

Susceptibilité magnétique orbitale et Conductance AC d'Anneaux mésoscopiques isolés

Bertrand Reulet

Laboratoire de Physique des Solides, bât 510
Université Paris–Sud, 91405 Orsay, France.

27 mai 2004

Résumé

Cette étude s'intéresse à la conductance AC complexe d'un ensemble d'anneaux mésoscopiques isolés. En effet, de tels anneaux sont, en présence d'un champ magnétique statique, le siège d'un courant permanent non dissipatif. Or, connectés à des fils de mesure, ils présentent une résistivité finie, celle du solide macroscopique. Ce paradoxe est abordé à la fois sous ses aspects théoriques et expérimentaux par :

- le calcul numérique de la conductance complexe moyenne d'un anneau désordonné dans la limite du spectre discret, en présence de champ magnétique, de collisions inélastiques, à température finie et pour des statistiques canonique et grand canonique. Il est montré que la magnétoconductance du système isolé est, dans certaines conditions, bien plus grande que celle du système connecté, et qu'elle change de signe avec la température ou la fréquence.
- la mise au point d'un détecteur très sensible adapté : un micro-résonateur bifilaire supraconducteur ($f_0 = 380\text{MHz}$ et $Q = 80000$ à 50mK) fortement couplé aux anneaux. L'étude de l'évolution de sa fréquence de résonance et de son facteur de qualité en fonction de la température et du champ magnétique fournit les parties réelle et imaginaire de la conductance des anneaux. Ses performances ont été optimisées et sa sensibilité testée, et les premières mesures sur des anneaux mésoscopiques isolées ont été effectuées, mettant en évidence des oscillations à la fois sur les parties dissipative et non dissipative de la conductance.

Abstract

This work consist of a study of the complex ac conductance of an ensemble of isolated mesoscopic rings. As a matter of fact, such rings carry, in the presence of a magnetic field, a non dissipative persistent current. However they have a finite resistivity when they are connected to measurement wires, close to the bulk value. This paradox is both theoreticaly and experimentaly addressed by :

- the numerical computation of the average complex conductance of a disordered ring in the discrete spectrum limit, in the presence of magnetic field, inelastic

scattering, at finite temperature and for the grand canonical and the canonical statistical ensembles. The magnetoconductance of the isolated system is shown, in some cases, to be much greater than the connected system's one and to reverse sign with respect to the temperature or the frequency.

- the achievement of a very sensitive, well-suited detector : a superconducting bifilar micro-resonator ($f_0 = 380\text{MHz}$ and $Q = 80000$ at 50mK) strongly coupled to the rings. From the study of the temperature- and magnetic field dependence of his resonance frequency and quality factor one can deduce the real and imaginary part of the conductance. His performances have been optimised and his sensitivity checked, and the first measurement on isolated mesoscopic rings has been achieved, showing oscillations on both the dissipative and non dissipative part of the conductance.

Sommaire

1	La Physique des systèmes mésoscopiques	3
1.1	Caractéristiques	3
1.2	Le transport électronique dans les systèmes mésoscopiques	6
1.3	La thermodynamique des systèmes mésoscopiques	17
2	Etude théorique de la conductance AC des anneaux mésoscopiques	34
2.1	Conductance d'un système quantique	35
2.2	Conductance AC d'anneaux mésoscopiques	38
3	Etude expérimentale sur des anneaux isolés	61
3.1	But de l'expérience et principe de détection	61
3.2	Etude du détecteur nu	72
3.3	L'échantillon	80
3.4	Etude de l'ensemble échantillon-détecteur	88

Introduction

La physique mésoscopique s'intéresse aux propriétés électroniques des systèmes conducteurs (métaux et semi-conducteurs) intermédiaires entre l'atome et le solide, entre le microscopique et le macroscopique. En effet, de par ses dimensions (typiquement micro-niques), le système mésoscopique présente certaines caractéristiques du solide (très grand nombre d'électrons, présence de défauts chimiques et cristallins) et de l'atome (cohérence quantique des électrons sur tout l'échantillon et éventuellement spectre discret).

Cette double parenté est à l'origine de propriétés physiques nouvelles qui n'ont pu être étudiées que récemment, grâce à l'avancée de la technologie de la nanofabrication des échantillons : ainsi il a été montré qu'un anneau métallique non supraconducteur isolé électriquement en présence d'un champ magnétique statique était le siège d'un courant permanent non dissipatif, réminiscent du diamagnétisme de la molécule de benzène. Or ce même anneau connecté à des fils de mesure révèle avoir une résistivité finie : il dissipe de l'énergie par effet Joule comme le fait le métal macroscopique.

C'est ce paradoxe qui fonde l'étude exposée ici : comment dans un même système peuvent coexister à la fois un courant permanent non dissipatif et un courant dissipatif dû à une résistivité finie ? Il s'agit donc de mesurer simultanément sur des anneaux isolés électriquement le courant permanent (en fait sa dérivée, la susceptibilité magnétique orbitale) et la dissipation d'énergie, et de calculer ces quantités, qui sont liées aux parties imaginaire et réelle de la conductance AC complexe moyenne des anneaux.

Le premier chapitre de cette étude introduira l'ensemble des notions nécessaires à la compréhension du problème abordé, couvrant à la fois le transport et la thermodynamique dans les systèmes désordonnés cohérents. Le deuxième chapitre traitera du problème théorique de la conductance AC, où l'on verra que celle-ci peut être fort différente de la conductance traditionnelle d'un système quantique. Enfin le dernier chapitre est consacré à l'étude expérimentale de la conductance AC d'anneaux semi-conducteurs isolés, élaborés dans une hétérojonction $GaAs/GaAlAs$. On y trouvera exposée la méthode développée, qui utilise un micro-résonateur supraconducteur multimode comme détecteur, un bref aperçu de la caractérisation de l'échantillon et les premiers résultats obtenus.

1 La Physique des systèmes mésoscopiques

1.1 Caractéristiques

Dans cette partie introductive on tâchera de définir ce qu'est un système mésoscopique, et de montrer quelles sont les mécanismes fondamentaux qui font son originalité : on verra les rôles respectifs joués par le désordre, la cohérence de phase et le champ magnétique, et comment la conjugaison de ces facteurs peut conduire à des propriétés physiques nouvelles.

1.1.1 Définition

Un système mésoscopique est un échantillon conducteur à une échelle intermédiaire entre la matière à l'état microscopique (atome ou molécule) et macroscopique (le solide courant). Il se distingue de ces deux limites par ses propriétés mais en conserve un certain nombre de caractéristiques :

- Tout d'abord sa taille, typiquement micronique, lui confère un grand nombre d'électrons, ce qui rend pertinentes les notions de température électronique, niveau de Fermi et vitesse de Fermi habituellement utilisées pour les solides ; cependant, sa taille étant finie, le concept de continuum de niveaux d'énergie (ou de bande) peut perdre son sens dans la mesure où les élargissements des niveaux d'énergie individuels (par la température ou des mécanismes inélastiques) peuvent devenir inférieurs à l'écart entre deux niveaux d'énergie successifs du système mésoscopique, qui recouvre ainsi le spectre discret caractéristique de l'échelle microscopique. Il n'est toutefois pas nécessaire d'atteindre cette limite pour observer l'essentiel des propriétés originales de la physique mésoscopique.
- Ensuite sa nature imparfaite donne à chaque échantillon son unicité. En effet, qu'il soit métallique ou semi-conducteur, le système mésoscopique contient de nombreux défauts, qu'ils soient chimiques (impuretés) ou cristallins : les trajectoires électroniques sont désordonnées, le libre parcours moyen des électrons étant inférieur à

la taille caractéristique de l'échantillon. Par conséquent, deux échantillons distincts seront nécessairement microscopiquement différents.

- Enfin et surtout, le système mésoscopique est quantiquement cohérent : les électrons y sont décrits par des fonctions d'onde dont la phase a un sens sur tout l'échantillon. Il en découle l'existence d'interférences, propres à la mécanique ondulatoire, qui jouent un rôle primordial à la fois sur les propriétés thermodynamiques et de transport. Cette cohérence de phase, qui constitue le critère fondamental de l'aspect mésoscopique d'un échantillon, ne sera possible que si la température est suffisamment basse pour ne pas brouiller les interférences électroniques ; c'est pourquoi la physique mésoscopique est nécessairement une physique des basses températures.

1.1.2 Collisions élastiques, inélastiques et cohérence de phase

* *Le désordre*

Le système mésoscopique est un système désordonné : les électrons y subissent des chocs contre les impuretés ou sont diffusés par les parois, les joints de grains, etc. Ces diffusions sont *élastiques* pour les électrons, c'est à dire que ceux-ci conservent leur énergie lors des chocs : le désordre présent dans le réseau cristallin est simplement un potentiel dans lequel les électrons se meuvent, tout comme le réseau lui-même. Les fonctions d'onde électroniques sont affectées par ce potentiel : les états propres ne sont plus des ondes de Bloch, mais le système reste néanmoins hamiltonien. Au désordre n'est donc associée aucune perte de cohérence. On peut cependant remarquer que le désordre brise l'invariance par translation du cristal, ce qui peut entraîner un couplage spin-orbite entre les électrons et le réseau ; ce couplage est en général négligeable, sauf dans le cas d'impuretés chimiques lourdes (comme de l'or, par exemple).

* *Les mécanismes inélastiques*

A l'inverse des précédentes, les collisions *inélastiques* ne conservent pas l'énergie de la particule diffusée. La dynamique de celle-ci n'est donc pas hamiltonienne, et à chaque état propre du système est associé un temps de vie inélastique τ_{in} (que l'on supposera unique pour simplifier). C'est ce mécanisme qui est à l'origine de la perte de cohérence de phase : l'incertitude (la largeur) sur un niveau d'énergie se traduit sur l'état propre correspondant par un brouillage de la phase. En notant τ_ϕ le temps de cohérence de phase, on a donc : $\tau_\phi \simeq \tau_{in}$.

Si les collisions inélastiques introduisent des déphasages dans les fonctions d'onde électroniques, il faut bien voir que ce ne sont pas les seules : les collisions élastiques sont, du point de vue des ondes planes, elles aussi à l'origine de déphasage. En effet, un électron dans un état d'onde plane \vec{k} (qui n'est donc pas un état propre) peut très bien être diffusé dans un état $\vec{k}' \neq \vec{k}$ par une impureté. L'élasticité de la collision implique que les vecteurs \vec{k} et \vec{k}' aient la même norme, mais leurs directions respectives peuvent a priori être quelconques : à cette diffusion est associée un déphasage de la fonction d'onde, que l'on peut calculer connaissant le potentiel diffuseur. Mais ce déphasage est parfaitement déterministe et reproductible. En revanche une collision inélastique est le fruit de l'interaction entre une particule du système considéré et une entité qui n'en fait pas partie (un phonon par exemple). Cette interaction donne lieu à un déphasage qui n'est ni prévisible ni reproductible car il dépend de l'état du "monde extérieur" interagissant

avec la particule considérée : il s’agit donc pour elle d’un déphasage aléatoire. Il est cependant bien évident que l’ensemble constitué de l’union du système électronique et du “monde extérieur” (que l’on appelle souvent un “réservoir”) est, lui, hamiltonien ; mais du point de vue du gaz d’électrons (qui est ce sur quoi l’on effectue les mesures), et en l’absence de la connaissance des autres degrés de libertés, l’effet du réservoir apparaît comme non hamiltonien.

Enfin on pourra distinguer deux types de mécanismes inélastiques, selon que l’on se place du point de vue de l’*ensemble des électrons* ou bien de celui d’*un électron particulier*. En effet, si les mécanismes qui font intervenir des degrés de liberté externes, et qui sont l’interaction avec les phonons et avec des éventuelles impuretés magnétiques, sont inélastiques des deux points de vue, l’interaction électron-électron est quant à elle élastique pour le gaz électronique entier et inélastique pour un électron pris isolément, qui peut transférer une partie de son énergie au reste du gaz.

1.1.3 Identité macroscopique et individualité microscopique

Tout comme pour le solide macroscopique, on peut quantifier le désordre présent dans un système mésoscopique par un paramètre : le libre parcours moyen élastique des électrons l_e (ou bien par le temps qui y est associé, le temps de collision élastique¹ τ_e défini par $l_e = v_F \tau_e$, où v_F désigne la vitesse de Fermi du matériau). Ce paramètre est une mesure globale du désordre présent dans l’échantillon : il dépend de la concentration en défauts et de la “force” du potentiel de désordre (via la section efficace de diffusion). Cependant, puisque la phase de la fonction d’onde électronique est pertinente et qu’elle est affectée par les chocs élastiques, comme on vient de le voir, la suite des collisions subies par un électron lors de son mouvement à travers l’échantillon est importante : ainsi la figure d’interférence de toutes les trajectoires électroniques dépend de la configuration microscopique des défauts. Il peut suffire de déplacer légèrement une impureté pour que les propriétés électroniques du système (comme la conductivité ou la susceptibilité magnétique orbitale) soient notablement affectées. Il s’ensuit que si l’on considère deux échantillons mésoscopiques *macroscopiquement identiques*, c’est-à-dire étant caractérisés par les mêmes grandeurs macroscopiques (même taille, même forme, et même libre parcours moyen), du fait de leur *individualité microscopique* inhérente à leur élaboration par un procédé macroscopique (pulvérisation, lithographie, etc), leurs propriétés électroniques peuvent être notablement différentes. Ceci peut rendre partielle l’information apportée par des mesures effectuées sur un seul échantillon. En revanche, le concept d’identité macroscopique garde, lui, tout son sens : on s’intéresse alors à la loi de distribution de probabilité d’une propriété sur un ensemble d’échantillons macroscopiquement identiques, i.e. à considérer l’ensemble des configurations possibles des défauts pour un désordre global donné ; plus simplement on pourra se préoccuper des premiers moments de cette distribution : les valeurs moyenne et typique. On parle alors de *moyenne sur le désordre*.

1. Le temps de collision élastique est le temps moyen entre deux chocs ; puisqu’une partie seulement de ces chocs donne lieu à un échange d’énergie, on a : $\tau_e \leq \tau_\phi$.

1.1.4 Effet du champ ou du flux magnétique

Si la température par exemple, ou la fréquence et l'amplitude d'un éventuel champ électrique, peuvent avoir une influence intéressante sur les propriétés physiques des systèmes mésoscopiques, il est un paramètre extérieur qui joue naturellement un rôle primordial : il s'agit du champ magnétique, par le biais du potentiel vecteur. En effet l'électron, du fait de sa charge, se couple au potentiel vecteur (dans l'hamiltonien électronique, $\vec{p} \rightarrow \vec{p} + e\vec{A}$ en présence d'un potentiel vecteur, même si $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{0}$) ; ceci a pour effet premier de modifier la phase de sa fonction d'onde. On comprend d'après ce qui précède l'importance qu'il peut avoir sur les interférences quantiques et donc sur toutes les propriétés qui leur sont associées. Il faut bien noter que ce n'est pas le champ magnétique qui est important mais le potentiel vecteur ; la courbure des trajectoires électroniques, due à la force de Lorentz $-e\vec{v} \times \vec{B}$, n'interviendra qu'en champ fort, alors qu'il suffit d'un champ faible pour déphaser les fonctions d'ondes : considérons par exemple un anneau métallique de quelques microns de diamètre transpercé par un flux magnétique de telle sorte qu'il n'y ait pas de champ magnétique dans le métal constituant l'anneau. Les électrons y sont soumis à un potentiel vecteur non nul tandis qu'ils ne voient aucun champ magnétique : la conductivité d'un tel dispositif sera modulée par l'effet d'un flux, la période de l'oscillation étant donnée par le quantum de flux $\Phi_0 = h/e$, ce qui représente un champ magnétique de seulement quelques Gauss.

De manière générale puisque le champ lui même n'est pas pertinent tant qu'il reste faible, on le considèrera explicitement uniquement dans le cas d'un échantillon simplement connexe (un "quantum dot"), tandis que l'on soumettra tous les échantillons multiplement connexes (comme l'anneau) de préférence à un flux magnétique. Du point de vue expérimental, ceci n'est évidemment pas réaliste ; cependant on pourra se ramener à ce cas en champ faible si le rapport d'aspect de l'anneau, défini par le quotient de la surface enserrée par l'anneau par celle du fil le constituant, est suffisamment grand.

On a pu entrevoir ici l'importance que joue le champ magnétique dans la physique mésoscopique. Il agit sur la partie fondamentalement ondulatoire des électrons. Ceci n'est rendu possible que parce que l'électron, en tant que particule chargée, se couple au potentiel vecteur. Ainsi, si l'optique est un domaine de la physique à caractère fondamentalement ondulatoire, elle ne possède pas ce paramètre de contrôle qu'est le champ (ou le flux) magnétique qui ajoute sensiblement à la richesse de la physique mésoscopique (cependant l'onde électromagnétique a cela de commode que l'on peut facilement changer sa longueur d'onde, ce qu'il est souvent malaisé de faire avec un électron).

1.2 Le transport électronique dans les systèmes mésoscopiques

On a senti au paragraphe précédent le rôle que peuvent avoir les interférences quantiques sur les propriétés électroniques, et l'influence importante du champ magnétique sur celles-là. On va s'intéresser ici aux propriétés de transport, notamment à la magnétoconductance. Commenant par décrire le mouvement des électrons dans un milieu désordonné, on partira de la conductivité de Drude exprimée en termes de chemins (formulation de Feynman de la mécanique quantique) pour introduire les effets de rétrodiffusion cohérente et de localisation faible dus à des interférences entre chemins particuliers. On s'attachera

ensuite à décrire les effets du champ magnétique, amenant à la magnétoconductance positive, aux fluctuations de conductance, aux oscillations de la magnétoconductance d'un cylindre et à l'effet Aharonov-Bohm dans un anneau.

1.2.1 Régimes balistique, diffusif et localisé

Oublions un instant l'aspect mésoscopique pour nous préoccuper du mouvement d'un électron dans un potentiel désordonné. Ce problème fait intervenir trois échelles de longueur : la longueur d'onde de Fermi de l'électron λ_F , son libre parcours moyen l_e et la taille typique de l'échantillon, donnée par une longueur L (toujours supposée grande par rapport à λ_F , étant donné que l'on étudie le transport dans un échantillon beaucoup plus gros qu'un simple atome). Un autre paramètre entre en jeu, qui caractérise le mouvement électronique : la dimension de l'espace d . La comparaison de l_e et λ_F caractérise la "force" du désordre, indépendamment de l'échantillon : pour $\lambda_F \ll l_e$ (soit encore $k_F l_e \gg 1$, ou $\hbar/\tau_e \ll E_F$, E_F étant l'énergie de Fermi du matériau) on parle de désordre *faible*, tandis que le désordre sera dit *fort* pour $\lambda_F \geq l_e$. En désordre faible, les collisions élastiques sont bien séparées par des parcours en vol libre : c'est un régime semi-classique où l'électron peut être pensé comme une particule qui rebondit sur des impuretés. En revanche le désordre fort correspond à un régime purement quantique où la fonction d'onde de l'électron ne peut jamais être considérée comme plane, même localement. Passons maintenant en revue les divers cas possibles.

* *Mouvement balistique* : $\lambda_F \ll l_e$, $L \leq l_e$

Lorsque le désordre est faible et que le libre parcours moyen est de l'ordre de la longueur de l'échantillon (ou même plus grand : on parle alors de "quantum point contact"), les électrons peuvent le traverser en subissant fort peu de chocs sur des impuretés ; leur trajectoire est une suite de réflexions sur les bords de l'échantillon, avec de rares diffusions (les collisions sur les bords d'un échantillon peu rugueux à l'échelle de λ_F sont dites *spéculaires* ; elles constituent des réflexions pour la fonction d'onde électronique et n'interviennent pas dans les processus de diffusion, même élastique). L'importance des collisions spéculaires se traduit sur les propriétés électroniques par l'influence de la forme géométrique de l'échantillon (rond, carré, etc). Le régime balistique survient couramment dans des hétérojonctions de semi-conducteurs pour lesquels le libre parcours moyen peut atteindre $10\mu\text{m}$ (tandis que $\lambda_F \approx 300\text{\AA}$).

* *Mouvement diffusif* : $\lambda_F \ll l_e \ll L$

Ce régime correspond à un métal normal, pour lequel $\lambda_F \approx 1\text{\AA}$ et $l_e \approx 100\text{\AA}$, et dont les dimensions peuvent descendre jusqu'au millier d'angströms. L'électron subit un grand nombre de chocs lors de sa traversée de l'échantillon. Son mouvement est brownien, il ressemble à une marche aléatoire entre les impuretés, et peut être décrit comme un mouvement diffusif classique, caractérisé par un coefficient de diffusion $D = \frac{1}{d} v_F l_e$. La durée de la traversée de l'échantillon, appelée *temps de diffusion* τ_D est alors donnée par : $\tau_D = L^2/D$. La distance parcourue par un électron avant de perdre la mémoire de sa phase est appelée *longueur de cohérence de phase*² notée L_ϕ donnée par : $L_\phi = \sqrt{D\tau_\phi}$. Dans ce régime, le détail de la forme de l'échantillon sera sans importance ; seule sa taille interviendra.

2. D'après la définition qu'on en a vue, un système mésoscopique vérifiera : $L < L_\phi$.

* *Localisation forte*

Dans le cas du désordre fort, Anderson [1] a initié l'idée que chaque électron peut être confiné dans une partie de l'échantillon, sans pouvoir traverser celui-ci librement : la fonction d'onde de l'électron décroît exponentiellement à longue distance, avec une longueur caractéristique notée ξ , la *longueur de localisation*. L'électron est alors *localisé* dans une région de taille ξ^d appelée *domaine de localisation*. Ce régime correspond donc à un *isolant*[2]. L'existence d'une valeur critique du désordre, en deçà de laquelle le système est métallique, et au delà de laquelle il devient isolant dépend de la dimension de l'espace : pour $d = 1$ ou $d = 2$, les électrons sont localisés par un désordre arbitrairement faible, tandis qu'à $d = 3$ une transition métal-isolant apparaît pour une valeur finie du désordre [3].

L'ajout de cette nouvelle échelle de longueur ξ vient compliquer notre analyse du mouvement électronique : en effet, ξ vérifie toujours $\xi \geq l_e$ ($\xi = l_e$ pour une chaîne unidimensionnelle d'atomes), et il faut distinguer les cas $\xi < L$ et $\xi > L$. Dans le cas où l'échantillon est grand devant la longueur de localisation ($\xi < L$), les électrons sont bien confinés dans des domaines de localisation (c'est un régime où le transport se fait par "sauts" d'un domaine à l'autre [4, 5]) tandis que dans le cas où celui-ci devient plus grand que l'échantillon ($\xi > L$), l'électron peut atteindre chaque parcelle de son environnement : on retrouve alors le régime diffusif (métallique).

1.2.2 Conductivité classique de Boltzmann et formule de Drude

A partir de maintenant, on va se concentrer sur le régime diffusif, qui est le contexte dans lequel les phénomènes qui nous intéressent peuvent se produire. Afin de décrire qualitativement l'effet de la cohérence de phase sur le transport électronique, on va s'intéresser à la probabilité qu'a un électron situé initialement à un point \vec{r} de l'échantillon d'atteindre un autre point \vec{r}' . Poursuivant une description en terme de chemins, cette probabilité $P(\vec{r}, \vec{r}')$ s'exprime en fonction de tous les chemins joignant les deux points considérés, chaque chemin p étant affecté d'une *amplitude* de probabilité complexe ψ_p [6, 7] :

$$\begin{aligned} P(\vec{r}, \vec{r}') &= \left| \sum_p \psi_p(\vec{r}, \vec{r}') \right|^2 \\ &= \sum_p |\psi_p(\vec{r}, \vec{r}')|^2 + \sum_{p \neq q} \psi_p(\vec{r}, \vec{r}') \psi_q^*(\vec{r}, \vec{r}') \end{aligned} \quad (1)$$

Le premier terme de cette dernière égalité décrit le transport *classique*, pour lequel seule la probabilité $|\psi_p|^2$ associée au chemin p intervient, tandis que sa phase est ignorée ; le second terme décrit les interférences entre chemins différents : c'est sur lui que la cohérence de phase exerce son influence. Mais avant de la calculer, rappelons le résultat classique : dans le cas d'un échantillon macroscopique, les électrons partis de \vec{r} arrivent en \vec{r}' en ayant perdu la mémoire de leur phase ; il s'ensuit que le déphasage relatif de deux chemins différents est aléatoire, ce qui fait disparaître le terme d'interférences :

$$P_{clas}(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_p |\psi_p(\vec{r}, \vec{r}')|^2 \quad (2)$$

A partir de la connaissance de P , on peut calculer la conductivité, mesure plus courante du transport électronique. Grâce à l'expression classique de P qui vient d'être dérivée, on

obtient la conductivité de Drude :

$$\sigma_0 = n_e e^2 \tau_e / m \quad (3)$$

où m et e désignent respectivement la masse effective et la charge de l'électron, et n_e la densité électronique volumique. Plus précisément la conductivité est reliée à la probabilité totale qu'un électron arrivant à la vitesse v_F d'un côté de l'échantillon soit transmis de l'autre côté. Cette probabilité de transmission fait intervenir tous les chemins partant d'un bord de l'échantillon et allant à l'autre bord. L'expression quantique du lien entre la conductance G et la transmission d'un électron à travers l'échantillon est donné par la formule de Landauer [8] :

$$G = \frac{e^2}{h} \text{Tr } tt^+ \quad (4)$$

où e^2/h est le quantum de conductance (il vaut $(26\text{k}\Omega)^{-1}$) et t la matrice de transmission du système, qui peut s'exprimer en fonction de $P(\vec{r}, \vec{r}')$. Appliquons cette formule au cas d'un barreau de longueur L et de surface \mathcal{S} dans le cas où celui-ci est pur et dans le cas où il est désordonné : en l'absence de désordre les électrons suivent des lignes droites parallèles à L . Le nombre de ces droites reliant les deux extrémités du barreau, sachant que deux chemins séparés de moins de λ_F seront indistingables pour l'électron, correspond à environ \mathcal{S}/λ_F^2 , λ_F^2 étant la surface transverse occupée par un électron. Plus exactement ce nombre, appelé *nombre de canaux de conduction* est donné par :

$$M = \frac{k_F^2 \mathcal{S}}{4\pi} \quad (5)$$

La matrice de transmission est tout simplement la matrice identité $M \times M$ puisque les canaux de conduction sont indépendants. On trouve donc que la conductance du barreau pur est *quantifiée* [9], et est donnée par³ :

$$G = M \frac{e^2}{h} \quad (6)$$

En présence de désordre (qui nous ramène dans le régime diffusif) le nombre de canaux participant à la conduction diminue ; il s'appelle *nombre effectif de canaux* et vaut [10, 11] :

$$M_{eff} = M \frac{l_e}{L} \quad (7)$$

qui n'est pas nécessairement entier. La conductance de Drude peut se réécrire ainsi⁴ :

$$G_0 = M_{eff} \frac{e^2}{h} = \sigma_0 \frac{\mathcal{S}}{L} \quad (8)$$

qui n'est pas quantifiée.

