. Rev. B* **35**, 6074 (1987)
- [87] R. Landauer and M. Büttiker, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 2049 (1985).
- [88] Y. Imry and N. S. Shiren, *Phys. Rev. B* **33**, 7992 (1986).
- [89] Reulet B., *Annales de Physique* **20**, 233 (1995)

- [90] Reulet B. and Bouchiat H., Phys. Rev. B **50**, 2259 (1994).
- [91] Kamenev A., Reulet B., Bouchiat H., and Gefen Y., Europhysics Letters **28**, 391 (1994).
- [92] A. Kamenev and Y. Gefen, Int. J. Theor.Phys.**B9**,751 (1995)
- [93] F. Zhou, B. Spivak, N. Taniguchi and B. L. Altshuler, Phys. Rev. Lett. **77**, 1958 (1996).
- [94] L. Landau et E. Lifshitz, *Electrodynamique des milieux continus*, (Mir publishers 1969)
- [95] L.P. Gor'kov, G.M. Eliashberg, Sov. Phys.-JETP **21**, 940 (1965)
- [96] S. Strässler, M.J. Rice and P.Wyder Phys. Rev.B **6** 2575 (1972), M.J. Rice , W.R. Schneider and S. Strässler Phys. Rev.B **8** 474 (1973)
- [97] N. Trivedi and D. A. Browne, Phys. Rev. B **38** , 9581 (1988).
- [98] K. Frahm, B. Mühlischlegel, R. Németh: Z. Phys.B **78** 91 (1990)
- [99] O.Entin-Wohlman and B.MAhlischelegel, Z.Phys.B **80** 385 (1990)
- [100] W.L.McMillan Phys. Rev.B**24**,2739 (1981)
- [101] Ralph E. W., *Gallium Arsenide Processing Techniques*, (Artech House, Incorporated) (1984)
- [102] Lounasmaa O. V., *Experimental principles and methods below 1K*, (Academic Press, New York), (1974)
- [103] J. Pieper, J. Price, and J. Martinis, Phys. Rev. B **45**, 3857 (1992).
- [104] J. Pieper and J. Price, Phys. Rev. Lett. **72**, 3586 (1994).
- [105] Y. Gefen, D.Braun, and G.Montambaux, Phys. Rev. Lett. **73**, 154 (1994);D.Ullmo, K.Richter, and R.Jalabert, Phys. Rev. Lett. **74**, 383 (1995).
- [106] V. Ambegaokar and U. Eckern, Phys. Rev. Lett. **65**, 381 (1990).
- [107] K.B.Efetov, Phys. Rev. Lett., **76**,1908 (1996)
- [108] Y. Noat, B. Reulet and H. Bouchiat, Europhys. Lett. **36**(9), 701, (1996)
- [109] B. Reulet, H. Bouchiat and D. Mailly, Europhys. Lett. **31**, 305 (1995)
- [110] C. W. J. Beenaker and H. van Houten, Phys. Rev. B **38**, 3232 (1988).
- [111] A. M. Chang, H. U. Baranger, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, *Phys. Rev. Lett.*, **73**, 2111, (1994). Y.Lee, G.Faini and D. Mailly Phys. Rev. B **56**, 9805, (1997)
- [112] Voir e.g. B. L. Altshuler, Y. Gefen and Y. Imry, Phys. Rev. Lett. **66**, 88 (1991) et les références qui s'y trouvent.
- [113] K. B. Efetov, Phys. Rev. Lett. **66**,2794 (1991).
- [114] L. Lévy, H. Reich, L. Pfeiffer and K. West, Physica B **189**, 204, (1993).
- [115] B. Reulet, M. Ramin, H. Bouchiat and D. Mailly, Phys. Rev. Lett. **75**, 124, (1995).
- [116] U. Sivan, Y. Imry, and A. G. Aronov, *Europhys. Lett.*, **28**, 115, (1994); B. L. Altshuler, Y. Gefen, A. Kamenev, and S. L. Levitov, *Phys. Rev. Lett.*, **78**, 2803, (1997). 515 (1981)) **33**, 499 (1981).