1.2.3 Rétrodiffusion cohérente et localisation faible

Etudions maintenant l'effet de la cohérence de phase sur le transport, et calculons pour cela la probabilité qu'un électron a de revenir à l'endroit d'où il est parti : $P(\vec{r}, \vec{r})$. On s'intéresse donc aux chemins fermés. Parmi eux il en est dont l'interférence, rendue possible grâce à la cohérence de phase, va agir sur la conductivité : ce sont les paires formées par les

3. Le lecteur s'étonnera peut-être du fait que la conductance d'un système parfait soit finie alors qu'aucun élément dissipatif n'est présent ? C'est que la dissipation a lieu dans les fils de mesure...

4. Il n'y a pas plus de mécanisme dissipatif que dans le barreau pur. C'est le miracle de la formule de Drude...

boucles parcourues dans un sens et dans l'autre, auxquelles sont attribuées les amplitudes de probabilité notées ψ_p et ψ_{-p} (voir figure 1). L'hamiltonien décrivant l'état des électrons en présence du potentiel de désordre étant invariant par renversement du sens du temps, on a : $\psi_p = \psi_{-p}$. Utilisons cette dernière relation en faisant apparaître explicitement ces paires de chemin dans l'expression de P :

$$\begin{aligned}
P(\vec{r}, \vec{r}) &= \left| \sum \psi_p(\vec{r}, \vec{r}) \right|^2 \\
&= \sum_p |\psi_p|^2 + \sum_p \psi_p \psi_{-p}^* + \sum_{p \neq q, p \neq -q} \psi_p \psi_q^* \\
&= 2 \sum_p |\psi_p|^2 + \sum_{p \neq q, p \neq -q} \psi_p \psi_q^*
\end{aligned} \tag{9}$$

On voit que l'interférence des chemins géométriquement identiques mais parcourus en sens inverse est constructive et apparaît sous la même forme que le terme classique, tandis que le terme d'interférence ne contient plus que des combinaisons de chemins géométriquement différents. Tâchons de calculer la moyenne sur le désordre de $P(\vec{r}, \vec{r})$: les interférences $\psi_p \psi_p^*$ et $\psi_p \psi_{-p}^*$ pour p donné dépendent de la configuration du désordre, mais restent constructives, tandis que les termes d'interférences $\psi_p \psi_q^*$ sont brouillés par le moyennage sur toutes les configurations de défauts. On obtient donc :

$$\langle P(\vec{r}, \vec{r}) \rangle = 2 \langle P_{clas}(\vec{r}, \vec{r}) \rangle \tag{10}$$

C'est la *rétrodifffusion cohérente*. Le moyennage sur le désordre rend l'invariance par translation, de sorte que $\langle P \rangle$ ne dépend pas de \vec{r} ; de plus la probabilité classique P_{clas} est automoyennante, elle ne dépend pas de la configuration d'impuretés. La présence de cohérence de phase s'avère avoir pour conséquence la *localisation* des électrons en augmentant la probabilité qu'ils retournent au même point. Ceci se traduit sur le transport par une correction $\delta\sigma$ à la conductivité de Drude qui est négative. Cette localisation est dite *faible* car l'électron est néanmoins libre de se déplacer dans tout l'échantillon. La dimension de l'espace intervient sur l'importance de cette correction quantique : $\delta\sigma$ est d'autant plus grand en valeur absolue que d est faible.

Il reste ici deux remarques à faire : la première est que l'on n'a pas tenu compte de la finitude de τ_ϕ : parmi les paires de chemins cohérents, seuls ceux parcourus en un temps inférieurs à τ_ϕ contribuent à la localisation faible. Il en résulte que $\delta\sigma$ sera (en valeur absolue) d'autant plus grand que τ_ϕ est grand. De plus il nous faut préciser la définition de la dimension "effective" de l'espace dans le cas d'un échantillon anisotrope défini par deux longueurs L et W vérifiant $W \ll L$ (un fil de longueur L et de section W^{d-1} par exemple) en présence d'une longueur de cohérence de phase L_ϕ finie : d est le nombre de longueurs supérieures à L_ϕ si les autres dimensions de l'échantillon sont soit nulles (i.e. égales à λ_F), soit grandes devant l_e (de sorte que le mouvement soit diffusif) mais inférieures à L_ϕ . Ainsi un fil de longueur $L \gg L_\phi$ et de section W^2 avec $l_e \ll W < L_\phi$, ou un ruban de longueur $L \gg L_\phi$ et de largeur W vérifiant $l_e \ll W < L_\phi$, seront-ils équivalents, du point de vue de la localisation faible, à une chaîne d'atomes strictement 1D. De même une couche mince métallique de surface L^2 , $L \gg \phi$, et d'épaisseur W , $l_e \ll W < L_\phi$ correspondra à $d = 2$. On notera que pour $W \approx l_e$ on sort de ces conditions : on entre alors dans un régime où le mouvement électronique est diffusif dans certaines directions et balistique dans d'autres.

Le second point qu'il reste à éclaircir concerne la réalisation expérimentale de la moyenne sur le désordre : plutôt que d'effectuer un grand nombre de mesures sur des

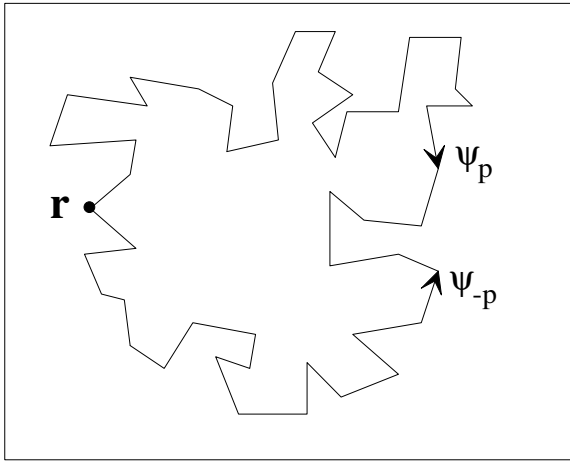


FIG. 1 – La probabilité $P(\vec{r}, \vec{r})$ fait intervenir des chemins partant de \vec{r} et aboutissant au même point. Chacun de ces chemins (fermés) peut être parcouru dans un sens ou dans l'autre, donnant lieu à des interférences. Le fruit de celles-ci, constructives en champ nul, et ce pour chaque chemin, constitue la rétrodiffusion cohérente.

petits échantillons ($L < L_\phi$) on peut utiliser un échantillon non complètement cohérent : il se comporte comme $(L/L_\phi)^d$ échantillons indépendants, de sorte que la moyenne se fait naturellement. Ainsi une expérience de localisation faible peut-elle être effectuée sur un échantillon macroscopique ; on se souviendra néanmoins que l'aspect basse température reste important pour que L_ϕ soit grand, et donc $\delta\sigma$.

1.2.4 Effet du champ magnétique : magnétoconductance

Il convient maintenant d'étudier l'effet du champ magnétique H sur le transport. On se restreindra uniquement à un champ faible, de sorte que l'on puisse négliger son effet sur les trajectoires électroniques et que seul l'effet du potentiel vecteur \vec{A} soit pertinent. Il reste que sa présence déphase les amplitudes de probabilité des chemins considérés plus haut, de sorte qu'il faille remplacer ψ_p par :

$$\psi_p \rightarrow \tilde{\psi}_p = \psi_p \exp i\varphi_p \quad (11)$$

où le déphasage φ_p acquis par le chemin p est relié au champ par :

$$\varphi_p = \frac{e}{\hbar} \oint_{\mathcal{C}_p} \vec{A} \cdot d\vec{l} = 2\pi \frac{\Phi_p}{\Phi_0} \quad (12)$$

où l'intégrale curviligne est faite le long du chemin \mathcal{C}_p fermé, et où Φ_p désigne le flux magnétique enserré par ce chemin, valant : $\Phi_p = H\mathcal{S}_p$, \mathcal{S}_p étant la surface du chemin p . Enfin $\Phi_0 = h/e$ désigne le quantum de flux magnétique. L'effet du champ magnétique laisse maintenant voir son effet principal : il brise l'invariance par renversement du sens du temps. Ceci se traduit par une perte de la propriété de rétrodiffusion cohérente : $\tilde{\psi}_p \neq \tilde{\psi}_{-p}$ car les déphasages associés aux chemins p et $-p$ sont opposés : $\varphi_p = -\varphi_{-p}$. La probabilité P devient alors :

$$P(\vec{r}, \vec{r}, H) = \sum_p |\psi_p|^2 (1 + \exp 2i\varphi_p) + \sum_{p \neq q, p \neq -q} \tilde{\psi}_p \tilde{\psi}_q^* \quad (13)$$

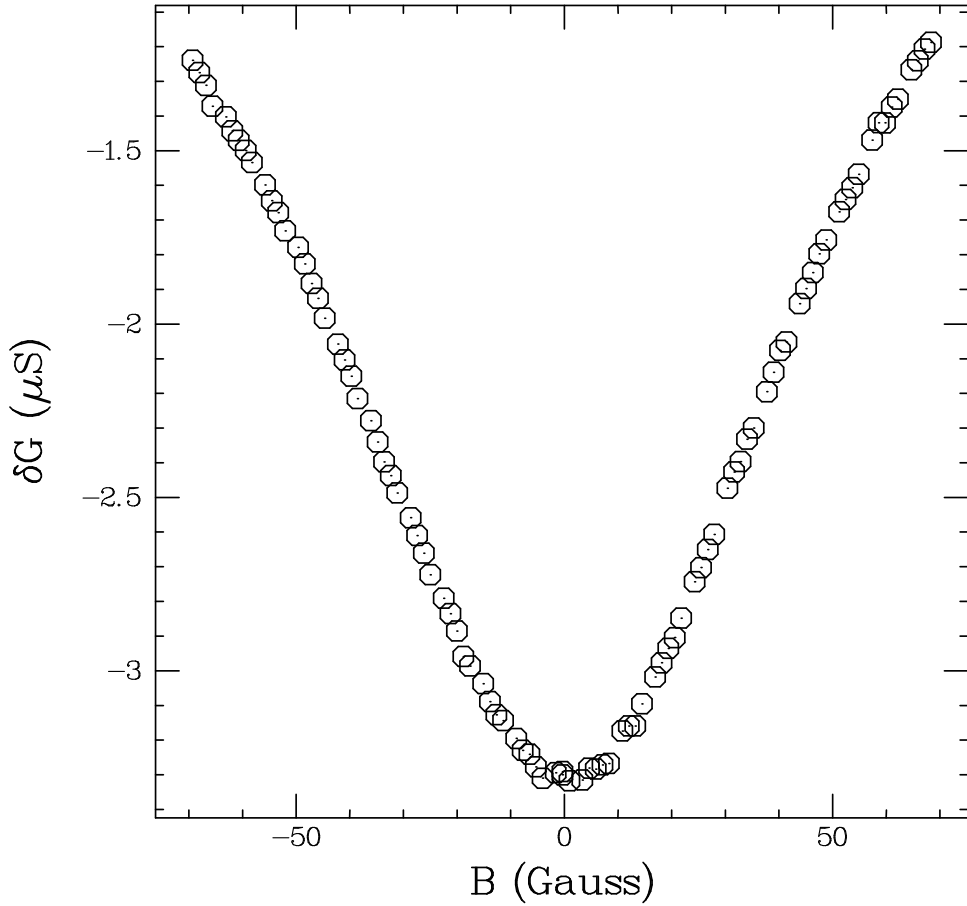


FIG. 2 – Magnétoconductance d'un ensemble de 10 fils en parallèle fabriqués dans une hétérojonction de GaAs/GaAlAs ($L = 100\mu\text{m}$, $W = 0.3\mu\text{m}$, $L_\phi = 6\mu\text{m}$). On observe que la conductance est plus grande en champ non nul. Il ne s'agit cependant pas de fils dans les conditions de la localisation faible traditionnelle, puisqu'ils vérifient $W < l_e < L_\phi$. La magnétoconductance positive est bien-sûr également présente dans ce cas, mais le champ seuil n'est pas donné par l'argument figurant dans le texte.

Les chemins p entourant des surface différentes, ils acquièrent des phases différentes, ce qui fait s'évanouir le terme de localisation faible. On trouve alors $\langle P(H \neq 0) \rangle = P_{clas}$. Par conséquent un petit champ magnétique provoque l'augmentation de la conductivité : il s'agit d'une *magnétoconductance positive* [6] :

$$\frac{\partial^2 \delta\sigma}{\partial H^2} > 0 \quad (14)$$

On trouvera sur la figure 2 une courbe expérimentale de magnétoconductance que nous avons effectuée sur un ensemble de fils. En réalité les premières interférences brouillées sont celles des chemins les plus long ; or ceux-ci n'interviennent que si leur durée est inférieure à τ_ϕ . Par conséquent le champ magnétique n'exercera son influence qu'à partir d'une certaine valeur H_c telle que : $2\varphi_p \approx 2\pi$ avec $\mathcal{S}_p \approx D\tau_\phi$ car le mouvement est diffusif, soit : $H_c = \Phi_0/(2D\tau_\phi) = \Phi_0/(2L_\phi^2)$. Cela revient à dire qu'il faut mettre environ un demi-

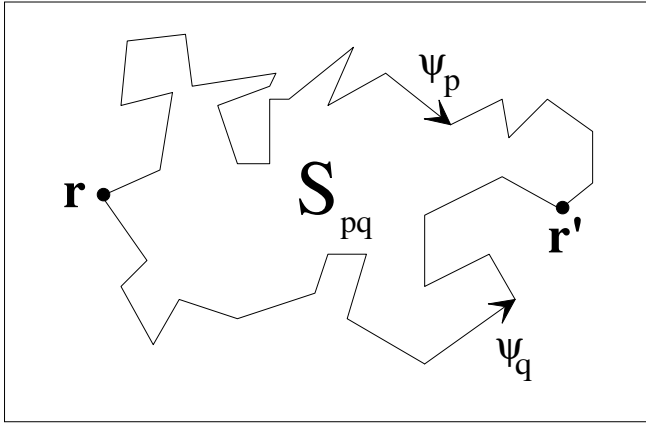


FIG. 3 – On s'intéresse ici à la probabilité qu'a un électron d'aller de \vec{r} à \vec{r}' , et donc aux interférences entre paires de chemins p et q joignant ces deux points. Deux chemins donnés enserrent une surface \mathcal{S}_{pq} , ce qui, en présence d'un champ magnétique H induit un déphasage proportionnel au flux $\Phi_{pq} = H\mathcal{S}_{pq}$.

quantum de flux dans une surface L_ϕ^2 pour commencer à briser la localisation faible (dans le cas d'un fil vérifiant $W < L_\phi < L$, il faut remplacer L_ϕ^2 par WL_ϕ dans les expressions précédentes : il faut alors mettre un demi- Φ_0 dans WL_ϕ).

1.2.5 Fluctuations universelles de conductance. Ergodicité

* *Fluctuations de conductance*

Revenons à l'expression générale de P pour un échantillon diffusif cohérent ($L < L_\phi$), mais en présence de champ magnétique :

$$\begin{aligned} P(\vec{r}, \vec{r}', H) &= \sum_p |\tilde{\psi}_p(\vec{r}, \vec{r}')|^2 + \sum_{p \neq q} \tilde{\psi}_p(\vec{r}, \vec{r}') \tilde{\psi}_q^*(\vec{r}, \vec{r}') \\ &= \sum_p |\psi_p(\vec{r}, \vec{r}')|^2 + \sum_{p \neq q} \psi_p(\vec{r}, \vec{r}') \psi_q^*(\vec{r}, \vec{r}') \exp i(\varphi_p(H) - \varphi_q(H)) \end{aligned} \quad (15)$$

Ici les chemins ne sont plus fermés, les déphasages φ_p restent définis par l'intégrale du potentiel vecteur le long du chemin \mathcal{C}_p mais Φ_p n'est plus défini. En revanche deux chemins p et q différents enserrent une surface \mathcal{S}_{pq} de sorte que $\varphi_p - \varphi_q = 2\pi\Phi_{pq}/\Phi_0$ ait un sens en terme du flux $\Phi_{pq} = H\mathcal{S}_{pq}$ entre les chemins p et q (voir figure 3). Considérons à présent un échantillon mésoscopique ($L < L_\phi$) dont on mesure la magnétoconductance. Cet échantillon étant unique et cohérent, sa conductivité n'est pas égale à la conductivité du même système moyennée sur le désordre, mais a sa valeur propre [12]. Lorsque l'on fait varier le champ magnétique, on change les déphasages entre chemins ce qui a pour effet de moduler la conductance de manière apparemment erratique, mais néanmoins déterministe et reproductible : ce sont les *fluctuations de conductance*[13, 14]. On trouvera une trace expérimentale de ce phénomène sur la figure 6. La courbe $\delta\sigma(H)$ dépend de l'individualité microscopique de l'échantillon, et donc lui est propre : on l'appelle *empreinte magnétique* ("magneto-fingerprint").

* *Universalité et ergodicité*

Puisque l’empreinte magnétique de l’échantillon dépend de la position de chaque défaut, il est bien-sûr impossible de la prévoir. On peut cependant la caractériser statistiquement ; on va pour cela se placer dans le régime diffusif. Tout d’abord la magnétoconductance moyenne correspond, comme on l’a vu au paragraphe précédent, à la localisation faible ; ensuite on peut calculer la variance des fluctuations ; on obtient :

$$\delta G = \left(\langle (G - \langle G \rangle)^2 \rangle \right)^{1/2} = \alpha \frac{e^2}{h} \quad (16)$$

où α est un coefficient de l’ordre de l’unité, qui dépend de la dimension de l’espace. Ces fluctuations ne dépendent pas de la valeur de G , ce pourquoi elles sont dites *universelles* dans la mesure où elles ne dépendent ni du désordre tant que le mouvement des électrons reste diffusif, ni de la taille de l’échantillon tant qu’il reste mésoscopique. Elles se distinguent donc bien de simples fluctuations statistiques qui décroissent lorsque l’on augmente la taille de l’échantillon.

On vient de s’intéresser à la fluctuation de la conductance d’un échantillon donné en fonction du champ magnétique ; on peut aussi s’intéresser à la fluctuation de cette même conductance à champ fixe mais pour plusieurs échantillons macroscopiquement identiques. On voit bien qu’en déplaçant des impuretés on affecte tous les chemins qui passaient par celles-ci, de sorte que le terme d’interférence de $P(\vec{r}, \vec{r}')$ se voit évoluer de manière erratique, tout comme sous l’effet du champ magnétique [15, 16]. On trouve là aussi que la variance de la fluctuation de la conductance d’échantillon à échantillon vaut : $\delta G = e^2/h$.

Enfin il reste un paramètre qu’il est éventuellement possible de faire varier (tout au moins dans les semi-conducteurs) : il s’agit de la position du niveau de Fermi. Afin de voir l’effet de cette variation sur la conductance, explicitons la dépendance en énergie des amplitudes de probabilité ψ_p , et ce dans le cadre de l’approximation semi-classique (valable uniquement pour un désordre faible). On ne retient alors que les chemins classiques avec :

$$\psi_p = |\psi_p| \exp i \left(S_p - \frac{Et_p}{\hbar} \right) \quad (17)$$

où S_p est l’action associée au chemin p , t_p sa durée, et E l’énergie de l’électron qui le suit. Les électrons qui interviennent dans le transport étant essentiellement ceux qui sont au niveau de Fermi, on peut se restreindre à $E = E_F$. Ici aussi l’influence de E_F se traduit sur la phase de l’amplitude de probabilité, et donc on a un brouillage des interférences identique aux deux cas précédemment étudiés. Cette propriété d’équivalence se nomme *ergodicité* : il suffit, pour changer d’échantillon, soit d’en modifier la configuration du désordre, soit de changer le champ magnétique, soit enfin de déplacer le niveau de Fermi [13, 17]. Cette propriété est propre au régime diffusif, qui met en jeu un grand nombre de trajectoires classiques. Elle disparaît dans le régime localisé, où seuls quelques chemins électroniques interviennent dans la conduction.

On sent cependant bien qu’une infime variation de H ou de E_F ne va pas changer l’échantillon du tout au tout, mais qu’il existe un seuil. Il suffit de se souvenir que les premières trajectoires affectées par le champ magnétique sont les plus longues pour voir que celui-ci n’aura d’effet que s’il est supérieur à la valeur H_c déjà évoquée (mais puisqu’ici on a supposé l’échantillon entièrement cohérent, H_c correspond à un Φ_0 dans la surface \mathcal{S} de l’échantillon : $H_c = \Phi_0/\mathcal{S}$). De même l’équation (17) nous montre que les interférences associées au chemin p ne seront brouillées que si $\Delta Et_p/\hbar \approx 2\pi$. Ici aussi ce sont les

chemins longs qui sont affectés les premiers. Pour un échantillon cohérent ($L < L_\phi$), ces chemins ont une durée $\tau_D = D/L^2$ de sorte que la variation de E_F devient sensible si elle dépasse la valeur $E_c = h/\tau_D = hD/L^2$ appelée *énergie de Thouless*. Les quantités H_c et E_c apparaissent comme des grandeurs caractéristiques d'une corrélation : deux échantillons microscopiquement identiques ne seront vraiment décorrélés du point de vue de leurs propriétés électroniques que s'ils sont soumis à des valeurs de champ différent de plus de H_c , ou si leurs potentiels chimiques diffèrent de plus de E_c . Autrement dit, il faut changer H de H_c ou E_F de E_c pour changer d'échantillon. Ou bien encore si l'on veut connaître la conductivité moyenne par exemple, plutôt que de moyenner sur les configurations microscopiques des défauts on peut moyenner sur le champ magnétique sur une plage grande devant H_c ou sur le niveau de Fermi sur une plage grande devant E_c . Quant à la configuration du désordre, il est difficile de donner une grandeur mesurant sa variation ; deux échantillons physiquement différents auront à coup sûr des configurations microscopiques fort différentes, et seront donc absolument décorrélés.

1.2.6 Effet du flux magnétique : oscillations de conductance

On a jusqu'ici considéré le transport dans des échantillons simplement connexes soumis à un champ magnétique. On va maintenant s'intéresser aux géométries doublement connexes : cylindre creux et anneau, transpercés par un flux magnétique Φ .

* *Cas d'un cylindre : oscillations de la conductance moyenne périodiques en $\Phi_0/2$*

Intéressons nous ici à la localisation faible dans un cylindre de hauteur grande devant L_ϕ , de sorte que sa conductance soit égale à sa valeur moyennée sur le désordre, mais de circonférence inférieure à L_ϕ , de sorte des chemins qui font le tour du cylindre soient cohérents (voir figure 4). Trois types de chemins fermés apparaissent naturellement : ceux qui ne font pas le tour du cylindre, notés p_0 , ceux qui en font le tour dans le sens choisi positif pour le flux, et notés p_+ , et ceux qui le font dans l'autre sens, notés p_- . Les premiers n'enserrent pas de flux magnétique, de sorte qu'ils ne dépendent pas de Φ : $\tilde{\psi}_{p_0} = \psi_{p_0}$; on peut les inclure dans la partie classique de la conductance. Les seconds sont affectés par le flux, mais acquièrent tous le même déphasage : $\varphi_{p_+} = \varphi_+ = 2\pi\Phi/\Phi_0$. De même pour les troisièmes : $\varphi_{p_-} = \varphi_- = -2\pi\Phi/\Phi_0$. Ceci étant remarqué, $\langle P \rangle$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle P(\vec{r}, \vec{r}, \Phi) \rangle &= \sum_{p_0} |\psi_{p_0}|^2 + \sum_{p_+} |\psi_{p_+}|^2 \exp 2i\varphi_+ + \sum_{p_-} |\psi_{p_-}|^2 \exp 2i\varphi_- \\ &= P_0 + P_1 \cos 4\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \end{aligned} \quad (18)$$

La magnétoconductance positive se transforme en *oscillations de conductance* décrites par Altshuler, Aronov et Spivak [18] dans le cas d'un échantillon doublement connexe. La périodicité de ces oscillations est de $\Phi_0/2$. On obtient le même phénomène en remplaçant le cylindre par un ensemble d'anneaux connectés, ou par une grille. Si le cylindre a une épaisseur W , tous les chemins passant par une même branche ne seront pas déphasés de la même façon : pour un champ correspondant à un Φ_0 dans $2\pi RW$, ces chemins interfèrent de manière destructive et les oscillations disparaissent. Leur amplitude est donc modulée par la courbe de localisation faible d'un fil de longueur $2\pi R$ et de largeur W [19, 20].

* *Cas d'un anneau unique : oscillations de la conductance périodiques en Φ_0 (Effet Aharonov-Bohm)*

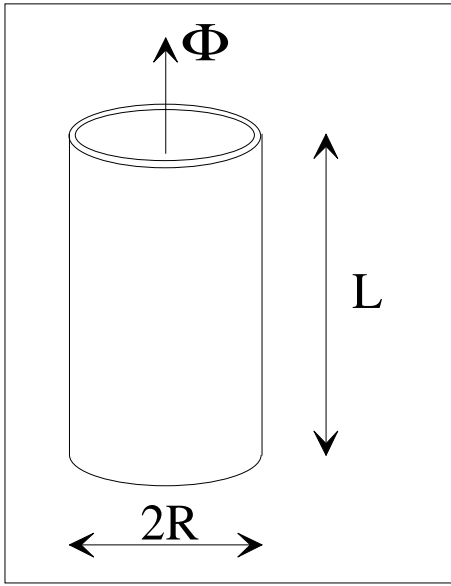


FIG. 4 – (a) Les dimensions transverses du cylindre sont mésoscopiques ($R < L_\phi$) tandis que sa longueur est macroscopique ($L \gg L_\phi$).

Pour finir l'étude du transport dans un système mésoscopique il nous reste à envisager le cas d'un anneau cohérent unique traversé par un flux magnétique Φ . Reprenant l'analyse entamée pour les fluctuations de conductance et la distinction entre chemins faite ci-dessus, on calcule de nouveau $P(\vec{r}, \vec{r}', \Phi)$ où \vec{r} et \vec{r}' sont de part et d'autre de l'échantillon. On notera d'un indice + les chemins allant de \vec{r} à \vec{r}' en passant par la branche supérieure de l'anneau, et d'un indice – ceux passant par la branche inférieure (voir figure 5). Il vient :

$$\begin{aligned}
P(\vec{r}, \vec{r}', \Phi) &= \sum_{p\nu, q\nu, \nu=\pm} \psi_{p\nu}(\vec{r}, \vec{r}') \psi_{q\nu}^*(\vec{r}, \vec{r}') \exp i(\varphi_{p\nu}(\Phi) - \varphi_{q\nu}(\Phi)) \\
&\quad + \sum_{p\nu, q-\nu, \nu=\pm} \psi_{p\nu}(\vec{r}, \vec{r}') \psi_{q-\nu}^*(\vec{r}, \vec{r}') \exp i(\varphi_{p\nu}(\Phi) - \varphi_{q-\nu}(\Phi))
\end{aligned} \tag{19}$$

Deux chemins passant dans la même branche de l'anneau encerrent un flux nul, de sorte que la première somme ne dépend pas du flux ; deux chemins passant par les deux branches opposées acquièrent un déphasage indépendant de ces chemins, d'où :

$$\begin{aligned}
P(\vec{r}, \vec{r}', \Phi) &= \sum_{p\nu, q\nu, \nu=\pm} \psi_{p\nu}(\vec{r}, \vec{r}') \psi_{q\nu}^*(\vec{r}, \vec{r}') \\
&\quad + \sum_{p\nu, q-\nu, \nu=\pm} \psi_{p\nu}(\vec{r}, \vec{r}') \psi_{q-\nu}^*(\vec{r}, \vec{r}') \exp 2i\pi\nu \frac{\Phi}{\Phi_0} \\
&= P'_0 + P'_1 \cos 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}
\end{aligned} \tag{20}$$

Il apparaît que la conductance d'un anneau unique oscille avec la période Φ_0 : c'est l'application de l'*effet Aharonov-Bohm* au solide [14]. Il est le fruit de l'interférence entre les parties de la fonction d'onde d'un électron qui passent dans chacune des branches de l'anneau, et qui sont déphasées l'une par rapport à l'autre d'une quantité $2\pi\Phi/\Phi_0$; c'est le pendant en physique mésoscopique de l'expérience des fentes d'Young en optique (la première expérience montrant l'effet direct du potentiel vecteur sur les électrons est

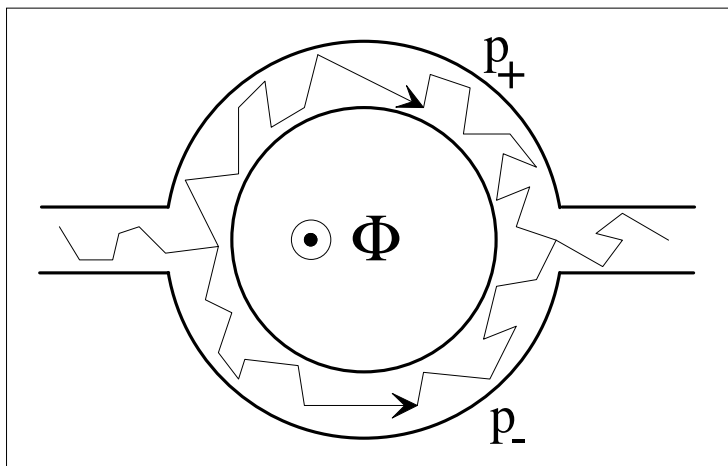


FIG. 5 – On s'intéresse ici aux chemins allant d'un bord à l'autre d'un échantillon annulaire. On appelle p_+ (respectivement p_-) ceux passant par la branche supérieure (respectivement inférieure) de l'anneau. La différence de phase entre ces chemins est proportionnelle au flux Φ traversant l'anneau.

une expérience d'interférence entre deux faisceaux électroniques dans le vide entourant un flux). On notera que cet effet diffère de la rétrodiffusion cohérente, et que les deux peuvent donc coexister (en champ faible). La phase de l'oscillation Aharonov-Bohm dépend de la configuration du désordre, de sorte que les oscillations en Φ_0 ne résistent pas à la moyenne sur le désordre, et seront donc absentes avec un cylindre par exemple [12].

Terminons par quelques mots sur un échantillon réel, de largeur finie et placé dans un champ magnétique : les oscillations Aharonov-Bohm sont présentes mais lentement modulées en amplitude (avec une période caractéristique qui correspond à un champ équivalent à Φ_0 dans la surface du fil) et superposées aux fluctuations de conductance (avec un champ de corrélation correspondant aussi à un Φ_0 dans la surface du fil). On trouvera sur la figure 6 une courbe expérimentale que nous avons obtenue à partir d'un anneau fabriqué dans une hétérojonction *GaAs/GaAlAs*.

1.3 La thermodynamique des systèmes mésoscopiques

Le but de cette dernière section est de passer en revue les propriétés thermodynamiques des systèmes mésoscopiques, et de clore ainsi le chapitre introductif. Plus précisément les propriétés spectrales seront abordées, ainsi que leur application au magnétisme orbital, avec notamment une propriété spectaculaire : la présence de courants permanents circulant le long d'un anneau en présence d'un champ magnétique. Nous nous concentrerons par conséquent surtout sur la forme annulaire, d'abord purement unidimensionnelle, puis ensuite avec une section finie. Nous verrons alors parmi les propriétés rencontrées lesquelles se généralisent à un échantillon de forme arbitraire. On négligera partout les interactions entre électrons ; quant au spin il sera purement et simplement oublié, car son seul effet est de doubler la dégénérescence de chaque état électronique.

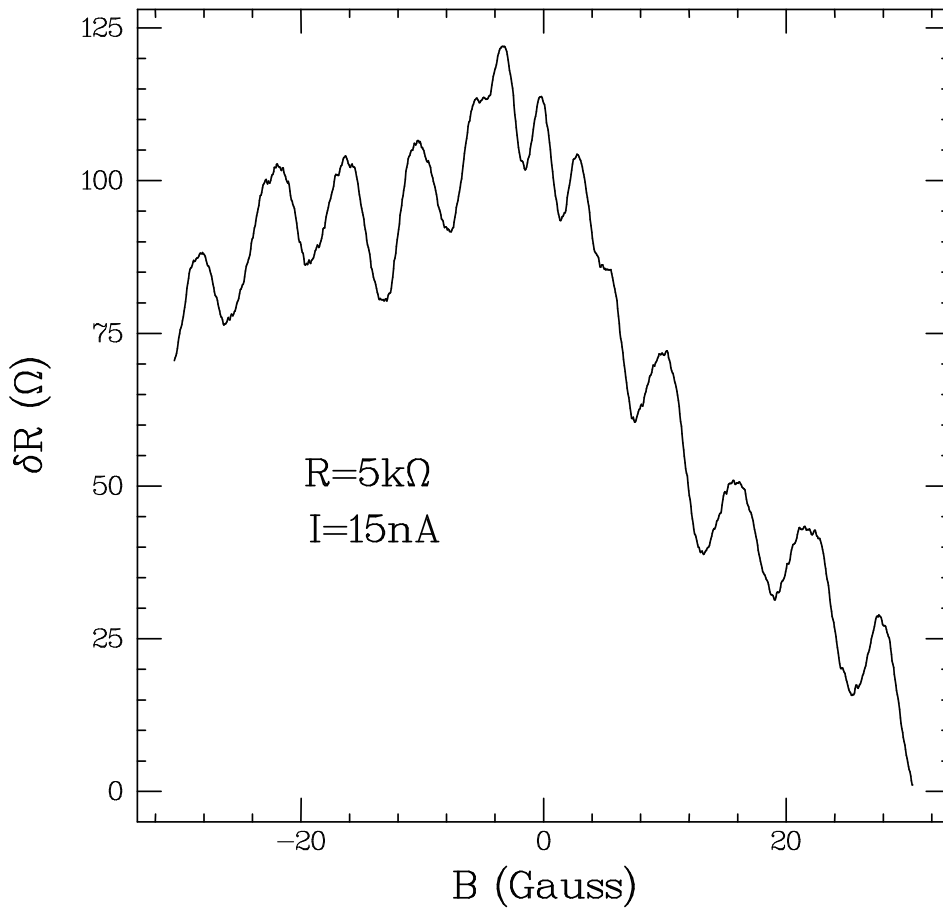


FIG. 6 – Magnéto-résistance d’un anneau mésoscopique ($L \approx L_\phi \approx 6\mu\text{m}$) semi-conducteur (hétérojonction GaAs/GaAlAs). On observe à très bas champ des oscillations en $\Phi_0/2$ (des traces de localisation faible conduisant aux oscillations de conductance) qui s’évanouissent rapidement pour laisser place aux oscillations en Φ_0 (effet Aharonov-Bohm). On observe aussi une variation lente de la conductance (les fluctuations de conductance) et une modulation de l’amplitude des oscillations en Φ_0 qui sont dues à la pénétration du champ magnétique dans les fils de largeur finie ($W = 0.2\mu\text{m}$).

1.3.1 L’anneau unidimensionnel

Le modèle le plus simple que l’on puisse imaginer est de considérer un anneau purement unidimensionnel de circonférence L , traversé par un flux magnétique Φ (voir figure 7) [21, 22, 23, 24, 25, 26]. On néglige l’auto-induction d’une telle boucle, si bien que le flux la traversant est uniquement fixé par le champ extérieur. On suppose de plus que notre système est parfaitement cohérent ($L \ll L_\phi$) de sorte qu’il soit décrit par un hamiltonien (à un électron) donné par :

$$\mathcal{H}(\Phi) = \frac{1}{2m}(\vec{p} + e\vec{A})^2 + V(\vec{r}) \quad (21)$$

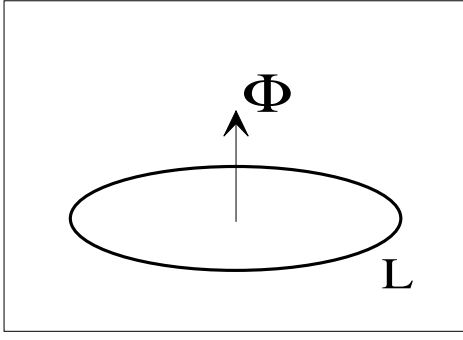


FIG. 7 – Représentation schématique d'un anneau unidimensionnel de longueur L traversé par un flux magnétique Φ .

où $V(\vec{r})$ représente le potentiel créé par le réseau cristallin ainsi que par les impuretés. De plus $\vec{A} = \Phi/L\hat{\theta}$ où $\hat{\theta}$ désigne le vecteur unitaire orthoradial. Posant $x = L\theta/2\pi$, $\mathcal{H}(\Phi)$ devient :

$$\mathcal{H}(\Phi) = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + e \frac{\Phi}{L} \right)^2 + V(x) \quad (22)$$

L'anneau étant topologiquement périodique on doit avoir pour toute valeur de x :

$$V(x+L) = V(x) \quad \text{et} \quad \Psi_{n,\Phi}(x+L) = \Psi_{n,\Phi}(x) \quad (23)$$

où $\Psi_{n,\Phi}(x)$ est la fonction d'onde d'un électron vérifiant l'équation de Schrödinger :

$$\mathcal{H}(\Phi)\Psi_{n,\Phi} = E_n(\Phi)\Psi_{n,\Phi} \quad (24)$$

Ici n est un entier qui indice les valeurs propres de \mathcal{H} (qui a un spectre discret), tandis que Φ est un paramètre extérieur qui varie continuellement. Les éléments propres de \mathcal{H} dépendent de V , qui est arbitraire et dépend de chaque échantillon ; on ne va pas par conséquent essayer de les chercher. En revanche on va se ramener à un problème connu en posant :

$$\Psi_{n,\Phi}(x) = \eta_{n,\Phi}(x) \exp -2i\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \frac{x}{L} \quad (25)$$

où $\eta_{n,\Phi}$ vérifie :

$$- \left[\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \eta_{n,\Phi}(x) = E_n(\Phi) \eta_{n,\Phi}(x) \quad (26)$$

Cet hamiltonien est celui d'un cristal unidimensionnel de périodicité L , mais en l'absence de champ magnétique. Ses valeurs propres sont les mêmes que celles de \mathcal{H} , car le passage de $\Psi_{n,\Phi}$ à $\eta_{n,\Phi}$ est en fait équivalent à un changement de jauge sur l'hamiltonien \mathcal{H} . La condition de périodicité de la fonction $\Psi_{n,\Phi}$ devient pour $\eta_{n,\Phi}$:

$$\eta_{n,\Phi}(x+L) = \eta_{n,\Phi}(x) \exp 2i\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \frac{x}{L} \quad (27)$$

d'où l'on voit que le flux apparaît dans les conditions aux limites imposées à $\eta_{n,\Phi}$ alors qu'il a disparu de l'hamiltonien. De plus cette dernière relation nous donne l'équivalent pour notre problème du vecteur d'onde k de la description du cristal 1D en ondes de Bloch :

$$kL \equiv 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (28)$$

Il y a cependant une différence de taille entre les deux problèmes : alors que pour le solide macroscopique k est un degré de liberté interne au gaz d'électron, qui désigne un état électronique et varie continuellement entre $-k_F$ et $+k_F$ (où k_F est donné par le remplissage), Φ est un paramètre externe (fixé par l'expérimentateur), et c'est n qui désigne un état électronique variant de manière discontinue entre 1 et N , N étant le nombre d'électrons présents dans l'anneau (pour le solide de Bloch, n est l'indice de la bande). L'anneau a donc un *spectre discret qui varie continuellement avec le flux*. On pourra par conséquent suivre l'énergie d'un niveau n en fonction de Φ , donnée par la fonction $E_n(\Phi)$.

Une propriété immédiate et néanmoins fondamentale découle de l'équation (27) : la condition aux limites est périodique en Φ avec la période Φ_0 . Il en résulte que les éléments propres de l'anneau le sont aussi, ce qui a pour conséquence que *toutes* ses propriétés, aussi bien thermodynamiques que de transport, seront périodiques en flux avec la période Φ_0 . De plus, on peut montrer que les niveaux d'énergie de l'anneau sont des fonctions *paires* du flux :

$$E_n(-\Phi) = E_n(\Phi) \quad (29)$$

Aussi les fonctions thermodynamiques (énergie totale, énergie libre, ...) seront-elles des fonctions paires du flux, et leurs dérivées (aimantation, ...) des fonctions impaires.

* *Courant permanent*

Utilisons les résultats connus sur les fonctions de Bloch pour calculer la vitesse d'un électron au niveau E_n :

$$v_n = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_n}{\partial k} \equiv \frac{L}{e} \frac{\partial E_n}{\partial \Phi} \quad (30)$$

Cet électron transporte un courant donné par :

$$i_n(\Phi) = -\frac{ev_n}{L} = -\frac{\partial E_n}{\partial \Phi} \quad (31)$$

Il s'agit de l'opposé de la pente de la courbe $E_n(\Phi)$. Le courant total circulant dans l'anneau à température nulle vaut donc :

$$I(N, \Phi) = -\sum_{n=1}^N \frac{\partial E_n}{\partial \Phi} = -\frac{\partial \mathcal{E}(N, \Phi)}{\partial \Phi} \quad (32)$$

où N désigne le nombre d'électrons présents dans l'anneau et \mathcal{E} son énergie totale.

* *Courant en l'absence de désordre*

Commençons par supposer que l'anneau est exempt de désordre : $V \equiv 0$. Dans ce cas on sait diagonaliser simplement l'hamiltonien, dont les énergies propres valent :

$$E_l(\Phi) = \frac{\hbar^2}{2mL^2} \left(l + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 \quad (33)$$

avec $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Il s'agit d'un faisceau de paraboles. Cette description ne correspond pas à un classement des énergies par ordre croissant, de sorte que l'on préférera se restreindre à $0 \leq \Phi \leq \Phi_0/2$ et utiliser les propriétés de parité et de périodicité du spectre, et indiquer les niveaux de la manière suivante :

$$\begin{aligned} E_{2p}(\Phi) &= \frac{\hbar^2}{2mL^2} \left(p + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 \\ E_{2p+1}(\Phi) &= \frac{\hbar^2}{2mL^2} \left(p + 1 - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 \end{aligned} \quad (34)$$

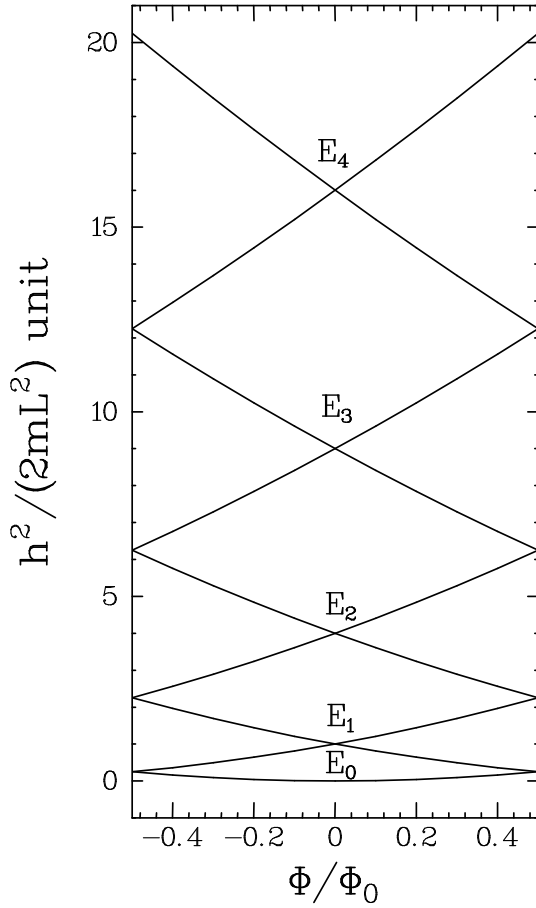


FIG. 8 – Niveaux d'énergie d'un anneau unidimensionnel en l'absence de désordre. Les niveaux d'énergie en fonction du flux sont des branches de paraboles. On remarque les dégénérescences systématiques pour $\Phi = 0$ et $\Phi = \Phi_0/2$.

avec $p = 0, 1, 2, \dots$ et $E_0 \leq E_1 \leq E_2 \dots$ (voir la figure 8). On observe qu'il y a une dégénérescence double des niveaux d'énergie pour $\Phi = 0$ et $\Phi = \Phi_0/2$. Les courants portés par les niveaux $2p$ et $2p + 1$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} i_{2p}(\Phi) &= -\frac{eh}{mL^2}\left(p + \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \leq 0 \\ i_{2p+1}(\Phi) &= \frac{eh}{mL^2}\left(p + 1 - \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \geq 0 \end{aligned} \quad (35)$$

Une propriété importante des courants portés par deux niveaux successifs apparaît : leur signe s'alterne. Calculons maintenant le courant total $I(N, \Phi)$:

$$I(N, \Phi) = \begin{cases} \frac{eh}{mL^2}N\left(\frac{1}{2} - \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \geq 0 & \text{si } N \text{ est pair} \\ -\frac{eh}{mL^2}N\frac{\Phi}{\Phi_0} \leq 0 & \text{si } N \text{ est impair} \end{cases} \quad (36)$$

La propriété précédente a donc une influence directe sur le courant total : le signe de celui-ci dépend de la parité du nombre d'électrons. Plus précisément, si N est pair, l'anneau est

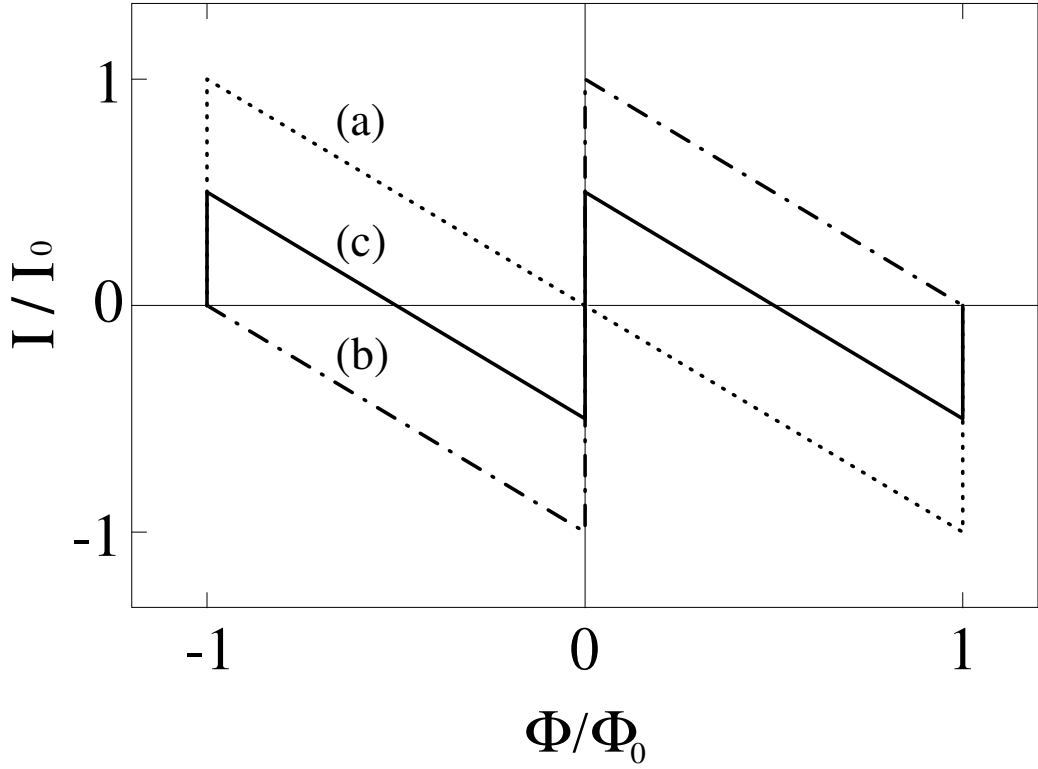


FIG. 9 – Courant total circulant dans un anneau unidimensionnel sans désordre et à température nulle, pour N impair (a), N pair (b), et le courant moyen (c) qui est la demi-somme des précédents. On remarque que le courant moyen a une période qui est la moitié de celle du courant pour un nombre d'électrons donné.

paramagnétique, et si N est impair, il est diamagnétique⁵. L'ordre de grandeur du courant est donné par :

$$I_0 = N \frac{eh}{2mL^2} = \frac{ev_F}{L} \quad (37)$$

où v_F est la vitesse de l'électron dans le dernier état occupé. Bien que tous les électrons participent au courant permanent, tout se passe comme si seul celui au niveau de Fermi contribuait. Introduisons l'écart énergétique entre deux niveaux (dégénérés) successifs au niveau de Fermi à flux nul : $\Delta_{1D} = hv_F/L$. I_0 peut s'écrire : $I_0 = \Delta_{1D}/\Phi_0$. On peut exprimer le courant total de manière plus compacte :

$$I(N, \Phi) = I_0 \left(\nu - 2 \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \quad (38)$$

avec $\nu = 1$ si N est pair, et $\nu = 0$ s'il est impair. On voit sur la figure 9 le courant total en fonction du flux pour ces deux cas. De plus, puisqu'il est une fonction périodique du flux, le courant peut être décomposé en série de Fourier (en sinus, s'agissant d'une fonction

5. Le modèle utilisé ici s'applique aussi aux molécules aromatiques. On retrouve une propriété bien connue des chimistes, en tenant compte du spin électronique pour le remplissage. Ainsi la molécule de benzène, qui correspond pour nous à $N = 3$, est diamagnétique.

impaire) :

$$I(N, \Phi) = \sum_{n=1}^{+\infty} I_n(N) \sin 2\pi n \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (39)$$

où l'harmonique n du courant est donnée par :

$$I_n = \frac{2I_0}{n\pi} (-1)^{nN} \quad (40)$$

Les harmoniques paires et impaires se comportent différemment : si n est pair, I_n est toujours positif, alors que s'il est impair le signe de I_n dépend de la parité de N . Comme k_F est relié à N par $k_FL = N\pi$, on peut encore écrire :

$$I_n = \frac{2I_0}{n\pi} \cos nk_FL \quad (41)$$

* *Courant moyen*

Après avoir calculé le courant présent dans un anneau donné, on peut s'intéresser à sa moyenne sur un ensemble d'anneaux dont le nombre d'électrons est arbitrairement pair ou impair. Dans la mesure où l'intervalle dans lequel on fait varier N est petit par rapport à la valeur moyenne, on peut considérer que le courant porté par chaque anneau est identique en valeur absolue (à un terme en $\Delta N/\langle N \rangle$ près). Il suffit alors de remplacer ν par sa valeur moyenne :

$$\langle I(\Phi) \rangle = I_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \quad (42)$$

Bien que le signe du courant soit alterné, sa valeur moyenne est non nulle. Cependant la périodicité est passée de Φ_0 à $\Phi_0/2$ (voir figure 9). Ceci implique que la valeur moyenne de toutes les harmoniques impaires de I s'annule :

$$\langle I_{2n+1} \rangle = 0 \quad (43)$$

ce qui reflète le fait que, comme on l'a dit, les harmoniques paires et impaires du courant ont déjà des propriétés différentes pour N donné. Le courant moyen est discontinu en $\Phi = 0$, mais pour une valeur du flux strictement positive et arbitrairement faible, il est positif alors qu'il est nul en champ nul (par symétrie) : le courant permanent est donc *paramagnétique en moyenne*.

* *Le potentiel chimique*

Jusqu'ici nous avons considéré des anneaux *isolés* dans lesquels le nombre d'électrons était fixé : ceci correspond à l'ensemble statistique *canonique*. On peut définir le potentiel chimique $\mu(N, T)$ d'un anneau contenant N électrons par :

$$N = \sum_{n=0}^{+\infty} f_C(E_n - \mu) \quad (44)$$

où f_C désigne la fonction de distribution canonique. Cependant, tant que l'on considère des systèmes comprenant un grand nombre d'électrons, on peut remplacer cette fonction par la fonction de distribution de Fermi-Dirac :

$$f(E_n - \mu) = (1 + \exp \beta(E_n - \mu))^{-1} \quad (45)$$

avec $\beta = 1/T$. Ainsi à $T = 0$ le potentiel chimique se trouve-t-il à mi-distance entre le dernier niveau occupé et le premier vacant (étant donné que ces deux niveaux, comme tous les autres, ont la même dégénérescence) :

$$\mu(T = 0) = \frac{E_{N-1} + E_N}{2} \quad (46)$$

Il en résulte que μ (qui est confondu avec E_F à $T = 0$) dépend du flux : $\mu \equiv \mu(N, T, \Phi)$. Une autre possibilité est envisageable, qui correspond à l'ensemble statistique *grand canonique* : μ est fixe (indépendant de Φ) et imposé par un système à la limite thermodynamique (un "réservoir"). Cette situation est celle d'un anneau connecté à un conducteur macroscopique. Alors le nombre d'électrons présents dans l'anneau fluctue et dépend du flux : à chaque fois qu'un niveau d'énergie croise le potentiel chimique, le nombre moyen d'électrons change d'une unité. Ceci se traduit par une discontinuité du courant permanent, qui peut avoir lieu pour une valeur quelconque du flux. L'expression du courant en fonction de Φ est donnée par l'équation (41) (valable aussi bien pour la moyenne canonique que la moyenne grand-canonique) avec $\mu = \hbar^2 k_F^2 / (2m)$.

Considérons maintenant la moyenne du courant permanent circulant dans des anneaux portés à des potentiels chimiques différents : si la plage de variation de μ est grande devant l'écart entre deux niveaux successifs de l'anneau, soit :

$$\delta\mu \gg \Delta \Rightarrow \delta N \gg 1 \Rightarrow \delta k_F \gg L^{-1} \quad (47)$$

alors la valeur moyenne du terme $\cos nk_F L$ présent dans l'équation (41) s'annule, de sorte que le courant permanent est *nul en moyenne* dans l'ensemble grand canonique. On voit donc l'importance que peut jouer l'ensemble statistique sur les propriétés des systèmes mésoscopiques.

* *Effet d'un faible désordre*

Complicons le problème en introduisant un potentiel de désordre suffisamment faible pour être traité en perturbation à l'ordre deux. On s'aperçoit que son seul effet significatif est de lever la dégénérescence des niveaux d'énergie pour $\Phi = p\Phi_0/2$. Un gap apparaît pour ces valeurs du flux, et la pente des niveaux d'énergie s'y annule. Il en résulte que le courant permanent devient une fonction continue qui s'annule pour $\Phi = p\Phi_0/2$. L'amplitude du gap est proportionnelle au carré de la valeur typique du potentiel de désordre.

* *Effet d'un désordre fort*

Si le désordre devient fort, les fonctions d'ondes électroniques ont tendance à se localiser. Ceci survient pour $L \approx \xi$. Les électrons n'étant plus libres de se déplacer, le courant chute rapidement : il décroît comme $\exp(-L/\xi)$.

* *Effet de la température*

A température finie, des niveaux d'énergie supérieure à E_F sont peuplés. Il faut tenir compte de la population de chaque niveau pour calculer le courant :

$$I(N, T, \Phi) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_C(E_n - \mu) i_n = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Phi} \quad (48)$$

où \mathcal{F} désigne l'énergie libre de l'anneau. On a mentionné que les courants portés par deux niveaux successifs sont de signe opposé et du même ordre de grandeur que le courant total. Il s'ensuit que dès que $T \approx \Delta_{1D}$, le courant porté par le premier niveau excité vient s'opposer au courant total à $T = 0$, de sorte que celui-ci décroît rapidement avec la température, avec une échelle caractéristique donnée par Δ_{1D} . On trouve en effet que :

$$\langle I(N, T, \Phi) \rangle \propto T \exp(-T/\Delta_{1D}) \quad (49)$$

pour $T > \Delta$.

* *Effet des collisions inélastiques*

La perte de cohérence de phase a une influence capitale sur le courant permanent dès que $L \approx L_\phi$. Il s'avère en effet qu'il décroît comme $\exp(-L/2L_\phi)$.

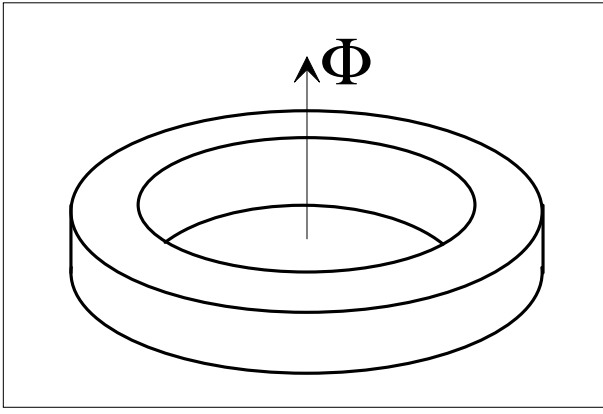


FIG. 10 – Représentation schématique d'un anneau tridimensionnel percé d'un flux magnétique Φ .

** Limitations du modèle*

Tout ce qui précède n'est bien-sûr qu'une caricature de la réalité. Ce modèle des plus simples a néanmoins le mérite de faire émerger un grand nombre d'idées généralisables au cas réaliste tout en ne nécessitant aucun calcul lourd. Cependant, ne rendant pas compte du régime diffusif, il a un certain nombre de lacunes qui font qu'il ne peut pas être confronté quantitativement aux phénomènes mesurés.

1.3.2 L'anneau réel

Nous allons maintenant examiner ce qu'il advient des résultats précédents dans le cas d'un anneau ayant une section finie (et donc un certain nombre de canaux M), et tel que le mouvement des électrons soit diffusif (voir figure 10). Nous n'entrerons pas dans le détail des calculs, mais nous nous contenterons de mentionner les principaux résultats, dont on trouvera la démonstration dans les références [27, 28].

** Description du spectre*

Dans le régime diffusif tridimensionnel, le spectre n'est plus aussi simple qu'il l'est à une dimension : entre les niveaux d'énergie 1D s'intercalent $4M$ autres niveaux du fait de la section finie ; de plus les niveaux n'évoluent plus de manière monotone entre $\Phi = 0$ et $\Phi = \Phi_0/2$, mais leur pente peut changer de signe de manière contingente pour toute valeur du flux, et systématique pour $\Phi = p\Phi_0/2$. On peut donc définir un écart moyen entre niveaux successifs, indépendant du flux et du niveau de Fermi, donné par :

$$\Delta_{3D} \equiv \Delta = \frac{1}{4M} \Delta_{1D} \quad (50)$$

Une propriété importante du spectre d'un système désordonné mérite d'être soulignée ici, qui permet de comprendre qualitativement un certain nombre de phénomènes : il s'agit de la *rigidité spectrale*. Ce terme exprime que la position des niveaux d'énergie n'est pas aléatoire, quand bien même les éléments de matrice de l'hamiltonien le seraient (ce qui relève du cadre de la théorie des matrices aléatoires [30], qui apporte des résultats pertinents pour les systèmes désordonnés, dans lesquels la position des impuretés est aléatoire). En effet deux niveaux consécutifs se "repoussent", de telle sorte que la probabilité $p(s)$ que

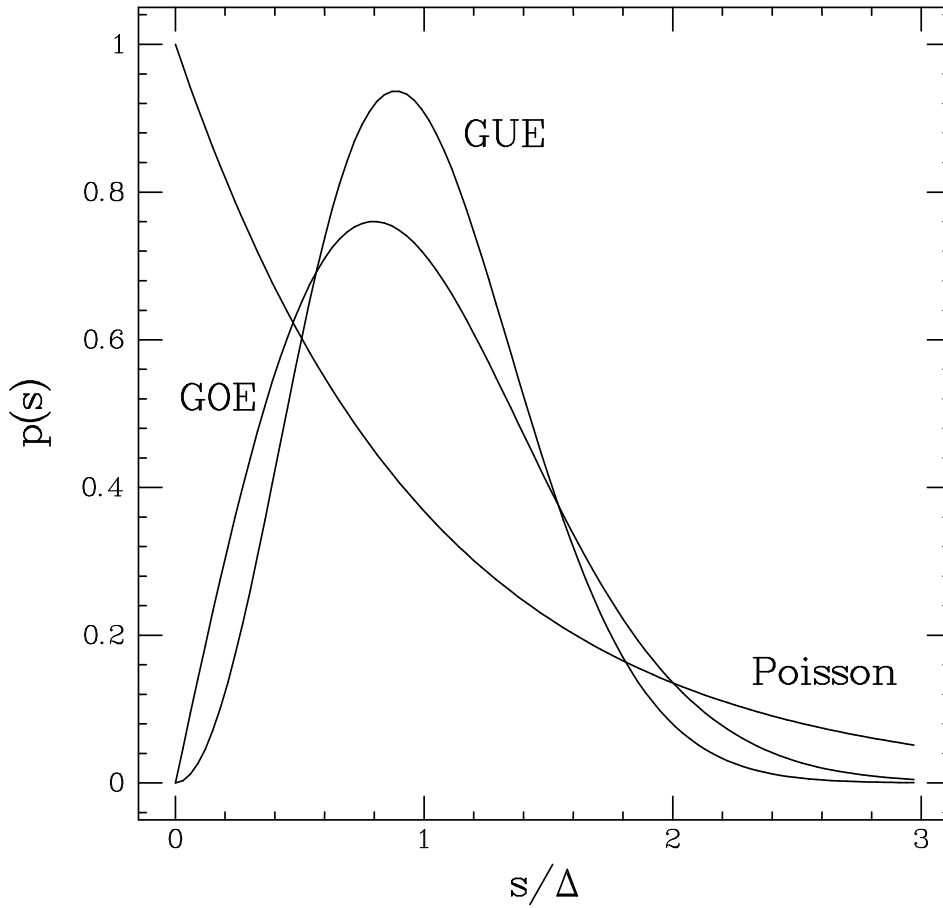


FIG. 11 – Probabilité que deux niveaux adjacents du spectre d'un système désordonné soient distants de s , calculé par la théorie des matrices aléatoires. Le cas du champ magnétique nul (hamiltonien invariant par renversement du sens du temps) correspond à l'ensemble de matrices gaussien orthogonal (GOE), le cas du champ magnétique fini (hamiltonien non invariant par renversement du sens du temps) correspond à l'ensemble de matrices gaussien unitaire (GUE). Rappelons que si les niveaux étaient répartis aléatoirement, $p(s)$ serait décrit par une statistique poissonnienne.

deux niveaux voisins soient distants de s s'annule lorsque s tend vers zéro. Cette rigidité dépend des symétries de l'hamiltonien, et donc comme on l'a vu de la présence ou non d'un champ magnétique. Ainsi en champ non nul la rigidité est-elle plus grande, ce qui se traduit entre autres par le fait que la loi $p(s)$ est plus piquée autour de son maximum situé en $s \approx \Delta$ (voir la figure 11). Ce changement de régime ne se fait bien-sûr pas pour un champ infinitésimal, mais il existe une valeur critique du flux Φ_c qui détermine la brisure ou non de la symétrie par renversement du sens du temps de l'hamiltonien, donnée par [31] :

$$\Phi_c = \frac{1}{\sqrt{M_{eff}}} \Phi_0 \quad (51)$$

Enfin il est un fait capital à 3D qui n'existe pas à 1D : la présence d'une corrélation des

pentés des niveaux successifs. En effet, alors que dans le cas de l'anneau unidimensionnel, on a vu que les pentés de deux niveaux successifs étaient opposées, ces mêmes pentés sont proches l'une de l'autre dans le régime diffusif. L'échelle d'énergie qui caractérise cette corrélation est celle-là même qui caractérisait la corrélation du niveau de Fermi dans le cadre des fluctuations de conductance : E_c . Ceci signifie que pour trouver un niveau qui porte un courant opposé à celui d'un niveau donné, il faut parcourir une différence d'énergie de l'ordre de E_c (voir un exemple de spectre d'un anneau désordonné obtenu par simulation numérique sur la figure 12). On peut exprimer E_c en terme de l'écart moyen entre niveaux successifs⁶ :

$$E_c = \frac{\hbar}{\tau_D} = \frac{\hbar D}{L^2} = M_{eff} \Delta \quad (52)$$

Une conséquence directe de cette propriété est que, si le signe du courant total circulant dans un anneau dépend de N , il ne dépend plus de la parité de N , mais il faut ajouter environ E_c/Δ électrons pour l'inverser.

* *Courant moyen*

L'ensemble statistique est toujours aussi important pour ce qui est du courant moyen : la moyenne grand canonique est nulle alors que la moyenne canonique est finie et paramagnétique. La périodicité est donnée comme à $1D$ par $\Phi_0/2$ mais l'amplitude du courant vaut maintenant environ $\sqrt{M_{eff} I_0/M} \approx \sqrt{M_{eff} \Delta/\Phi_0}$. Sur le plan théorique, il est intéressant de décomposer le courant en série de Fourier :

$$I(N, T, \Phi) = \sum_{n=1}^{+\infty} I_n(N, T) \sin 2\pi n \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (53)$$

La périodicité en $\Phi_0/2$ du courant moyen se traduit par :

$$\langle I_{2n+1} \rangle = 0 \quad (54)$$

ce qui permet d'écrire le courant moyen comme :

$$I_{moy}(T, \Phi) = \langle I(N, T, \Phi) \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle I_{2n}(T) \rangle \sin 4\pi n \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (55)$$

Alors que le courant typique est essentiellement dominé par sa première harmonique, il n'en va pas de même du courant moyen : la théorie diagrammatique prévoit que les harmoniques $\langle I_{2n} \rangle$ sont constantes pour $n < \sqrt{M_{eff}}$ (alors qu'elles décroissent comme $1/n$ à une dimension) [32]. Toutefois le contenu en harmoniques reste controversé : il n'y a pas d'accord entre l'approche diagrammatique (perturbative), l'approche par supersymétries[33, 34] et les calculs numériques[35, 36] (ces deux dernières méthodes étant non perturbatives⁷). Ce désaccord reste pour l'instant un conflit de théoriciens, car les expériences sont encore loin de pourvoir statuer sur de tels détails (l'harmonique $2n$ décroît comme $\exp(-L/2nL_\phi)$ et les échantillons sont tels que $L \approx L_\phi$). Il n'existe à ce jour qu'une seule expérience ayant mesuré le courant permanent moyen dans des anneaux mésoscopiques (effectuée par L. Lévy, J. Dolan, J. Dunsmuir et H. Bouchiat à Bell Labs, qui ont mesuré l'aimantation de 10^7 anneaux de cuivre grâce à un SQUID macroscopique [37]), en accord

6. On remarque qu'avec cette expression la conductance de Drude peut se réécrire : $G_0 = E_c/\Delta$ en unités de e^2/h .

7. Plus exactement, les théories diagrammatiques et par supersymétries sont perturbatives en $(k_F l_e)^{-1}$, mais les échelles d'énergie accessibles aux supersymétries peuvent être de l'ordre de Δ alors que l'approche diagrammatique n'a accès qu'à des énergies grandes devant Δ (i.e. elle ne traite que le spectre continu).

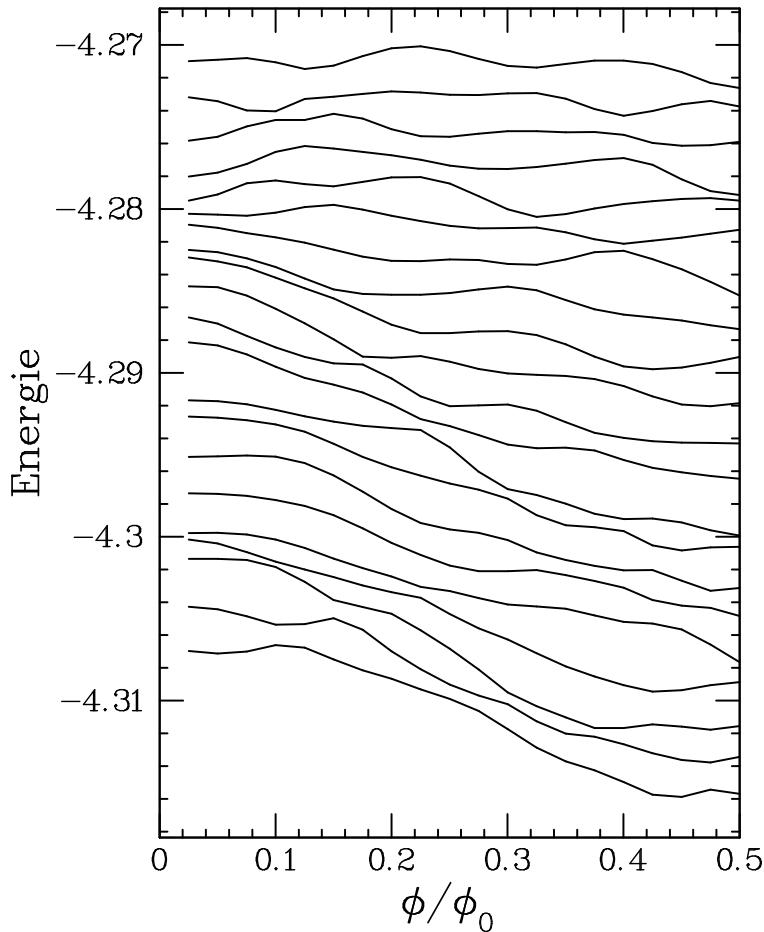


FIG. 12 – *Portion du spectre d'un anneau désordonné obtenu par simulation numérique sur le modèle d'Anderson (taille $64 \times 14 \times 14$ pour $W = 1.4$). On remarque que les pentes de niveaux successifs ne sont pas alternées mais au contraire corrélées sur une certaine tranche d'énergie, donnée par E_c ($E_c \approx 50\Delta$ ici).*

qualitatif avec les résultats théoriques (bien que le paramagnétisme n'ait pas été vérifié), mais un désaccord quantitatif important subsiste : la théorie sous-estime la réalité d'un facteur 30 (la mesure ayant conduit à une valeur du courant moyen de 1.2nA).

* *Courant typique*

Le courant dit *typique* est le moment d'ordre 2 de la distribution du courant permanent en fonction de la configuration du désordre :

$$I_{typ}(T, \Phi) = \sqrt{\langle I^2(N, T, \Phi) \rangle} \quad (56)$$

C'est un objet théoriquement plutôt bien connu. Périodique en $\Phi_0/2$, sa décomposition en harmonique s'écrit :

$$I_{typ}(T, \Phi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle I_n^2(T) \rangle \sin^2 2n\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (57)$$

où l'on a supposé que les harmoniques du courant sont décorréélées, soit :

$$\langle I_p I_q \rangle = 0 \quad \text{si } p \neq q \quad (58)$$

L'ordre de grandeur du courant typique à température nulle est donné par [28] :

$$I_{typ}(\Phi_0/4) = M_{eff} \frac{\Delta}{\Phi_0} \approx \langle I_1^2 \rangle \quad (59)$$

A température nulle, les harmoniques du courant typique décroissent comme : $\langle I_n^2 \rangle \propto n^{-3}$ [38]. Nous donnons une autre démonstration de ce résultat dans le chapitre suivant.

Le courant typique correspond à la valeur typique de la mesure du courant circulant dans un anneau unique, ce qui a été réalisé à deux reprises : la première, due à V. Chandrasekhar, R. A. Webb, M. J. Brady, M. B. Ketchen, W. J. Gallagher et A. Kleinsasser à IBM [39], utilisant un SQUID de neuf microns de diamètre pour mesurer l'aimantation d'un anneau d'or, tandis que pour la seconde les auteurs (D. Mailly au L2M à Bagneux, et C. Chapelier et A. Benoit au CRTBT à Grenoble)[40] ont fabriqué un micro-SQUID (de $3\mu\text{m}$ de diamètre) et un anneau sur la même hétérojonction de *GaAs/GaAlAs*. Alors que la mesure sur l'anneau métallique réaffirme le pessimisme de la théorie, celle sur l'anneau semi-conducteur semble être en accord avec les prédictions *ab initio*.

* *Courant de bande*

A une dimension, le courant i_n porté par le niveau n a toujours le même signe (pour n fixé), il n'est pas distribué. En revanche dans le cas tridimensionnel ceci n'est plus vrai, et il est intéressant de considérer la distribution de i_n . Le premier moment de cette distribution étant nul ($\langle i_n(\Phi) \rangle = 0$), la quantité souvent étudiée en est le second moment, appelé *courant de bande* et défini par :

$$\langle i^2(\Phi) \rangle \equiv \langle i_n^2(\Phi) \rangle \quad (60)$$

où la moyenne peut être effectuée sur le désordre à n fixé (le résultat est alors indépendant de n) ou bien sur n pour un échantillon donné (on remarquera que le courant de bande est uniquement une propriété spectrale, par conséquent n'ayant rien à voir avec la température). L'ordre de grandeur du courant de bande est donné par :

$$\langle i^2(\Phi_0/4) \rangle \approx M_{eff} \left(\frac{\Delta}{\Phi_0} \right)^2 \quad (61)$$

La décomposition en harmonique du courant de bande est elle aussi controversée. Cela est dû au fait que les harmoniques des niveaux d'énergie sont corrélées, ce dont la théorie diagrammatique ne peut rendre compte[42, 41] En omettant ces corrélations on peut relier directement le courant de bande au courant permanent par :

$$\left\langle \frac{\partial I(T=0, \Phi)}{\partial \Phi} \right\rangle = \frac{2}{\Delta} \langle i^2 \rangle + \text{constante} \quad (62)$$

Il n'y a en revanche pas de relation simple entre les courants de bande et typique. Mentionnons simplement que la première harmonique de $\sqrt{\langle i^2 \rangle}$ vaut $\sqrt{\langle I_1^2 \rangle} / M_{eff} = \Delta / \Phi_0$, ce qui traduit le fait que M_{eff} niveaux successifs ont des pentes corrélées.

Bien qu'il soit une quantité purement spectrale, le courant de bande est en principe mesurable par son lien avec la conductance AC, que nous établirons au chapitre 2.

* *Influences de L_ϕ et de T*

Alors que la perte de cohérence de phase a le même effet qu'à une dimension, il n'en est pas de même de la température. Reprenant l'argument qualitatif développé pour un anneau 1D parfait, on comprend bien que dans le cas réaliste ce soit E_c qui soit l'échelle

caractéristique de la décroissance du courant. La forme exacte de cette décroissance est controversée : la théorie diagrammatique prévoit une variation comme $T^2 \exp(-L/L_T)$ pour $T > E_c$ où L_T est la longueur thermique définie par

$$L_T = \sqrt{\frac{\hbar D}{T}} \quad (63)$$

i.e. comme $T^2 \exp(-\sqrt{T/E_c})$ tandis que les calculs numériques que nous avons effectués laissent clairement voir une décroissance exponentielle simple $\exp(-T/E_c)$ [42]

1.3.3 Echantillon de forme quelconque : magnétisme orbital

On va ici encore généraliser les propriétés de l’anneau diffusif en se penchant sur le cas du “quantum dot”. Tout d’abord toutes les propriétés dues à la périodicité du spectre disparaissent. Plutôt que de parler de courant permanent, on s’intéresse au moment magnétique \mathcal{M} de l’échantillon en présence d’un champ magnétique H , donné par :

$$\mathcal{M} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial H} \quad (64)$$

où \mathcal{F} désigne son énergie libre⁸. On se contente d’étudier le magnétisme en champ faible ($g\mu_B H \ll \sup(T, \Delta)$, g étant le facteur de Landé des électrons) de sorte que l’on puisse oublier les effets de spin : on parle de *magnétisme orbital* [43, 44, 45]. La rigidité spectrale et la corrélation sur une échelle E_c persistent ; la moyenne grand canonique du moment orbital est nulle tandis que sa moyenne canonique est finie et, là aussi, paramagnétique. Il existe une seule preuve expérimentale de ce phénomène, donnée par L. Lévy [46] qui a mesuré la susceptibilité en bas champ d’un ensemble de carrés élaborés dans une hétérojonction *GaAs/GaAlAs*. Une explication simple de ce phénomène est donnée simultanément par plusieurs auteurs [32, 47, 48], qui consiste à relier les propriétés magnétiques à la rigidité spectrale par le biais de relations thermodynamiques très générales. En voici une démonstration succincte⁹ : elle consiste à exprimer le moment magnétique en fonction du grand potentiel $\Omega(\mu, H)$ (il s’agit donc d’une approche grand canonique) en tenant compte du fait que le potentiel chimique du système considéré dépend du flux, de sorte que le nombre d’électrons soit constant (i.e. de sorte que la statistique soit canonique). On a en effet :

$$\mathcal{M}_C = -\left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial H} \right|_N (N, H) = -\left. \frac{\partial \Omega}{\partial H} \right|_\mu (\mu(H), H) \quad (65)$$

où le potentiel chimique de l’échantillon s’écrit :

$$\mu(H) = \langle \mu \rangle + \delta\mu(H) \quad (66)$$

Le potentiel chimique moyenné sur le désordre $\langle \mu \rangle$ ne dépend plus du champ. La quantité $\langle (\delta\mu)^2 \rangle$ mesure la fluctuation du potentiel chimique d’un échantillon à l’autre. Pour relier

8. Pour l’anneau la formule équivalente est obtenue avec $\mathcal{M} = IS$ et $\Phi = HS$, S étant la surface enserrée.

9. Les auteurs en question ont considéré la géométrie annulaire, calculant le courant permanent ; la démonstration invoquée ne faisant en aucun cas intervenir la géométrie ni le fait que l’échantillon soit soumis à un flux plutôt qu’un champ, sa généralisation en est immédiate.

le grand potentiel à la statistique spectrale (et donc aux fluctuations), il suffit d'effectuer un développement limité de Ω autour de la valeur $\langle\mu\rangle$:

$$\Omega(\mu(H), H) \approx \Omega(\langle\mu\rangle, H) + \delta\mu(H) \left. \frac{\partial\Omega}{\partial\mu} \right|_H (\langle\mu\rangle, H) \quad (67)$$

Rappelons que l'on a :

$$\left. \frac{\partial\Omega}{\partial\mu} \right|_H (\mu, H) = -N(\mu, H) \quad (68)$$

où $N(\mu, H)$ désigne le nombre d'électrons présent dans notre échantillon si celui-ci a un potentiel chimique μ quelconque et est soumis à un champ H . En réalité ce nombre est fixé (appelons le N_0), et la dépendance du potentiel chimique $\mu(H)$ en fonction de H est déterminée par :

$$N(\mu(H), H) = N_0 = N(\langle\mu\rangle, H) + \delta N(H) \quad (69)$$

où la quantité $\langle(\delta N)^2\rangle$ mesure la fluctuation du nombre de particules d'un échantillon à l'autre. On établit aisément une relation entre δN et $\delta\mu$ en développant $N(\mu, H)$ comme on l'a fait pour Ω :

$$N(\mu(H), H) \approx N(\langle\mu\rangle, H) + \delta\mu(H) \left. \frac{\partial N}{\partial\mu} \right|_H (\langle\mu\rangle, H) \quad (70)$$

On peut maintenant revenir à l'aimantation moyenne qui s'écrit :

$$\langle\mathcal{M}_C\rangle = -\left\langle \left. \frac{\partial\Omega}{\partial H} \right|_{\mu} (\langle\mu\rangle, H) \right\rangle + \frac{\partial}{\partial H} \langle \delta\mu(H) N(\langle\mu\rangle, H) \rangle \quad (71)$$

Le premier terme de la partie droite de cette égalité correspond à la valeur grand canonique du moment magnétique, et est donc exponentiellement faible ; le second peut se réécrire, compte tenu du fait que $N(\mu(H), H) = N_0$ est indépendant du champ magnétique :

$$\langle\mathcal{M}_C\rangle = -\frac{\partial}{\partial H} \left\langle ((\delta N(\langle\mu\rangle, H))^2 \left(\left. \frac{\partial N}{\partial\mu} \right|_H (\langle\mu\rangle, H) \right)^{-1}) \right\rangle \quad (72)$$

En supposant que les deux termes impliqués dans cette moyenne sont décorélés et que :

$$\left\langle \left(\left. \frac{\partial N}{\partial\mu} \right|_H (\langle\mu\rangle, H) \right)^{-1} \right\rangle \approx \Delta \quad (73)$$

l'expression canonique du moment magnétique devient :

$$\langle\mathcal{M}_C\rangle = -\frac{\Delta}{2} \frac{\partial}{\partial H} \langle (\delta N(\langle\mu\rangle, H))^2 \rangle \quad (74)$$

La fluctuation $(\delta N)^2$ du nombre d'électrons d'un échantillon à l'autre à potentiel chimique fixé est bien-sûr reliée à la rigidité spectrale : elle est plus importante en champ fini qu'en champ nul, puisque le spectre est plus rigide en champ fini qu'en champ nul (voir la figure 13). On a donc :

$$\langle (\delta N(H \neq 0))^2 \rangle < \langle (\delta N(H = 0))^2 \rangle \quad (75)$$

On en déduit que l'aimantation est positive en champ positif alors qu'elle est nulle en champ nul (par parité) : il s'agit bien de paramagnétisme. Ainsi la susceptibilité d'un ensemble d'échantillons doit-elle changer de signe en fonction de la température : elle est diamagnétique à haute température (diamagnétisme de Landau) et paramagnétique à basse température, comme on vient de le voir. Il n'y a pas pour l'instant de vérification expérimentale de cet effet.

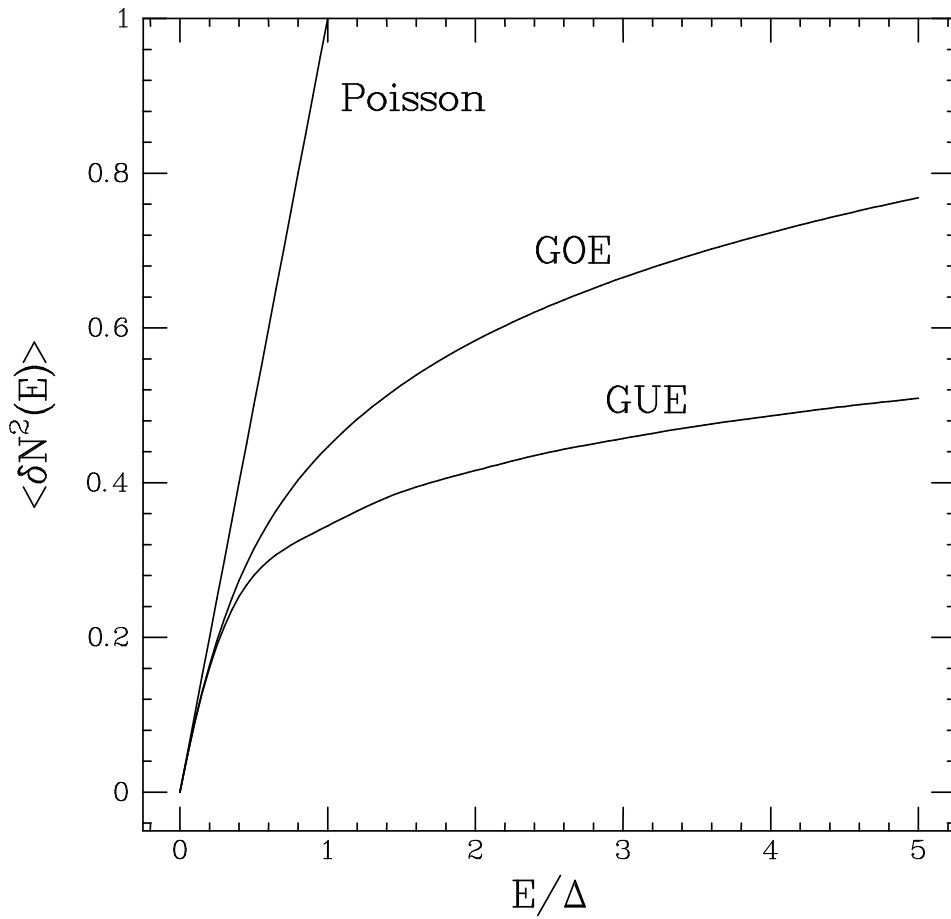


FIG. 13 – *Fluctuations du nombre de niveaux compris dans une tranche d'énergie E , en champ nul (GOE) et en champ fini (GUE). Ce nombre est linéaire en E dans le cas de la statistique poissonnienne. La rigidité spectrale s'exprime par le fait que $\langle \delta N^2(E) \rangle$ croît beaucoup plus lentement pour un système désordonné que pour un ensemble de niveaux aléatoirement répartis. Cette rigidité est plus grande en champ fini qu'en champ nul.*

1.3.4 Effet des interactions électron-électron

Nous n'avons pour l'instant pas tenu compte des interactions entre électrons. Il a cependant été montré que ces dernières pourraient être aussi à l'origine de la présence d'un courant permanent moyen non nul. Une explication simple, mais sans doute partielle est donnée dans la référence [47] : la répulsion entre électrons diminue notablement la fluctuation du nombre de particules dans un échantillon, de sorte que même si un anneau est connecté à un réservoir d'électrons, sa charge peut rester fixe. La limite extrême de ce raisonnement est de considérer que chaque ion du matériau est localement totalement écranté par une densité électronique qui vient compenser la charge ionique. Le nombre d'électrons n'est plus alors fixé globalement dans tout l'anneau mais localement sur chaque site [47, 49].

L'amplitude du courant moyen en présence d'interactions a été calculé diagramma-

TAB. 1 – *Décomposition en harmoniques des niveaux d'énergie et des courants de bande, moyen et typique, pour les diverses approches théoriques. Ces décompositions ne sont valables que tant que le rang harmonique p est inférieur à $M_{eff}^{1/2}$. Au delà la décroissance est exponentielle.*

Théorie	$\langle E_p^2 \rangle$	$\langle i_p^2 \rangle$	$\langle I_p \rangle$	$\langle I_p^2 \rangle$
Perturbation	p^{-1}	p	cste	p^{-3}
Numérique	p^{-1}	cste	p^{-1} ?	?
Supersym. Dyn.	—	—	p^{-1}	—
Supersym. Thermo.	—	—	cste	—
Interactions	—	—	p^{-2}	p^{-1}

tiquement [50, 51, 52] et par des méthodes semi-classiques [49]. Les références [50] et [49] considèrent une interaction écrantée tandis que la référence [51] s'appuie sur l'aspect longue portée de l'interaction coulombienne. Les deux premières sont en accord et conduisent à un courant moyen plus grand que le courant sans interaction mais insuffisant pour expliquer l'expérience de la référence [37] ; la dernière est en accord avec l'expérience mais est très controversée. Le courant permanent en présence d'interactions a été calculé numériquement par diagonalisation exacte d'un anneau unidimensionnel de petite taille [53], ainsi qu'en perturbation au premier ordre à 1D [54, 55] et 3D[55]. Il semble que le signe de l'effet des interactions dépendent de la portée de celles-ci ainsi que de la dimension de l'espace considéré (1D ou 3D). Pour ce qui est du courant typique, son calcul a été abordé dans les références [56] (où il est prédit qu'il est indépendant du désordre) et [57], mais est lui-aussi très controversé.

1.3.5 Comparaison des diverses approches théoriques

Jusqu'ici ont été présentées, pour l'anneau tridimensionnel désordonné, essentiellement les résultats de l'approche perturbative diagrammatique. Cependant d'autres approches ont donné des résultats : l'utilisation de supersymétries pour le calcul du courant permanent dans une approche dynamique [33] et thermodynamique [34], et l'utilisation de diagonalisation numérique de l'hamiltonien. Ces techniques relèvent du modèle d'électrons indépendants ; on peut également les confronter aux calculs (diagrammatiques) tenant compte de l'interaction entre électrons. On trouvera sur la table 1 les différentes prédictions concernant le contenu en harmoniques des niveaux d'énergie, des courants de bande, moyen et typique, tandis que la table 2 résume les divers résultats concernant l'amplitude de la première harmonique non nulle et l'amplitude totale des courants de bande, moyen et typiques.

TAB. 2 – *Amplitudes des premières harmoniques et amplitude totale des courants de bande, moyen et typique, pour les diverses approches théoriques. L'unité de courant est Δ/Φ_0 ; seules les dépendances en M ou M_{eff} sont données, alors que les préfacteurs sont oubliés.*

Théorie	$\langle i_1^2 \rangle$	$\langle i^2 \rangle$	$\langle I_2 \rangle$	$\langle I \rangle$	$\langle I_1^2 \rangle \approx \langle I_2 \rangle$
Perturbation	1	M_{eff}	1	$M_{eff}^{1/2}$	M_{eff}^2
Numérique	1 ?	M_{eff}	$M_{eff}^{1/2}$?	$M_{eff}^{1/2}$?	M_{eff}^2
Supersym. Dyn.	—	—	$M_{eff}^{1/2}$	$M_{eff}^{1/2}$	—
Supersym. Thermo.	—	—	1	$M_{eff}^{1/2}$	—
Interactions	—	—	M_{eff}	M_{eff}	M_{eff}^2 ou M^2

2 Etude théorique de la conductance AC des anneaux mésoscopiques

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à la conductance AC moyenne d'un ensemble d'anneaux mésoscopiques, et principalement au le cas où ces anneaux sont isolés électriquement. Nous savons en effet qu'ils sont alors le siège d'un courant permanent qui y circule sans dissipation d'énergie. Pourtant, reliés à une source de courant, ces mêmes anneaux ont une conductance finie donnée, aux corrections de localisation faible près, par la formule de Drude. Comme on l'a déjà fait remarquer, cette formule ne fait intervenir que le temps de collision élastique, alors que la dissipation d'énergie par effet Joule qui advient lorsqu'un courant parcourt un échantillon est nécessairement due aux mécanismes inélastiques. Ceux-ci n'apparaissent pas explicitement dans la mesure où l'on s'intéresse à un système qui est soit lui-même macroscopique (et qui constitue alors un réservoir thermodynamique) soit qui est relié à un tel réservoir par des fils de mesure. Dans ce dernier cas la conductance mesurée n'est par conséquent pas une quantité intrinsèque de l'échantillon étudié.

Un tel couplage fort avec l'environnement peut être évité en étudiant la réponse d'un anneau isolé à un flux qui dépend du temps, lequel induit un champ électrique orthoradial. Dans ce cas la conductance de l'anneau peut être fort différente de celle mesurée avec des fils de connexion, d'une part car on s'attend à ce que le temps de collision inélastique apparaisse explicitement, d'autre part car un courant non dissipatif est déjà présent.

Nous commencerons par rappeler le calcul de la conductance dans un système macroscopique (par la formule de Kubo) et son extension dans le cas d'un système mésoscopique connecté à des fils parfaits. Ensuite nous rappellerons les principaux travaux ayant traité de la conductance d'anneaux mésoscopiques, où nous verrons comment se situe notre approche et quelle est son originalité. Après avoir présenté le modèle qui constitue le cadre de notre analyse, nous donnerons les résultats obtenus, fruits d'une étude essentiellement numérique, appuyé par des arguments analytiques. Cette étude est justifiée dans le cas d'un échantillon à spectre discret ; nous indiquerons ce qu'il advient d'elle dans le cas du spectre continu.

2.1 Conductance d'un système quantique

Dans tout le chapitre on s'intéressera à la conductance linéaire d'un système désordonné dans le régime diffusif. On négligera partout l'influence éventuelle des interactions entre électrons. Le spin électronique sera également oublié.

2.1.1 Conductance d'un système macroscopique : Formule de Kubo

Considérons un barreau conducteur macroscopique, tel que l'on puisse le traiter en statistique grand canonique (i.e. connecté à des fils de mesure). Un tel système en l'absence de toute perturbation extérieure (et en l'absence de mécanismes inélastiques) est régi par l'hamiltonien (à un électron) suivant :

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2m} \vec{P}^2 + V(\vec{r}) \quad (76)$$

où $V(\vec{r})$ représente le potentiel créé par le réseau cristallin ainsi que par les impuretés. Afin de calculer la conductance AC de ce système on le soumet à un champ électrique \vec{E} uniforme infinitésimal oscillant à la pulsation ω . L'hamiltonien du gaz d'électrons devient :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (\vec{P} + e\vec{A})^2 + V(\vec{r}) \quad (77)$$

avec

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -i(\omega + is)\vec{A} \quad (78)$$

où s désigne l'inverse du temps de branchement adiabatique du champ. On l'omettra dans les formules intermédiaires du calcul. L'effet de ce champ électrique est traité en perturbation à l'ordre 1 en A de sorte que l'on peut écrire :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \delta\mathcal{H} \quad (79)$$

avec¹⁰

$$\delta\mathcal{H} = \frac{e}{2m} (\vec{P} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{P}) \quad (80)$$

La matrice densité ρ du système évolue au cours du temps eu égard à l'équation de Liouville (dans toute la suite on prendra $\hbar = 1$) :

$$i\frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho] \quad (81)$$

La perturbation sinusoïdale du champ ne déplace que peu le système de son équilibre thermodynamique, de sorte que :

$$\rho(t) = \rho_0 + \delta\rho(t) \quad (82)$$

où ρ_0 désigne la matrice densité du système à l'équilibre thermodynamique à la température T en l'absence de champ électrique, et définie par :

$$\rho_0 = \frac{N \exp -\beta\mathcal{H}_0}{\text{Tr} \exp -\beta\mathcal{H}_0} = f(\mathcal{H}_0 - \mu_0) \quad (83)$$

où N est le nombre d'électrons présents dans l'échantillon, $\beta = 1/T$, μ_0 désigne le potentiel chimique et f la fonction de Fermi-Dirac :

$$f(x) = \frac{1}{1 + \exp \beta x} \quad (84)$$

10. Dans la jauge de Coulomb : $\text{div} \vec{A} = 0$ les opérateurs \vec{A} et \vec{P} commutent.

En notant E_n les valeurs propres associées aux vecteurs propres $|n\rangle$ de \mathcal{H}_0 :

$$\mathcal{H}_0|n\rangle = E_n|n\rangle \quad (85)$$

l'équation (82) s'écrit, au premier ordre et après transformée de Fourier :

$$\langle n|\delta\rho|l\rangle = \frac{eA}{m} \frac{f_n - f_l}{E_n - E_l + \omega} \langle n|P|l\rangle \quad (86)$$

et

$$\langle n|\delta\rho|n\rangle = 0 \quad (87)$$

avec

$$f_n = f(E_n - \mu) \quad (88)$$

et où P désigne la projection de l'opérateur impulsion \vec{P} suivant la direction du champ électrique. On peut maintenant calculer la densité de courant dans l'échantillon :

$$\begin{aligned} J &= -\frac{e}{m_e\mathcal{V}} \text{Tr} \rho(P + eA) \\ &= -\frac{e}{m\mathcal{V}} [\text{Tr} \rho_0 P - eA \text{Tr} \rho_0 + \text{Tr} \delta\rho P] \end{aligned} \quad (89)$$

où \mathcal{V} désigne le volume de l'échantillon. Le premier terme est d'ordre 0 en A : il décrit le courant en l'absence de champ électrique, et est donc nul pour un barreau macroscopique. Le second terme vaut simplement $n_e e^2 A/m$ où $n_e = N/\mathcal{V}$ désigne la densité électronique. Le troisième terme se calcule à l'aide de l'équation (86). On en déduit la conductivité :

$$\sigma(\omega) = i \frac{n_e e^2}{m\omega} - i \frac{e^2}{m^2 \mathcal{V} \omega} \sum_{n,l,n \neq l} \frac{f_n - f_l}{E_n - E_l + \omega} |\langle n|P|l\rangle|^2 \quad (90)$$

* Règle de somme

Jusqu'ici seule l'expression de $\delta\mathcal{H}$ a été utilisée. Afin de simplifier la formule ci-dessus on va établir une règle de somme fondée sur des relations de commutation faisant intervenir \mathcal{H}_0 , X et P . On a en effet¹¹ :

$$[X, P] = i \quad \text{et} \quad [X, \mathcal{H}_0] = \frac{i}{m} P \quad (91)$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{\langle n|P|l\rangle}{E_n - E_l} = -\frac{m}{i} \langle n|X|l\rangle \quad (92)$$

On en déduit simplement la règle de somme suivante pour toute valeur de n donnée¹² :

$$\sum_{l,l \neq n} \frac{|\langle n|P|l\rangle|^2}{E_n - E_l} = -\frac{m}{2} \quad (93)$$

* Formule de Kubo

Ceci permet de réécrire la conductivité sous la forme¹³ :

$$\sigma(\omega) = i \frac{e^2}{m} \sum_{n,l,n \neq l} \frac{f_n - f_l}{E_n - E_l} \frac{|\langle n|P|l\rangle|^2}{E_n - E_l + (\omega + is)} \quad (94)$$

11. On s'intéresse ici à un échantillon simplement connexe. Le cas de l'anneau sera traité plus loin.

12. Dans la description d'un solide en ondes de Bloch, cette relation définit la masse effective de l'électron dans la bande (supposée parabolique) n

13. Remarquons que l'utilisation de la règle de somme n'affecte que la partie imaginaire de la conductivité.

Dans tout ce qui précède on doit avoir $\omega \gg s$. Cependant le champ électrique peut être établi aussi lentement que désiré, de sorte qu'il est légitime de faire tendre s vers zéro. La partie réelle (dissipative) de la conductivité devient alors :

$$\Re \sigma(\omega) = -\frac{\pi e^2}{m} \sum_{n,l,n \neq l} \frac{f(E_l + \omega) - f(E_l)}{\omega} |\langle n|P|l \rangle|^2 \delta(E_n - E_l + \omega) \quad (95)$$

Cette dernière équation est la forme habituelle de la formule de Kubo.

* *Formule de Drude*

Dans le cas d'un solide macroscopique la distance moyenne Δ entre niveaux d'énergie adjacents est extrêmement faible, de sorte que l'on a toujours : $T, \omega \gg \Delta$. On peut alors décrire le spectre en terme de continuum, et la conductivité à fréquence nulle devient :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0, \omega \gg \Delta} \Re \sigma(\omega) = -\frac{\pi e^2}{m} \int dE \int dE' \frac{\partial f}{\partial E} P^2(E, E') \delta(E - E') \quad (96)$$

où $N(E)$ désigne la densité d'états à l'énergie E et

$$P^2(E, E') = \sum_{n,l} |\langle n|P|l \rangle|^2 \delta(E - E_n) \delta(E' - E_l) \quad (97)$$

On obtient alors à température nulle :

$$\Re \sigma(\omega = 0) = \frac{\pi e^2}{m} \lim_{\delta E \rightarrow 0, \delta E \gg \Delta} P^2(E_F, E_F + \delta E) \quad (98)$$

L'élément de matrice P^2 peut être évalué par une approche semi-classique [7]. Il est relié au temps de collision élastique τ_e , de sorte que la formule précédente redonne la formule de Drude :

$$\sigma_0 = \frac{ne^2 \tau_e}{m} \quad (99)$$

2.1.2 Conductance d'un système fini

* *Le cas d'un échantillon isolé unique*

Commençons par remarquer que la formule de Kubo (95) est valable sans autre restriction que celle de la réponse linéaire : en particulier aucune hypothèse n'a été émise sur le spectre de \mathcal{H}_0 . Supposons que celui-ci soit discret : la conductance de notre échantillon est alors toujours nulle sauf si ω est exactement égal à la différence entre deux niveaux d'énergie, le plus bas étant occupé et le plus haut vide : il s'agit d'une absorption résonante. En particulier la conductance à basse fréquence ($\omega \ll \Delta$) est nulle. Ce cas est bien-sûr extrême : en réalité les niveaux électroniques sont toujours élargis par des processus inélastiques. Supposons pour simplifier que chaque niveau acquière une largeur γ indépendante de l'énergie. Dans le cas où $\gamma \gg \Delta$, les niveaux se recouvrent largement les uns les autres, et tout se passe comme si le spectre était continu : c'est le cadre d'application de la théorie diagrammatique. A l'inverse pour $\gamma \ll \Delta$ on doit obtenir une conductance qui dépend explicitement des processus inélastiques. Le calcul de la conductance d'anneaux mésoscopiques isolés unidimensionnels en présence d'un élargissement inélastique a été étudié à trois reprises : Landauer et Bättiker [59] n'ont pris en compte que le dernier niveau occupé et le premier vide, γ^{-1} étant le temps de vie de ce dernier ; Imry et Shiren [60] ont simplement remplacé les diracs de la formule de Kubo par des lorentziennes de largeur γ tandis que Trivedi et Browne [61] ont intégré γ de manière plus

explicite dans l'équation d'évolution de la matrice densité. Les deuxièmes ont obtenu une magnétoconductance *négative* en champ faible, à l'inverse des premiers et des troisièmes.

* *Conductance moyenne*

On a dit qu'en l'absence d'élargissement inélastique la conductance d'un système fini unique était nulle en général. Cependant si l'on considère un infini de systèmes macroscopiquement identiques mais microscopiquement différents, on voit bien que quel que soit la valeur de ω , il existera toujours un système résonant à cette fréquence. Plus précisément l'absorption de la fréquence ω sera reliée à la probabilité que deux niveaux soient distants de ω . A très basse fréquence cette probabilité $p(\omega)$ est celle que deux niveaux adjacents soient séparés de ω . Or on sait que $p(\omega)$ peut être calculée dans le cadre des matrices aléatoires [30] : $p(\omega) \propto \omega^\beta$ où $\beta = 1$ en champ magnétique nul et $\beta = 2$ en champ fini. Pour $\omega \ll \Delta$ on obtient donc que l'absorption est plus importante en l'absence de champ magnétique : il s'agit donc d'une magnétoconductance *négative*. Cette approche statistique est celle de Gorkov et Eliashberg [62].

* *Conductance du système non isolé : formule de Landauer*

Il nous reste à considérer le cas où l'échantillon dont on mesure la conductance est fini mais connecté à des fils de mesure : c'est le cas habituel de toutes les études de transport [19, 20]. Le système auquel il faut appliquer la formule de Kubo n'est plus l'échantillon seul, mais il faut y adjoindre les fils et l'appareil de mesure. La façon la plus simple de faire ceci est de supposer que les fils sont parfaits (exempts de désordre) et infinis, et que le champ électrique est confiné à l'échantillon [63]. Ceci correspond aussi au cadre de la théorie diagrammatique où l'élargissement est égal à l'énergie de Thouless : $\gamma \approx E_c$. Physiquement, cela consiste à regarder comment les électrons arrivant par l'un des fils sont transmis dans l'autre fil. Il s'agit donc de l'analogie d'une expérience de diffusion. La conductance est déterminée par la matrice de transmission t de l'échantillon via la formule de Landauer¹⁴ [8, 64] :

$$G = \frac{e^2}{h} \text{Tr } tt^\dagger \quad (100)$$

L'échantillon ne dissipe pas d'énergie ; c'est le réservoir situé au bout de chaque fil qui absorbe et réémet des électrons de manière incohérente. L'équivalence des approches de Kubo et Landauer n'est justifiée que si l'on considère dans la formule de Kubo les fonctions d'onde du système complet échantillon-fils [63]. Enfin rappelons que la théorie diagrammatique appliquée à la conductance moyenne d'un anneau conduit aux oscillations de Altshuler, Aronov et Spivak (AAS) [18] : la magnétoconductance en champ faible est alors *positive*.

2.2 Conductance AC d'anneaux mésoscopiques

2.2.1 Position du problème

Nous avons passé en revue au paragraphe précédent différentes approches de la conductance d'un système quantique. Nous allons à partir de maintenant nous intéresser au cas de la géométrie annulaire, pour laquelle il est un paramètre extérieur accordable à sou-

¹⁴. Cette formule correspond à une mesure à deux fils.

hait : le flux statique Φ traversant l’anneau. La mesure de la conductance d’un anneau peut se faire de cinq manières, présentées sur la figure 14 :

- La première (a) correspond à la mesure de transport décrite par la formule de Landauer. Le spectre du système est continu et le nombre d’électrons présents dans l’anneau est variable : il est décrit par une statistique grand-canonique.
- Dans la deuxième (b), on place l’anneau entre deux plaques d’un condensateur qui crée un champ électrique à fréquence finie. L’anneau peut avoir un spectre continu ou discret selon que $\gamma > \Delta$ ou $\gamma < \Delta$; le nombre d’électrons est constant : il s’agit d’une statistique canonique. Cependant le champ électrique présent dans l’anneau n’est pas celui appliqué : il est fortement réduit par l’écrantage des électrons de conduction, tout au moins dans le cas d’un métal macroscopique¹⁵.
- Le cas (c) correspond au précédent en statistique grand-canonique et pour un spectre continu.
- Les mesures (d) et (e) sont fort différentes des précédentes : le champ électrique est induit par une variation $\delta\Phi(t)$ du flux enserré par l’anneau ; les lignes de champ sont le long du fil, et il n’y a pas d’écrantage. Cependant les cas (e) et (a) sont équivalents pour un échantillon à spectre continu [18].

Quelques remarques s’imposent :

- Alors que les trois premières sont possibles quelle que soit la géométrie, les deux autres sont spécifiques de la géométrie multiplement connexe.
- Pour le système macroscopique, les cinq mesures présentées donnent le même résultat : la conductance de Drude.
- Les cas de spectre continu ($\gamma \gg \Delta$ ou échantillon connecté) sont décrits par la théorie diagrammatique.
- En présence d’un flux statique, seules les configurations (b) et (d) donnent lieu à un courant permanent moyen non nul.

Les divers travaux ayant traité de la conductance d’anneaux mésoscopiques ont traité les cas suivants :

- Le cas (a) est celui de la théorie diagrammatique, pour un anneau tridimensionnel dans le régime diffusif (AAS). Il conduit à une magnétoconductance *positive*.
- Gorkov et Eliashberg ont calculé la conductance de particules métalliques correspondant au cas (b) (sans toutefois calculer la valeur du champ électrique écranté). Comme on l’a vu, une extension de leur raisonnement conduit à une magnétoconductance *négative*.
- Les cas (c) n’a, à ma connaissance, jamais été abordé. La mesure (e) dans le cas où le couplage avec le réservoir est faible (de sorte que le spectre de l’échantillon puisse toujours être considéré comme discret) a été traité à une dimension dans la

¹⁵. L’écrantage fait naturellement intervenir l’interaction entre électrons, que nous avons négligé jusqu’alors. Elle est cependant fondamentale pour le point que le champ électrique doit être nul dans un conducteur (à fréquence nulle). A fréquence finie, le champ interne au conducteur n’est plus nul mais énormément réduit par cet effet (d’un facteur ω/ω_p où ω_p désigne la pulsation plasma du conducteur). Cependant, la conductivité, qui exprime le rapport de la densité de courant par rapport au champ électrique local peut, elle, être peu influencée par les interactions entre électrons, ce que nous avons supposé ici.

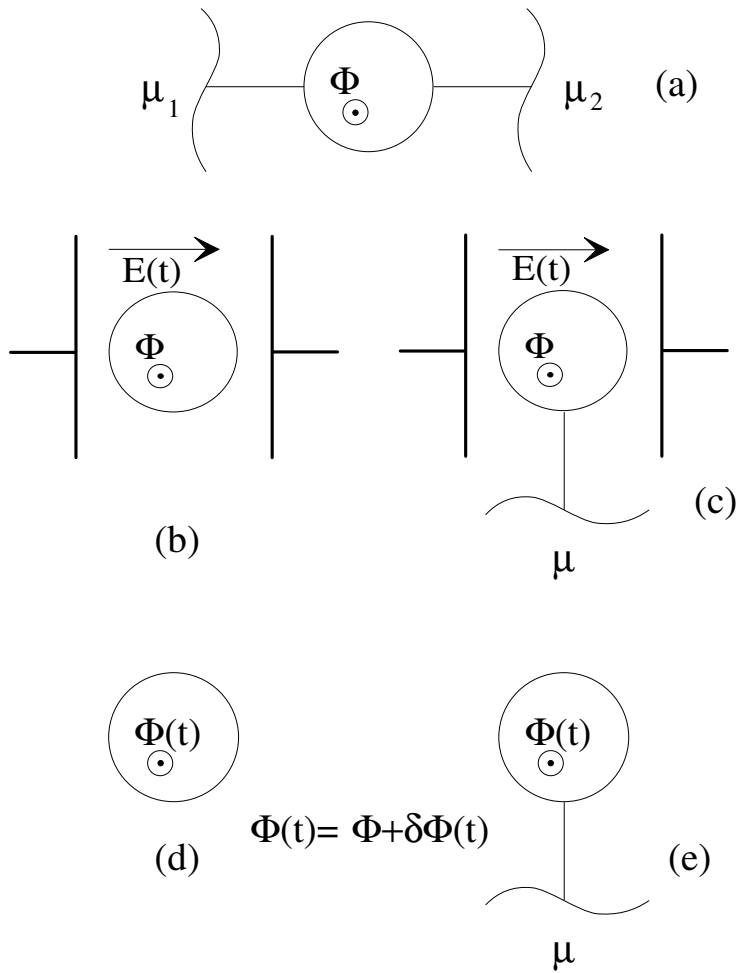


FIG. 14 – Les différentes façons de mesurer la conductance d’un anneau : (a) correspond à l’expérience de transport habituelle ; les expériences (b) et (c) sont capacitives et donc souffrent de l’écrantage du champ électrique ; (d) et (e) sont des mesures inductives. Ce sont ces deux dernières qui sont étudiées en détail.

référence [65] ; le cas d’un couplage fort correspond à un continuum d’énergie, et donc à AAS.

- Le cas (d) de l’anneau isolé a été étudié à maintes reprises [60, 61, 66], mais toujours pour un anneau unidimensionnel, donc jamais dans le régime diffusif.

On voit que la conductance d’un système est une quantité qui dépend dramatiquement de la manière dont on la mesure. En guise d’illustration, considérons un exemple extrême : un système isolé au spectre discret ($\gamma \ll \Delta$). L’aspect discret du spectre fait que sa conductance s’annule à basse fréquence : il s’agit donc d’un isolant. Pour mesurer sa conductance on lui adjoint des fils : la largeur des niveaux n’est plus déterminée par les mécanismes inélastiques intrinsèques, mais par le fort couplage qu’on lui fait subir ($\gamma \approx E_c \gg \Delta$). Il devient alors conducteur !

Nous nous sommes intéressés au cas d’anneaux tridimensionnels dans le régime diffusif traversés par un flux composé d’une partie statique Φ_{DC} et d’une partie alternative $\delta\Phi(t)$

oscillant à la pulsation ω :

$$\Phi(t) = \Phi_{DC} + \delta\Phi(t) \quad (101)$$

Nous nous sommes restreints à la réponse linéaire : $\delta\Phi \ll \Phi_0$. L'avantage de cette configuration (qui correspond au cas (d) et (e)) est que le champ électrique vu par les électrons n'est pas écranté, mais vaut :

$$\vec{E} = -\frac{1}{L} \frac{\partial\Phi}{\partial t} \vec{e}_\theta \quad (102)$$

où L désigne la circonférence de l'anneau et \vec{e}_θ le vecteur orthoradial. Nous nous sommes intéressés au cas d'anneaux à spectre discret ($\gamma \ll \Delta$) pour lesquels la conductance est une propriété intrinsèque¹⁶ de l'échantillon (tout au moins pour la configuration (d)). Ceci correspond à des échantillons semi-conducteurs [67] pour lesquels on pourra regarder l'influence du flux statique, de la température et de la fréquence, ces derniers pouvant être inférieurs ou supérieurs à γ et/ou Δ .

2.2.2 Modélisation

Nous avons repris le modèle développé par Trivedi et Browne [61] et l'avons étendu au cas d'un anneau tridimensionnel dans le régime diffusif. Le calcul de la conductivité est analogue à celui développé pour la formule de Kubo, avec quelques modifications dues aux trois causes suivantes : la géométrie annulaire, l'intégration d'un mécanisme inélastique et le travail en statistique éventuellement canonique.

La géométrie annulaire est topologiquement périodique, ce qui impose :

$$V(r, \theta + 2\pi, z) = V(r, \theta, z) \quad \text{et} \quad |\Psi(r, \theta + 2\pi, z)\rangle = |\Psi(r, \theta, z)\rangle \quad (103)$$

pour toute fonction propre $|\Psi\rangle$ de \mathcal{H} . Le potentiel vecteur est orthoradial : $\vec{A}(t) = A(t)\vec{e}_\theta$ avec :

$$A(t) = A_0 + \delta A(t) = \Phi(t)/L \quad (104)$$

L'hamiltonien du système en l'absence de la perturbation $\delta\Phi(t)$ s'écrit :

$$\mathcal{H}_0(\Phi_{DC}) = \frac{1}{2m}(\vec{P} + e\vec{A}_0)^2 + V(r, \theta, z) \quad (105)$$

Le flux statique est un paramètre dont dépendent les éléments propres de \mathcal{H}_0 .

* *Mécanismes inélastiques*

Intéressons-nous au couplage du système électronique à un réservoir : en l'absence d'un tel couplage, son évolution est décrite par l'équation de Liouville (82). A l'inverse, s'il est instantanément thermalisé, sa matrice densité est en permanence égale à la matrice densité d'un système indépendant du temps dont l'hamiltonien est donné par $\mathcal{H}(t)$:

$$\rho_{equ}(t) = \frac{N \exp(-\beta\mathcal{H}(t))}{\text{Tr} \exp(-\beta\mathcal{H}(t))} \quad (106)$$

16. Il est curieux de remarquer que lorsqu'on adjoint des fils de mesure à un échantillon, on obtient une conductivité qui est donnée par la formule de Drude : elle ne fait intervenir que le temps de collision élastique des électrons dans l'échantillon, qui en est une propriété intrinsèque. A l'inverse, on verra qu'en l'absence de couplage avec un réservoir de particules, la conductivité est, dans certaines conditions, proportionnelle au temps de collision inélastique des électrons, qui est une mesure du couplage qu'ils ont avec un réservoir d'énergie...

Dans le cas d'un temps de relaxation fini, l'évolution de la matrice densité du système peut être décrite par une équation pilote qui inclut l'évolution libre et la thermalisation [68, 69] :

$$i\frac{\partial\rho}{\partial t} = [\mathcal{H}, \rho] - i\gamma(\rho - \rho_{equ}) \quad (107)$$

où γ^{-1} est le temps de relaxation du système vers l'équilibre. L'origine de l'existence de γ est le couplage de l'échantillon à un bain thermique (ce qui est fait par les collisions inélastiques des électrons de l'anneau)¹⁷. On peut également voir γ comme la largeur des niveaux d'énergie. Enfin puisque sa présence est due aux collisions inélastiques, γ^{-1} doit être relié au temps de cohérence de phase τ_ϕ (lui-même déterminé par les mêmes collisions).

Regardons les hypothèses sous-jacentes à l'équation (107) : celle-ci suppose que la matrice densité décrivant le système complet échantillon-réservoir peut être découplée, donnant lieu à l'existence d'une matrice densité effective décrivant l'évolution de l'échantillon seul. De plus le couplage est supposé suffisamment faible de sorte que seules les propriétés dynamiques du système sont modifiées, les propriétés thermodynamiques étant elles inchangées. Sous cette condition on peut considérer que les états propres de l'anneau sont ceux qu'il aurait en l'absence de couplage, et nous pourrions évaluer les quantités voulues dans cette base. Cette hypothèse n'est justifiée que pour $\gamma \ll \Delta$. Une conséquence importante émerge alors : puisque la solution stationnaire de l'équation (107) est $\rho_{stat} = \rho_{equ}$, toutes les quantités thermodynamiques (tel le courant permanent) ne sont pas sensibles à la présence du réservoir. Ainsi on ne peut pas, à l'aide d'un tel modèle, retrouver la décroissance exponentielle du courant permanent avec la longueur de cohérence de phase.

* *Statistique canonique*

Il nous reste à exprimer la contrainte sur le nombre N d'électrons selon l'ensemble statistique choisi : canonique (expérience (d)) ou grand-canonique (expérience (e)). Pour cela rappelons que l'on décompose la matrice densité en une partie statique et une partie dynamique :

$$\rho(\Phi(t), t) = \rho_0(\Phi_{DC}) + \delta\rho(t) \quad (108)$$

avec

$$\rho_0(\Phi_{DC}) = f(\mathcal{H}_0(\Phi_{DC}) - \mu_0) \quad (109)$$

Dans le cas de l'ensemble grand-canonique, le potentiel chimique μ du système ne dépend ni du temps ni du flux statique : $\mu = \mu_0$. En revanche la statistique canonique impose que le nombre d'électrons soit constant dans l'anneau, ce qui se traduit par une dépendance du potentiel chimique en fonction du temps et du flux statique :

$$\mu(\Phi(t)) = \mu_0(\Phi_{DC}) + \delta\mu(t) \quad (110)$$

La contrainte sur μ s'exprime à deux niveaux :

17. Par souci de simplicité nous supposons que γ est indépendant de la température. Si ce n'est pas le cas il suffit de remplacer partout γ par $\gamma(T)$. Cependant les mécanismes donnant lieu à l'existence de γ dépendent en général de la température de manière bien plus douce que les effets que nous avons mis en évidence, de sorte que nos résultats ne sont qualitativement pas affectés. Nous supposons de plus que γ ne dépend pas de l'énergie, i.e. que les transitions entre niveaux de l'anneau sont toutes régies par un même temps caractéristique. Ceci peut avoir des conséquences importantes dans le cas où $T, \omega \ll \Delta$ où la forme de $\gamma(E)$ peut conduire à des conclusions imprévisibles.

- Pour le problème statique décrit par \mathcal{H}_0 on doit avoir $\text{Tr} \rho_0 = N$ ce qui se traduit par une équation implicite qui permet de calculer $\mu_0(N, \Phi_{DC})$:

$$\sum_n f_n = N \quad (111)$$

- Pour le problème dépendant du temps, on doit avoir à la fois $\text{Tr} \rho(t) = N$ (soit $\text{Tr} \delta\rho(t) = 0$) et $\text{Tr} \rho_{equ}(t) = N$ avec $\rho_{equ}(t) = f(\mathcal{H}(t) - \mu(t))$. Ces deux dernières conditions sont en fait équivalentes et permettent de calculer $\delta\mu(t)$ de manière perturbative.

* Règle de somme

On peut maintenant exprimer la conductivité de l'anneau en fonction des éléments propres de l'hamiltonien statique non perturbé \mathcal{H}_0 comme on l'a fait pour la formule de Kubo. On va pour cela passer par l'intermédiaire d'une règle de somme, différente de celle de l'équation (93) à cause de la géométrie annulaire : en effet, la démonstration de l'équation (93) repose sur l'identité $[X, P] = i$ qui perd son sens pour une topologie doublement connexe dans laquelle l'opérateur X n'est pas monovalué¹⁸, et donc n'est plus hermitique. Il en résulte que la règle de somme (93) est modifiée. Pour établir sa nouvelle expression, il suffit de calculer de manière perturbative les énergies propres de l'hamiltonien $\mathcal{H}_0(\Phi + \delta\Phi)$ en fonction des éléments propres de $\mathcal{H}_0(\Phi)$ pour $\delta\Phi$ tendant vers zéro [70] :

$$\begin{aligned} E_n(\Phi + \delta\Phi) &= E_n(\Phi) + \langle n | \delta\mathcal{H} | n \rangle + \sum_{l, l \neq n} \frac{|\langle n | \delta\mathcal{H} | l \rangle|^2}{E_n - E_l} \\ &= E_n(\Phi) + \frac{\partial E_n}{\partial \Phi} \delta\Phi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_n}{\partial \Phi^2} (\delta\Phi)^2 \end{aligned} \quad (112)$$

On notera qu'il s'agit d'un développement à l'ordre 2 en $\delta\Phi$; il faudra donc tenir compte du terme en δA^2 de $\delta\mathcal{H}$. L'égalisation des termes d'ordre 1 nous redonne la propriété bien connue reliant le courant d'un niveau à l'élément diagonal correspondant de P :

$$\frac{\partial E_n}{\partial \Phi} = -\frac{e}{mL} \langle n | P | n \rangle \quad (113)$$

Celle des termes d'ordre 2 conduit à la règle de somme suivante :

$$\sum_{l, l \neq n} \frac{|\langle n | P | l \rangle|^2}{E_n - E_l} = -\frac{m}{2} + \frac{m^2 L^2}{2e^2} \frac{\partial^2 E_n}{\partial \Phi^2} \quad (114)$$

2.2.3 Résultat

On obtient au bout du compte que la conductivité de l'anneau se décompose en trois termes :

$$\sigma(\omega) = \sigma_{per} + \sigma_{ND} + \sigma_D \quad (115)$$

18. La coordonnée x mesure la position d'un point le long de l'anneau ; l'opérateur P est ici la composante orthoradiale de l'impulsion.

$$\text{avec } \begin{cases} \sigma_{per} &= \frac{i}{\mathcal{V}} \frac{L^2}{\omega} \frac{\partial}{\partial \Phi} \sum_n f_n \frac{\partial E_n}{\partial \Phi} \\ \sigma_{ND} &= \frac{i}{\mathcal{V}} \frac{e^2}{m^2} \sum_{n,l,n \neq l} \frac{f_n - f_l}{E_n - E_l} \frac{|\langle n|P|l \rangle|^2}{E_n - E_l - \omega - i\gamma} \\ \sigma_D &= -\frac{i}{\mathcal{V}} \frac{L^2}{\gamma - i\omega} \sum_n \frac{\partial f_n}{\partial \Phi} \frac{\partial E_n}{\partial \Phi} \end{cases} \quad (116)$$

où P est la composante orthoradiale de l'opérateur \vec{P} . Avant de calculer les différents termes apparaissant dans ces expressions, effectuons quelques remarques sur la signification des différents termes de la conductivité :

- Le premier terme est directement relié à la présence des courants permanents dans l'anneau, puisqu'il peut se réécrire sous la forme :

$$\sigma_{per} = -\frac{i}{\mathcal{V}} \frac{L^2}{\omega} \frac{\partial I_{per}}{\partial \Phi} \quad (117)$$

Il s'agit d'une quantité purement réactive qui exprime la réponse des courants permanents lorsque le flux transperçant l'anneau varie au cours du temps. Plus précisément la quantité $\chi_0 = i \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega \sigma(\omega)$ est simplement la susceptibilité magnétique orbitale des courants permanents. Rappelons que ces courants sont nuls en moyenne dans l'ensemble grand canonique. Dans l'ensemble canonique leur moyenne est paramagnétique en champ faible, périodique avec la période $\Phi_0/2$, et décroît exponentiellement avec la température (avec une énergie caractéristique qui vaut environ $2E_c/3$ pour les anneaux étudiés ici[42]). On ne reviendra pas sur ce terme de conductivité.

- On appellera le deuxième terme de la conductivité “conductivité non diagonale” dans la mesure où son expression ne fait intervenir que des éléments de matrice non diagonaux de l'opérateur P : il fait donc intervenir des *transitions* entre niveaux différents de l'anneau. Dans la limite du spectre continu (correspondant, comme on l'a vu, soit à un système infini, soit à un système fini connecté à des fils de mesure infinis), sa partie réelle devient identique à la conductivité de Kubo, et est le point de départ de la théorie diagrammatique. La moyenne d'ensemble de σ_{ND} contient donc a priori la conductivité de Drude et les corrections de localisation faible qui donnent lieu à une oscillation de la magnétoconductance avec la période $\Phi_0/2$ (oscillation de Altshuler, Aronov et Spivak (AAS) [18]). Nous montrerons au paragraphe 2.2.5 les résultats numériques que nous avons obtenus, où nous verrons que ces oscillations sont toujours *opposées* à celles de AAS, ce qui peut être compris grâce à des arguments simples de matrices aléatoires.
- Dans la même logique le dernier terme de conductivité sera dit “diagonal” (il ne fait intervenir que les éléments de matrice diagonaux de l'opérateur P) : contrairement au précédent il n'est pas lié à des transitions, mais sa présence est due au temps de *relaxation* fini des populations (qui dépendent du flux) vers l'équilibre. Il est aussi relié aux courants permanents par le terme $-\partial E_n/\partial \Phi$ (le courant porté par un électron au niveau n) et n'est donc présent que dans le cas de la géométrie annulaire. Il s'annule en flux nul et pour toute valeur du flux multiple de $\Phi_0/2$, et donc donne lieu à des oscillations *de même signe* que celles de AAS. De plus, à l'inverse de σ_{ND} , il disparaît dans la limite thermodynamique. Le paragraphe 2.2.6

est voué à l'étude de cette quantité en fonction de la température et du flux, qui présente des comportements fort différents dans les ensembles canonique et grand canonique.

2.2.4 Le modèle d'Anderson

Avant d'en venir aux résultats obtenus, nous allons ici expliciter le modèle numérique employé, commun à de nombreux calculs numériques faisant intervenir des systèmes désordonnés. Il s'agit du modèle d'Anderson, qui fait intervenir l'hamiltonien en liaison forte suivant :

$$\mathcal{H}_0(\Phi) = \sum_{n,m} (z_{n,m} c_n^\dagger c_m + \bar{z}_{n,m} c_m^\dagger c_n) + \sum_n \rho_n c_n^\dagger c_n + \quad (118)$$

Le premier terme correspond à l'énergie cinétique : les coefficients $z_{n,m}$ sont nuls si les sites n et m ne sont pas premiers voisins, et valent dans le cas contraire $z_{n,m} = \exp(2i\pi\Phi/\Phi_0(x_n - x_m)/L_x)$ où x_n et x_m sont les coordonnées respectives des sites n et m le long de l'anneau. Le second terme correspond à une énergie potentielle $\{\rho_n\}$ au site n . Le désordre est introduit en tirant aléatoirement les $\{\rho_n\}$ dans l'intervalle $[-\frac{W}{2}, \frac{W}{2}]$. Le paramètre W mesure l'intensité du désordre, et est relié au libre parcours moyen par la formule empirique $l_e = 30/W^2$.

Les échantillons que nous avons étudiés sont des tores de deux différentes tailles : un grand de longueur $L_x = 64$ et de section $L_y \times L_z = 8 \times 8$, et un plus petit de taille $32 \times 4 \times 4$. Le désordre choisi juste suffisant pour que le mouvement des électrons soit diffusif (soit $W = 1.4$ pour le plus gros anneau et $W = 2$ pour l'autre[35]). L'hamiltonien correspondant est diagonalisé pour diverses valeurs du flux magnétique Φ , conduisant ainsi à un ensemble de valeurs propres $\{E_n(\Phi)\}$ et éventuellement également à un ensemble de fonctions propres $|n(\Phi)\rangle$ (nous n'avons calculé les fonctions propres que pour la plus petite matrice), qui permettent de calculer les différents termes de conductivité. Tirant parti de la propriété d'ergodicité, les moyennes sont effectuées sur le nombre d'électrons (entre 1/4 et 3/4 du remplissage) et on sur le désordre.

2.2.5 Conductance non diagonale (i.e. terme d'absorption)

* *Température nulle*

La figure 15 présente simultanément la dépendance en fréquence des parties réelle et imaginaire de la conductance moyenne :

$$\langle g_{ND} \rangle = \frac{S}{L} \frac{2\pi\hbar}{e^2} \langle \sigma_{ND} \rangle = 2\pi \frac{\langle G_{ND} \rangle}{e^2/\hbar} \quad (119)$$

On peut distinguer sur cette figure deux échelles d'énergie importantes : l'énergie de Thouless E_c (estimée ici à 5Δ) en dessous de laquelle la conductance dépend du flux, et l'inverse du temps de collision élastique $\hbar/\tau_e \approx 20\Delta$ au dessus de laquelle la conductance décroît comme $1/\omega^2$. Notons que pour $\omega < E_c$ la partie imaginaire de la conductance non diagonale est négligeable par rapport à sa partie réelle. Par la suite nous ne nous intéresserons qu'à la partie réelle de σ_{ND} qui s'écrit :

$$\Re(\sigma_{ND}) = \frac{e^2}{m^2\mathcal{V}} \sum_{n,l,n \neq l} \frac{f_n - f_l}{E_n - E_l} \frac{|\langle n|P|l \rangle|^2 \gamma}{(E_n - E_l - \omega)^2 + \gamma^2} \quad (120)$$

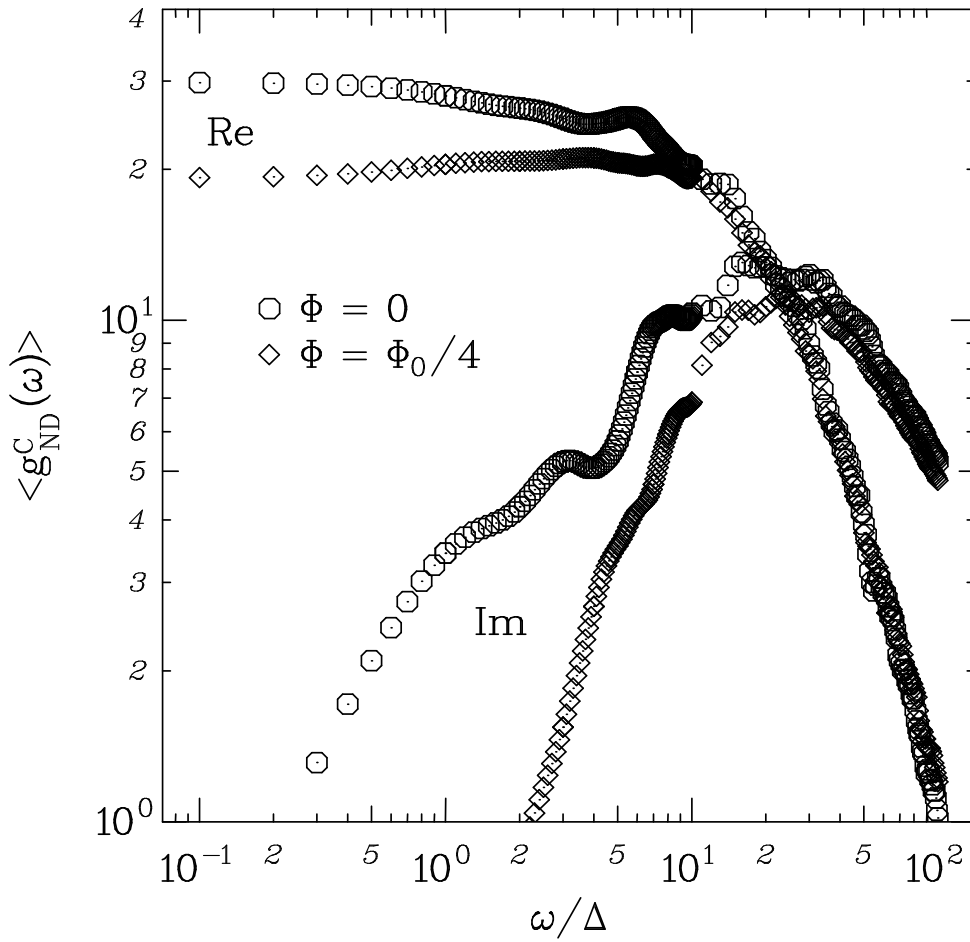


FIG. 15 – Dépendance en fréquence des parties réelle et imaginaire de la conductance non diagonale, exprimées en unités de $e^2/2\pi h$, pour $\gamma = \Delta$, à température nulle et dans l'ensemble canonique.

et nous confondrons $\langle g_{ND} \rangle$ et sa partie réelle. Nos résultats numériques concernant la dépendance en flux de $\langle g_{ND} \rangle$ à température nulle et fréquence nulle sont présentées sur la figure 16 pour différentes valeurs de γ . Il est important ici de bien séparer les moyennes canonique et grand canonique. Dans les deux cas $\langle g_{ND} \rangle$ présente des maxima en fonction du flux pour tous les multiples de $\Phi_0/2$ (qui est sa périodicité) ; ces maxima s'affinent lorsque γ diminue, et ils sont plus prononcés dans le cas canonique que dans le cas grand canonique.

En poursuivant les approches de Gorkov et Eliashberg [62] et de Shklovskii [71] nous allons montrer que ce comportement est une conséquence directe de la transition entre les statistiques orthogonale (en champ nul) et unitaire (en champ non nul) du spectre. Nous supposons pour cela que les éléments de matrice $|\langle n|p_\theta|l \rangle|^2 = |P_{nl}|^2$ sont indépendants de n et l et valent $|P|^2$ [72]. Nos résultats numériques sont en accord avec cette hypothèse

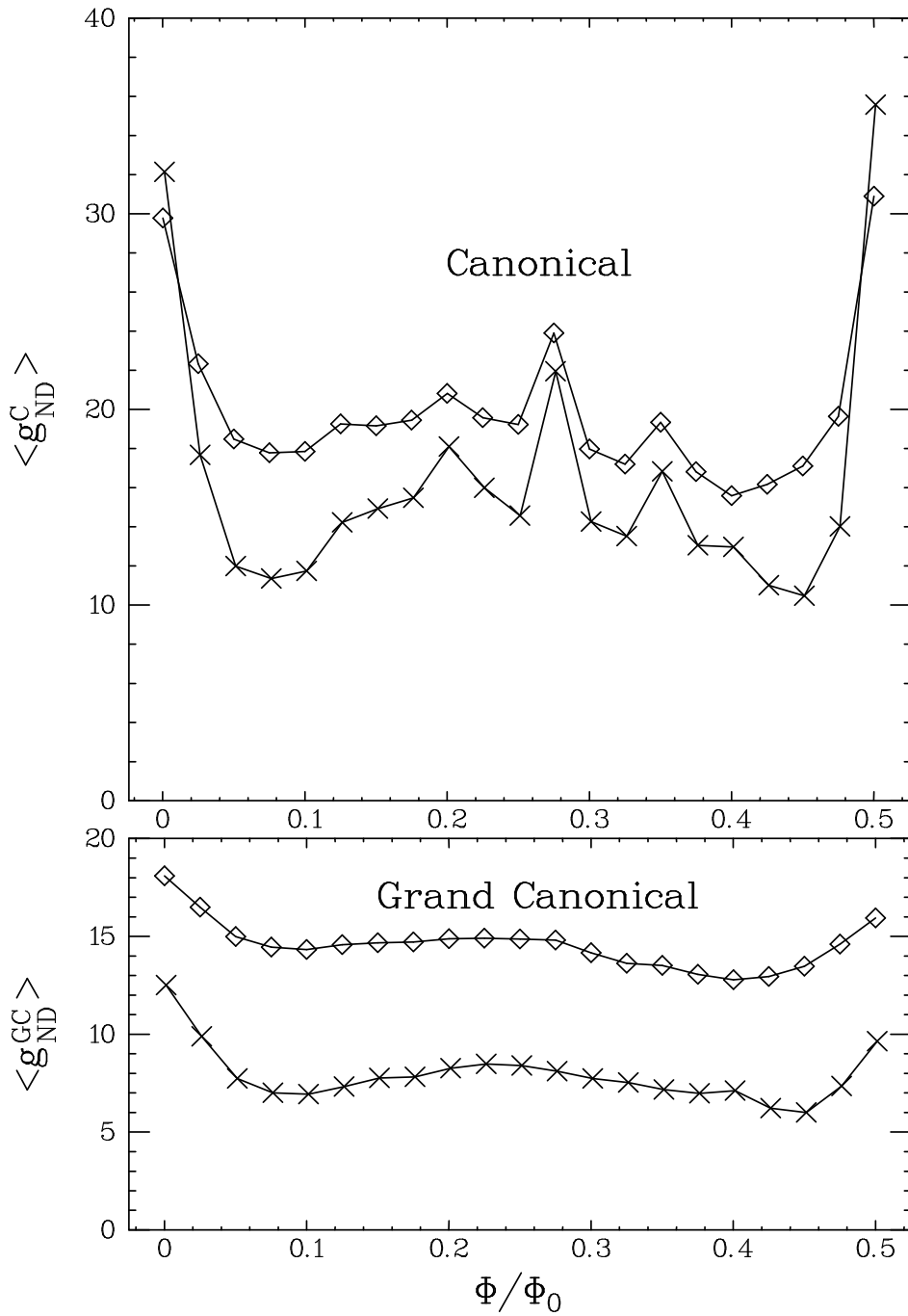


FIG. 16 – *Dépendance en flux de la conductance non diagonale, exprimée en unités de $e^2/2\pi h$, à température nulle et fréquence nulle pour deux valeurs de γ : $\diamond \gamma = 1$; $\times \gamma = 0.3$.*

lorsque $|E_n - E_l| < E_c$ ¹⁹. Il est alors possible d'écrire σ_{ND} en termes de la fonction $R(s)$

¹⁹. Notons que cette hypothèse est différente de celle des articles [62, 73, 74] qui supposent que c'est l'élément de matrice $|X_{nl}|^2 = |P_{nl}|^2/(E_n - E_l)^2$ qui est indépendant de $E_n - E_l$. Ceci est dû à la différence

qui est la probabilité que deux niveaux d'énergie soient distants de la quantité s . Enfin pour effectuer une moyenne canonique nous utilisons la relation

$$\langle f_n - f_l \rangle_\mu = \frac{E_n - E_l}{\Delta\mu} \quad (121)$$

où $\Delta\mu$ est la plage de potentiel chimique sur laquelle nous effectuons la moyenne. On en déduit alors :

$$\langle \sigma_{ND}^{GC} \rangle = \frac{|P|^2}{\Delta} \int \frac{R(s)}{\gamma + i(\omega - s)} ds \quad (122)$$

D'un autre côté lorsque l'on effectue une moyenne canonique on a :

$$\langle f_n - f_l \rangle_N = \frac{n - l}{\Delta N} \quad (123)$$

où ΔN est la plage de variation de N utilisée pour effectuer la moyenne. Le dénominateur d'énergie ne disparaît plus dans ce cas dans l'expression de la conductivité qui devient :

$$\langle \sigma_{ND}^C \rangle = |P|^2 \int \frac{R(s)}{s(\gamma + i(\omega - s))} ds \quad (124)$$

La théorie des matrices aléatoires [30] nous donne l'expression de $R(s)$ pour $s \ll \Delta$:

$$R(s \ll \Delta) \propto p(s) \propto s^\beta \quad (125)$$

avec $\beta = 1$ dans le cas orthogonal et $\beta = 2$ dans le cas unitaire, correspondant respectivement à $\Phi = 0$ et $\Phi_0 \sqrt{\frac{\Delta}{E_c}} \leq \Phi \leq \Phi_0(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\Delta}{E_c}})$ modulo $\Phi_0/2$ [31]. A $T = 0$ on obtient pour la partie réelle de $\langle \sigma_{ND} \rangle$:

– Dans le cas grand canonique :

$$\omega \ll \gamma \begin{cases} \langle \sigma_{ND}^{GC}(\Phi = 0) \rangle & \propto \sigma_0(\gamma/\Delta) \log(\Delta/\gamma) \\ \langle \sigma_{ND}^{GC}(\Phi = \Phi_0/4) \rangle & \propto \sigma_0\gamma/\Delta \end{cases} \quad (126)$$

$$\Delta \gg \omega \gg \gamma \begin{cases} \langle \sigma_{ND}^{GC}(\Phi = 0) \rangle & \propto \sigma_0(\omega/\Delta) \\ \langle \sigma_{ND}^{GC}(\Phi = \Phi_0/4) \rangle & \propto \sigma_0\omega^2/\Delta^2 \end{cases} \quad (127)$$

– Dans le cas canonique :

$$\omega \ll \gamma \begin{cases} \langle \sigma_{ND}^C(\Phi = 0) \rangle & \propto \sigma_0 \\ \langle \sigma_{ND}^C(\Phi = \Phi_0/4) \rangle & \propto \sigma_0(\gamma/\Delta) \log(\Delta/\gamma) \end{cases} \quad (128)$$

$$\Delta \gg \omega \gg \gamma \begin{cases} \langle \sigma_{ND}^C(\Phi = 0) \rangle & \propto \sigma_0 \\ \langle \sigma_{ND}^C(\Phi = \Phi_0/4) \rangle & \propto \sigma_0(\omega/\Delta) \end{cases} \quad (129)$$

On trouvera dans la référence [75] des expressions plus détaillées utilisant l'expression complète de $R(s)$.

Ces formules ne sont rigoureuses que dans la limite $\gamma \ll \Delta$; elles conduisent à une conductivité dans la limite $\omega \ll \Delta$ qui est plus faible dans le cas grand canonique que dans le cas canonique, d'un facteur de l'ordre $\omega/\Delta \ll 1$. Notons aussi que la quantité $\lim_{\omega, \gamma \rightarrow 0} \langle \sigma_{ND}^C \rangle(\Phi = 0)$ est finie. Ceci provient du fait que l'on a effectué la moyenne sur le

qu'il y a entre les conditions aux limites ouvertes de leur problème (un système simplement connexe) et les conditions aux limites périodiques du nôtre.

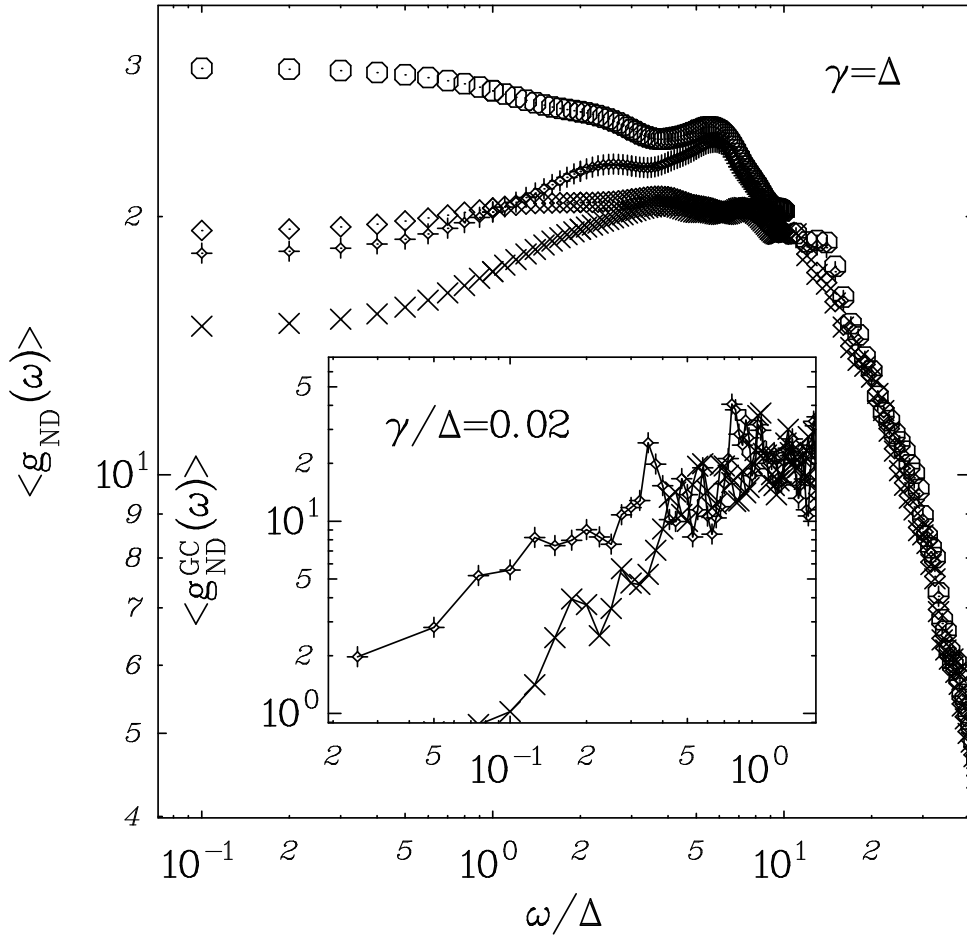


FIG. 17 – Dépendance en fréquence de la partie réelle de la conductance non diagonale exprimée en unités de $e^2/2\pi h$ pour $\gamma = \Delta$, à température nulle, pour les ensembles canonique (\odot $\Phi = 0$; \diamond $\Phi = \Phi_0/4$) et grand canonique ($+$ $\Phi = 0$; \times $\Phi = \Phi_0/4$). Notons que toutes ces quantités deviennent indépendantes de la fréquence pour $\omega \leq \gamma = \Delta$. L'inset montre les mêmes quantités dans l'ensemble grand canonique pour $\gamma = 0.02\Delta$. Dans ce cas les comportements en ω (pour $\Phi = 0$) et ω^2 (pour $\Phi = \Phi_0/4$) prévus par la théorie des matrices aléatoires (expression (126)) sont clairement observés à basse fréquence.

désordre avant de passer à la limite $\omega \rightarrow 0$: ainsi pour toute valeur de ω finie il existe un système présentant une absorption résonante à ω . En revanche, un système donné a une conductance non diagonale nulle à fréquence nulle. Remarquons que l'on trouve que les oscillations de la conductance sont du signe *opposé* à celles de AAS, aussi bien en statistique canonique que grand canonique. De plus dans tous les cas de figure la conductivité trouvée est inférieure ou égale à celle de Drude. Enfin nos résultats numériques (voir la figure 17) sont en accord raisonnable avec ces expressions, pour $\omega, \gamma \leq \Delta$.

Si l'on considère maintenant la zone de fréquence $\omega > \Delta$, on voit sur la figure 17 que les différences entre statistiques canonique et grand-canonique tendent à disparaître pour des fréquences supérieures à E_c ; la dépendance en flux devient alors elle-même négligeable.

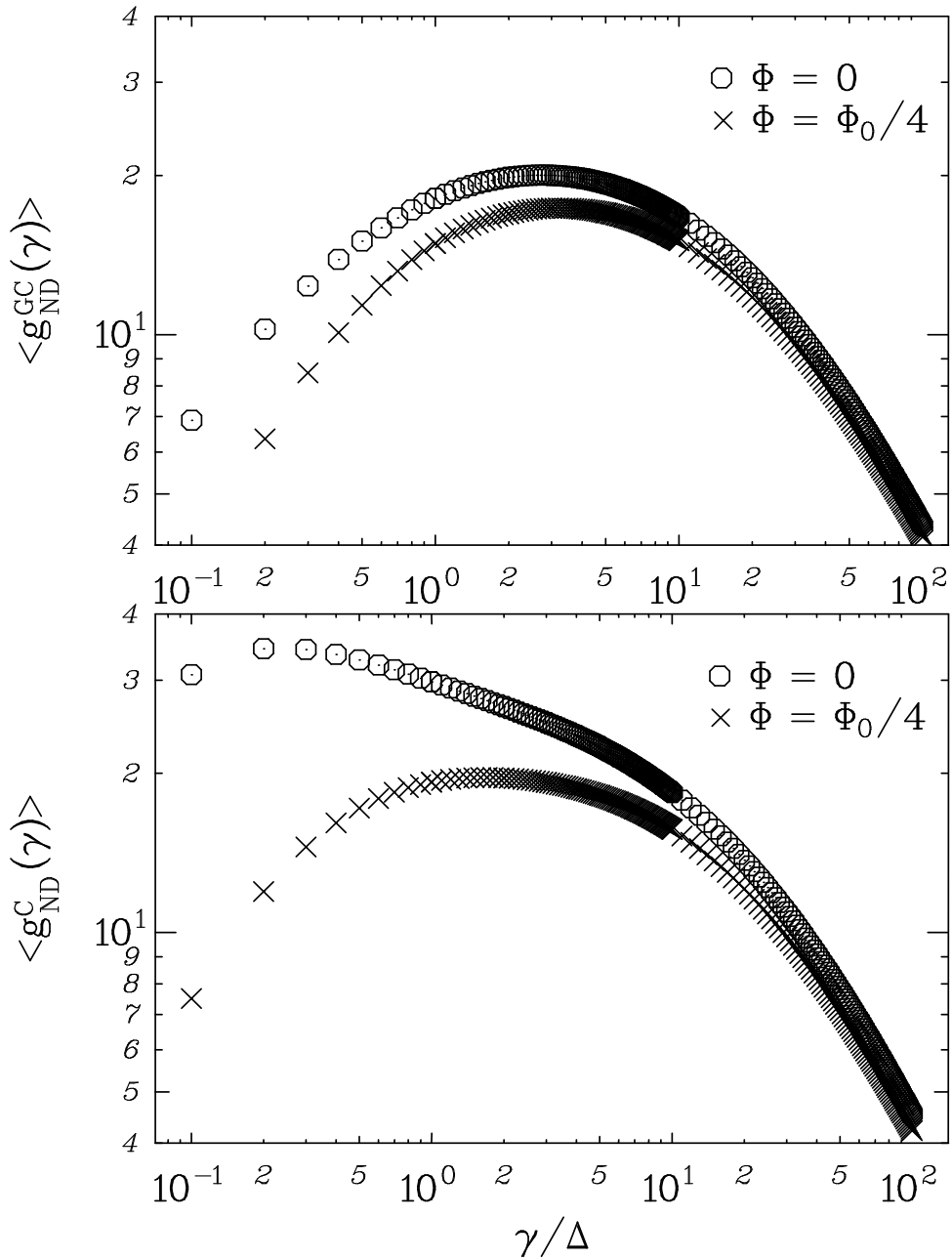


FIG. 18 – Dépendance en γ de la partie réelle de la conductance non diagonale exprimée en unités de $e^2/2\pi h$, à fréquence nulle et température nulle, pour les ensembles canonique et grand canonique.

En ce qui concerne la dépendance en γ à température nulle de $\langle g_{ND} \rangle$, on constate sur la figure 18 que pour des grandes valeurs de γ , $\langle g_{ND}(\Phi = \Phi_0/4) \rangle$ est toujours inférieure à $\langle g_{ND}(\Phi = 0) \rangle$ (i.e. que la magnétoconductance est toujours *négative* quand bien même le spectre redevient continu) à la fois en statistiques canonique et grand canonique. On s'attendrait pourtant à retrouver pour $\Delta \ll \gamma \ll E_c$ les résultats de la théorie diagram-

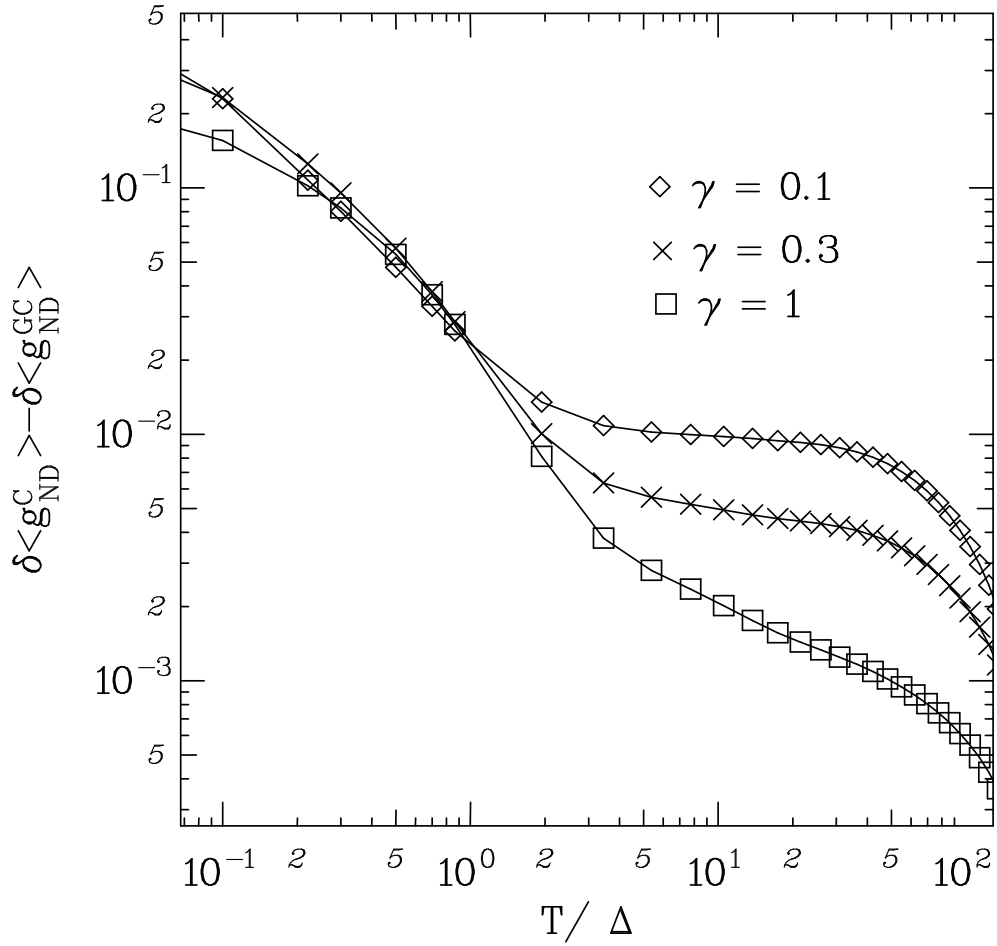


FIG. 19 – Dépendance en température de la différence entre les parties dépendantes du flux de g_{ND} dans les ensembles canonique et grand canonique pour différentes valeurs de γ , à fréquence nulle.

matique qui présentent une magnétoconductance positive (oscillations de AAS). Nous comprenons ce désaccord comme résultant de l'approximation qui consiste à calculer les éléments de matrice P_{nl} dans la base du système en l'absence de couplage avec le réservoir. Nous avons déjà insisté sur le fait que cette approximation n'est justifiée que pour $\gamma \ll \Delta$. Si cette condition n'est pas remplie il nous faut calculer les éléments de matrice de P dans la base des vecteurs propres du système perturbé par le réservoir. Ceci conduit à un mélange de σ_{ND} avec σ_D qui redonne les oscillations de AAS : nous montrerons en effet dans la section 2.2.6 que σ_D donne lieu à une magnétoconductance positive.

* *Dépendance en température*

Notons $\delta g_{ND}(T)$ l'amplitude de l'oscillation de la conductance en fonction du flux. La figure 19 présente, pour différentes valeurs de γ , la dépendance en température de la différence $\delta g_{ND}^C - \delta g_{ND}^{GC}$ de δg_{ND} entre les cas canonique et grand canonique. Cette quantité décroît avec la température pour tendre vers zéro à haute température. On peut clairement distinguer dans cette décroissance deux régimes de température pour les valeurs

de γ inférieures à Δ : une décroissance rapide (approximativement en $1/T$, en accord avec la référence [71]) pour $T < \Delta$, suivie d'une décroissance plus molle pour $\Delta < T < E_c$. Ce comportement peut être compris au regard des relations suivantes :

$$\frac{\langle f_n - f_l \rangle_N}{E_n - E_l} = \frac{1}{\Delta} \text{ pour } |E_n - E_l| < T \quad (130)$$

et

$$\frac{\langle f_n - f_l \rangle_N}{E_n - E_l} = \frac{n - l}{E_n - E_l} \text{ pour } |E_n - E_l| > T \quad (131)$$

Ces équations conduisent à une dépendance en γ/T de $\langle \delta g_{ND}^C \rangle - \langle \delta g_{ND}^{GC} \rangle$ pour $\gamma < T < \Delta$.

2.2.6 Conductivité diagonale (i.e. terme de relaxation)

* *Dépendance en température et en flux : différences entre moyennes canonique et grand canonique*

Ecrivons σ_D sous la forme suivante :

$$\sigma_D = \frac{1}{\mathcal{V}} \frac{L^2}{\gamma - i\omega} \frac{\Delta}{\Phi_0^2} g_D(\Phi) \quad (132)$$

où la quantité :

$$g_D(\Phi) = -\frac{\Phi_0^2}{\Delta} \sum_n \frac{\partial f_n}{\partial \Phi} \frac{\partial E_n}{\partial \Phi} \quad (133)$$

est réelle positive et sans dimension, reliée à la conductance diagonale de l'échantillon par :

$$g_D = 2\pi \frac{G_D}{e^2/h} \frac{\gamma - i\omega}{\Delta} \quad (134)$$

Le terme $\partial f_n / \partial \Phi$ de g_D décrit l'évolution des populations quand on fait varier le flux. Dans l'ensemble canonique et à température nulle, la population des niveaux ne dépend pas du flux : les niveaux occupés sont les N premiers quel que soit Φ . La conductivité diagonale canonique est donc nulle à température nulle. Cet argument n'est valable que dans le cas canonique.

- *Le cas de l'ensemble grand canonique*

Dans le cas grand canonique le potentiel chimique est constant, de sorte que l'on a :

$$g_D^{GC}(\Phi) = -\frac{\Phi_0^2}{\Delta} \sum_n \frac{\partial f_n}{\partial E} \left(\frac{\partial E_n}{\partial \Phi} \right)^2 \quad (135)$$

La moyenne de $g_D^{GC}(\Phi)$ sur le potentiel chimique s'écrit donc :

$$\langle g_D^{GC}(\Phi) \rangle_\mu = \frac{\Phi_0^2}{\Delta^2} \langle i_n^2(\Phi) \rangle = \frac{\Phi_0^2}{\Delta^2} \langle i^2(\Phi) \rangle \quad (136)$$

où i_n est le courant porté par un électron au niveau n . La moyenne $\langle \dots \rangle_\mu$ sur une plage de potentiel chimique grande par rapport à la température conduit à une conductivité à peu près indépendante de la température. Cette conductivité présente des oscillations périodiques en $\Phi_0/2$ dont le maximum (en $\Phi_0/4$) est de l'ordre de Δ/γ fois la conductivité de Drude, et donc est bien plus grande que cette dernière. De plus, cette dernière relation fait le lien entre une quantité de transport (la conductance) et une propriété spectrale (le courant typique de bande). D'autres liens de ce genre ont été tissés entre une conductance de Kubo et la courbure moyenne des niveaux d'énergie en flux nul [76, 5]. Cette dernière

et la moyenne sur le flux du courant de bande semblent être simplement proportionnelles [77].

• *Le cas de l'ensemble canonique*

Si l'on considère maintenant le cas canonique, un autre terme vient s'ajouter à la conductance, qui provient de la dépendance en flux du potentiel chimique :

$$g_D^C(\Phi) = -\frac{\Phi_0^2}{\Delta} \left(\sum_n \frac{\partial f_n}{\partial E} \left(\frac{\partial E_n}{\partial \Phi} \right)^2 - \frac{\partial \mu}{\partial \Phi} \sum_n \frac{\partial f_n}{\partial E} \frac{\partial E_n}{\partial \Phi} \right) \quad (137)$$

Pour une température basse comparée à Δ , le potentiel chimique

$$\mu(N, \Phi) = \frac{1}{2}(E(\Phi) + E_{N+1}(\Phi)) \quad (138)$$

se trouve juste entre le dernier niveau occupé et le premier niveau vacant, et la fonction $\partial f/\partial E$ n'est non nulle que sur une fenêtre d'énergie de largeur T centrée en $\mu(N, \Phi)$. On a donc pour chaque niveau $\lim_{T \rightarrow 0} \partial f_n/\partial E = 0$, et $\langle g_D^C(\Phi) \rangle$ s'annule à température nulle, contrairement au cas grand canonique. Lorsqu'on augmente la température, mais toujours dans la limite $T \ll \Delta$, la courbe de $\langle g_D^C(\Phi) \rangle$ présente un pic de part et d'autre des valeurs du flux pour lesquels le gap au niveau de fermi

$$\Delta_N(\Phi) = E_{N+1}(\Phi) - E_N(\Phi) \quad (139)$$

présente un minimum inférieur à T . Dans le cas d'un anneau unidimensionnel ceci n'arrive que pour des valeurs du flux telles que $\Phi = n\Phi_0/2$, qui sont les seules pour lesquelles $\Delta_N(\Phi)$ peut présenter un minimum. En revanche pour un anneau tridimensionnel ces pics peuvent survenir pour une valeur quelconque du flux. Nous obtenons que $g_D^C(N, \Phi)$ présente des fluctuations importantes en fonction de N , comme il est montré sur la figure 20. Pour un flux proche d'un des pics pour lesquels $\Delta_N(\Phi) > T$, la dépendance en température de g_D est donnée par :

$$g_D^C(N, T, \Phi) = \frac{\Phi_0^2}{2T\Delta} \left(\frac{\partial \Delta_N}{\partial \Phi} \right)^2 \exp\left(-\frac{\Delta_N}{2T}\right) \quad (140)$$

Plus généralement on peut poser :

$$g_D^C(N, T, \Phi) = \frac{\Phi_0^2}{\Delta^2} \left(\langle i^2 \rangle_T - \frac{(\langle i_n \rangle_T)^2}{\langle 1 \rangle_T} \right) \quad (141)$$

où l'opération

$$\langle h_n \rangle_T = \sum_n \frac{\partial f_n}{\partial E} h(E_n) \quad (142)$$

définie pour toute fonction $h(E)$ devient à haute température équivalente à moyennner $h(E)$ sur une fenêtre d'énergie de largeur T . Pour $T \gg E_c$ cette moyenne devient indépendante de T et est équivalente à une moyenne sur le désordre. Puisque $\langle 1 \rangle_T = 1$ et $\langle i_n \rangle_T = 0$, la conductance devient une quantité automoyennante identique à celle obtenue dans l'ensemble grand canonique :

$$\begin{aligned} g_D^C(N, T \gg E_c, \Phi) &= \langle g_D^C(T \gg E_c, \Phi) \rangle = \langle g_D^{GC}(T \gg E_c, \Phi) \rangle \\ &= \langle g_D^{GC}(\Phi) \rangle = \frac{\Phi_0^2}{\Delta^2} \langle i^2(\Phi) \rangle \end{aligned} \quad (143)$$

La variation de $\langle g_D^C \rangle$ avec la température obtenue à partir de nos simulations numériques est présentée sur la figure 21 : l'augmentation abrupte observée à des températures inférieures à Δ s'adoucit jusqu'à ce que $\langle g_D^C(T) \rangle$ atteigne une valeur asymptotique, qui

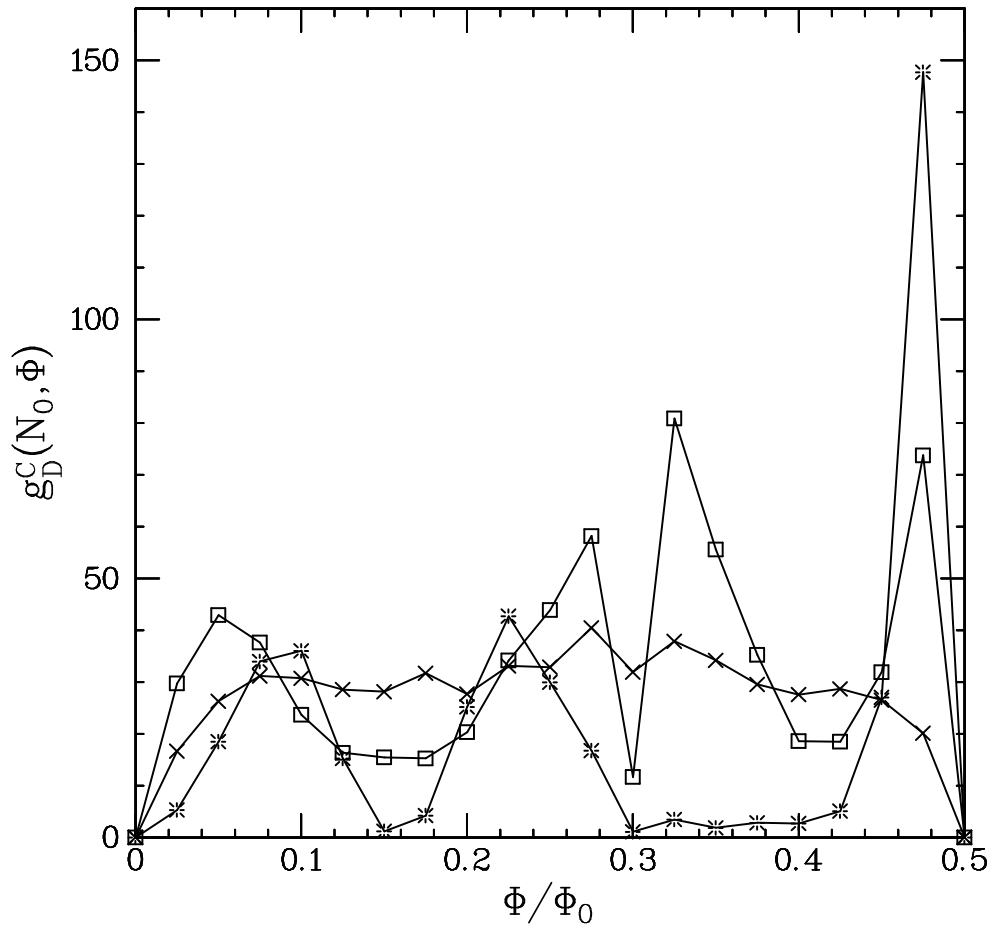


FIG. 20 – *Dépendance en flux de la conductance diagonale dans l'ensemble canonique pour un nombre d'électrons donné, pour différentes températures (étoiles : $T = 0.2\Delta$, carrés : $T \approx \Delta$, croix : $T \approx E_c$). On note que la conductance s'est automoyennée avec la température : $g_D^C(T = E_c) = \langle g_D^C(T = E_c) \rangle$.*

est la valeur grand canonique $\langle g_D^{GC} \rangle$. Pour $\Delta < T < E_c$ la différence $\langle g_D^{GC} \rangle - \langle g_D^C(T) \rangle$ semble bien décrite par une loi $T^{-1/2}$ (voir la figure 22). Notons enfin que cette dépendance en température est très différente de celle obtenue pour la conductance non diagonale $\langle \delta g_{ND}^C \rangle - \langle \delta g_{ND}^{GC} \rangle$ (voir la figure 19).

* *Dépendance en fréquence et conductance imaginaire*

La dépendance en fréquence de σ_D est simplement donnée par le préfacteur $(\gamma - i\omega)^{-1}$. Elle est donc complètement déterminée par le rapport ω/γ . Contrairement au cas de σ_{ND} , E_c n'est pas une énergie pertinente. Dans la limite $\omega \ll \gamma$, σ_D est essentiellement réelle et proportionnelle à $1/\gamma$; elle peut donc être bien plus grande que σ_{ND} qui est proportionnelle à τ_e . Dans la limite $\omega \gg \gamma$ la partie réelle de σ_D disparaît pour donner naissance à une contribution imaginaire qui s'ajoute à l'effet des courants permanents. Ainsi pour $\omega \gg \gamma$

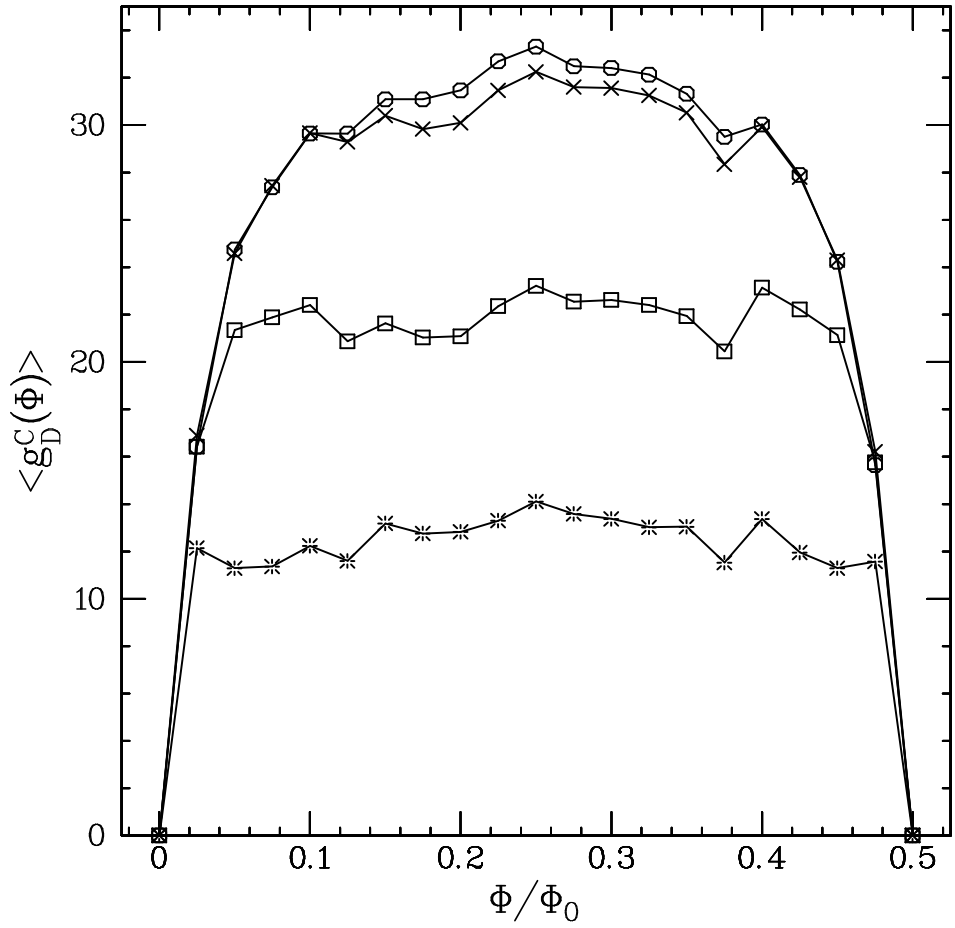


FIG. 21 – Dépendance en flux de la conductance canonique moyenne pour différentes températures (étoiles : $T = 0.2\Delta$, carrés : $T \approx \Delta$, croix : $T \approx E_c$, cercles : $T \gg E_c$).

la partie imaginaire de la conductance s'écrit :

$$\langle \Im m g \rangle = -\frac{1}{\omega} \left\langle \frac{\partial I_{per}}{\partial \Phi} \right\rangle + \frac{e^2}{2\pi h} \frac{\Delta}{\omega} \langle g_D(\Phi, T) \rangle \quad (144)$$

Dans le cas grand canonique, $\langle I_{per} \rangle = 0$ et

$$\langle \Im m g^{GC} \rangle = \frac{e^2}{2\pi h} \frac{\Phi_0^2}{\Delta \omega} \langle i_n^2 \rangle \quad (145)$$

indépendant de la température. En revanche dans le cas canonique à température nulle

$$\langle \Im m g^C \rangle = -\frac{1}{\omega} \left\langle \frac{\partial I_{per}}{\partial \Phi} \right\rangle_C = \frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \Phi^2} \quad (146)$$

où \mathcal{E} désigne l'énergie totale du système : il s'agit du résultat de Kohn bien connu qui relie la partie imaginaire de la conductivité à la "stiffness" de l'anneau désordonné [70]. A plus haute température il y a une autre contribution diagonale. La variation non monotone en fonction de la température de la partie de $\langle \Im m g^C \rangle$ qui dépend du flux telle qu'elle est présentée sur la figure 23 est simplement le résultat de la somme de la décroissance exponentielle de $\langle I_{per}(T) \rangle$ et de la croissance de $\langle g_D^C(T) \rangle$ décrite précédemment.

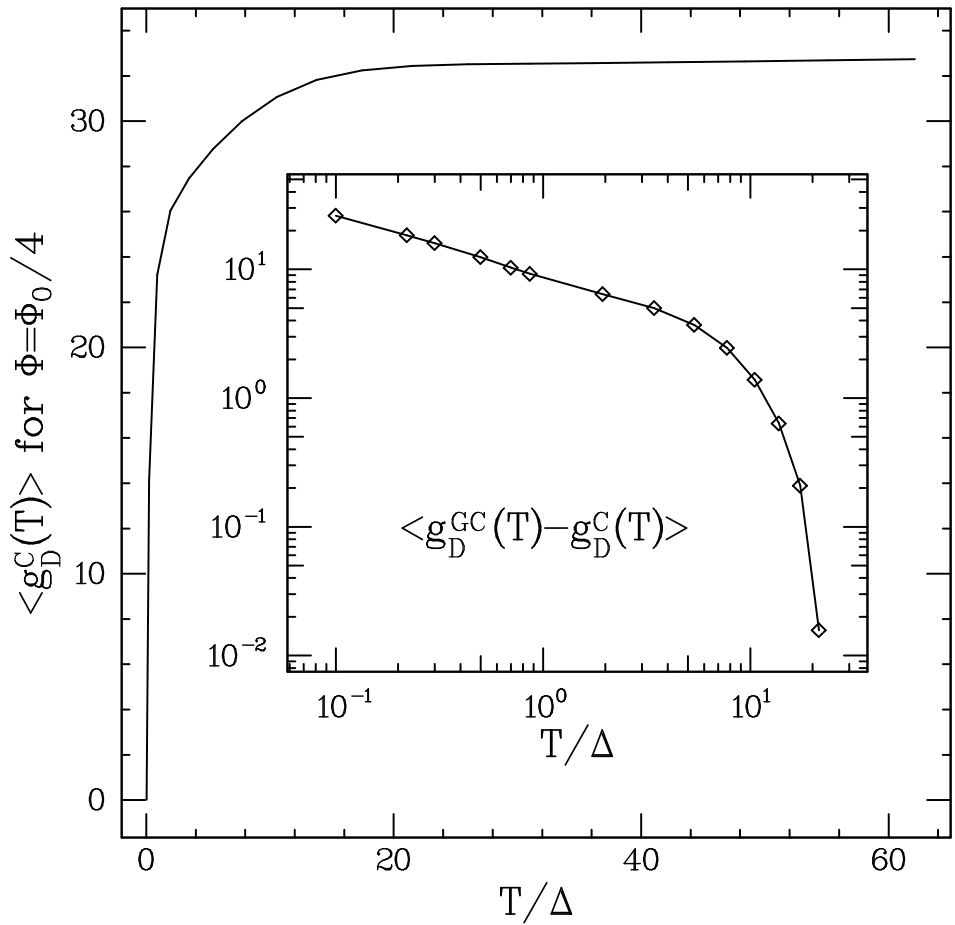


FIG. 22 – *Dépendance en température de la conductance canonique moyenne pour $\Phi = \Phi_0/4$. On remarque la croissance rapide de la courbe de $T = 0$ à $T \approx \Delta$, la queue jusqu'à $T \approx E_c$ et la saturation à la valeur grand canonique à plus haute température. L'inset présente la différence entre les conductances moyennes grand canonique et canonique. Cette quantité décroît comme $T^{-1/2}$ jusqu'à E_c et beaucoup plus rapidement ensuite.*

2.2.7 La conductivité totale

Nous avons vu dans les paragraphes précédents les différentes caractéristiques des composantes non diagonale et diagonale de la conductivité. La dépendance en flux de la conductivité totale à fréquence nulle se déduit directement de cette analyse. La conductance grand canonique est dominée par la contribution diagonale ; elle est indépendante de la température et oscille conformément à AAS. En revanche la conductance totale canonique, représentée sur la figure 24 dépend de la température de la manière suivante : à $T = 0$ elle se réduit à la contribution non diagonale et présente des oscillations en fonction du flux qui sont de signe *opposé* au cas grand canonique. Lorsque la température augmente, la contribution diagonale vient s'ajouter à la précédente, et les oscillations *changent de signe* ; la conductance canonique devient égale à la conductance grand canonique pour une température de l'ordre de E_c .

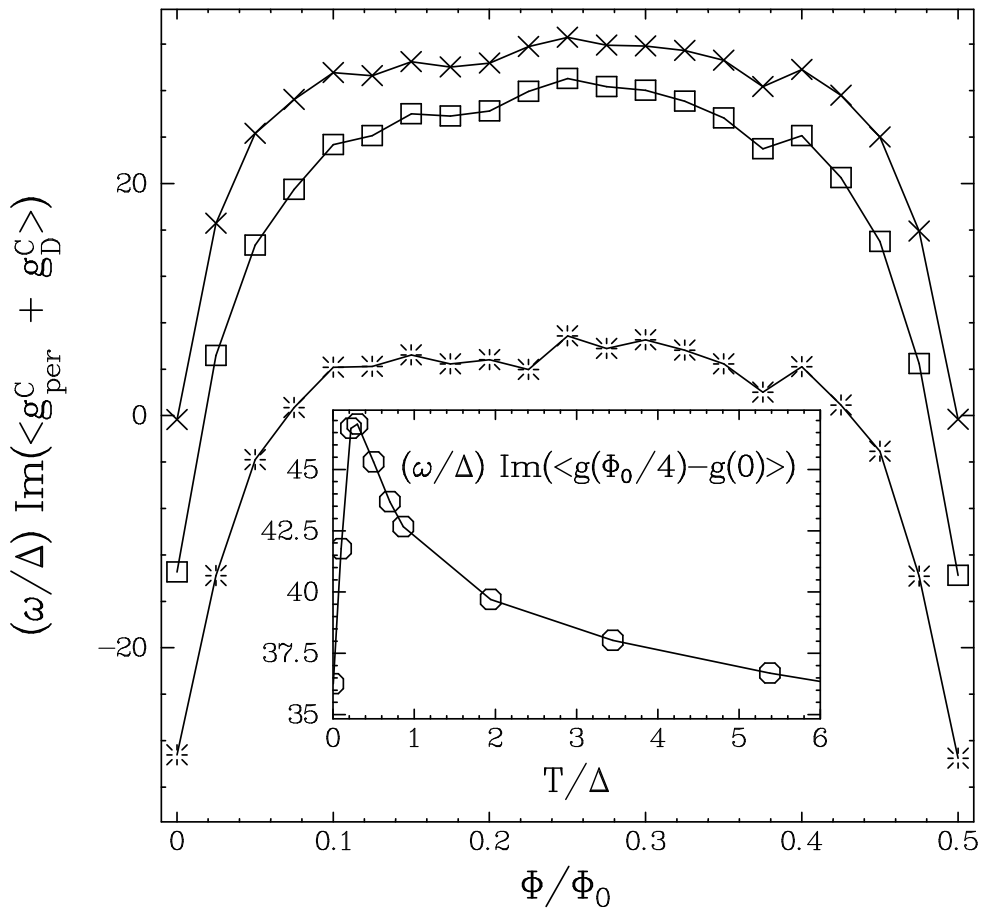


FIG. 23 – Dépendance en flux de la partie imaginaire de la conductance dans l'ensemble canonique pour différentes températures (étoiles : $T = 0.2\Delta$, carrés : $T \approx \Delta$, croix : $T \approx E_c$). $\langle \Im m g^C \rangle = \langle \Im m g_{per}^C \rangle$ pour $T = 0$ et $\langle \Im m g^C \rangle \approx \langle \Im m g_D^C \rangle$ pour $T \approx E_c$. L'amplitude de l'oscillation de $\langle \Im m g \rangle$ est de l'ordre de Δ/ω fois la conductance de Drude. En inset : dépendance en température de l'amplitude des oscillations de la partie imaginaire de la conductance.

La dépendance en fréquence de la conductivité totale pour l'ensemble grand canonique (ou comme on vient de le voir celle de la conductivité canonique à $T \gg E_c$) est présentée sur la figure 25 pour $\Phi = 0$ et $\Phi = \Phi_0/4$. On peut y voir que les oscillations de la magnétoconductance *changent de signe* pour $\omega > \gamma$ ce qui correspond au domaine de fréquence pour lequel la conductance diagonale devient négligeable par rapport à la conductance non diagonale. Enfin la figure 26 regroupe de manière schématique la dépendance en flux des parties réelle et imaginaire dans les cas canonique et grand canonique pour divers domaines de température et de fréquence. Dans l'ensemble grand canonique, la conductance est indépendante de la température et égale à la conductance canonique pour $T \gg E_c$. A basse température, la conductance se réduit à sa partie non diagonale en statistique canonique ; sa valeur dans la limite $\omega, \gamma \rightarrow 0$ est de l'ordre de la conductance de Drude, et elle présente des oscillations en fonction du champ magnétique correspondant à une magné-

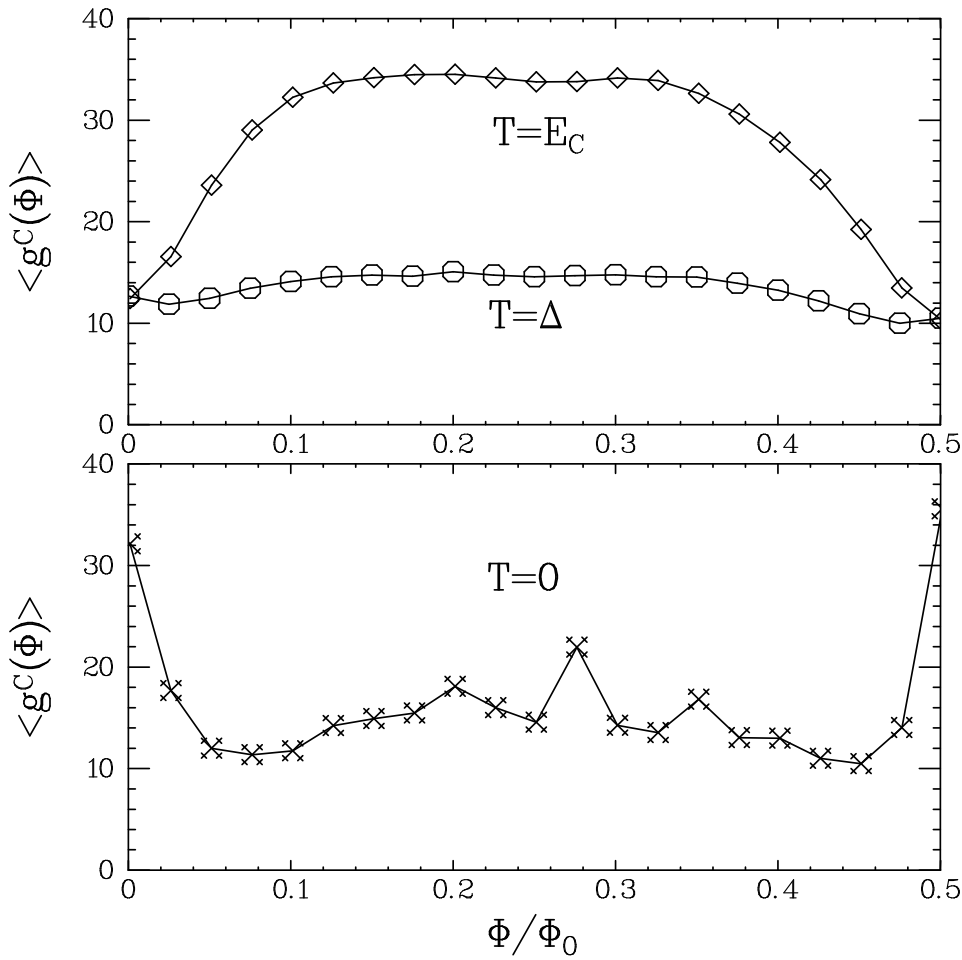


FIG. 24 – Dépendance en flux de la conductance totale moyenne dans l'ensemble canonique pour différentes températures et à fréquence nulle. On note le changement de signe des oscillations qui a lieu pour une température de l'ordre de Δ .

toconductance *positive* en champ faible. En revanche, à plus haute température, le terme diagonal vient contre-balancer le terme non diagonal, donnant lieu à des oscillations correspondant en champ faible à une magnétoconductance *négative*. La température a donc pour effet, dans le cas d'anneaux isolés et à basse fréquence, d'*inverser le signe des oscillations de conductance*. En restant à haute température, si l'on augmente la fréquence pour avoir $\omega \gg \gamma$, le terme diagonal devient imaginaire : seul la partie non diagonale contribue à la conductance, et on recouvre ainsi une magnétoconductance *positive*.

La partie imaginaire de la conductance est proportionnelle à la dérivée du courant permanent moyen en fonction du flux ; il n'y a pas d'autre contribution dans l'ensemble canonique à température nulle. En revanche dans le cas grand canonique le courant moyen est nul, mais le terme diagonal de la conductance devient imaginaire pour $\omega \gg \gamma$.

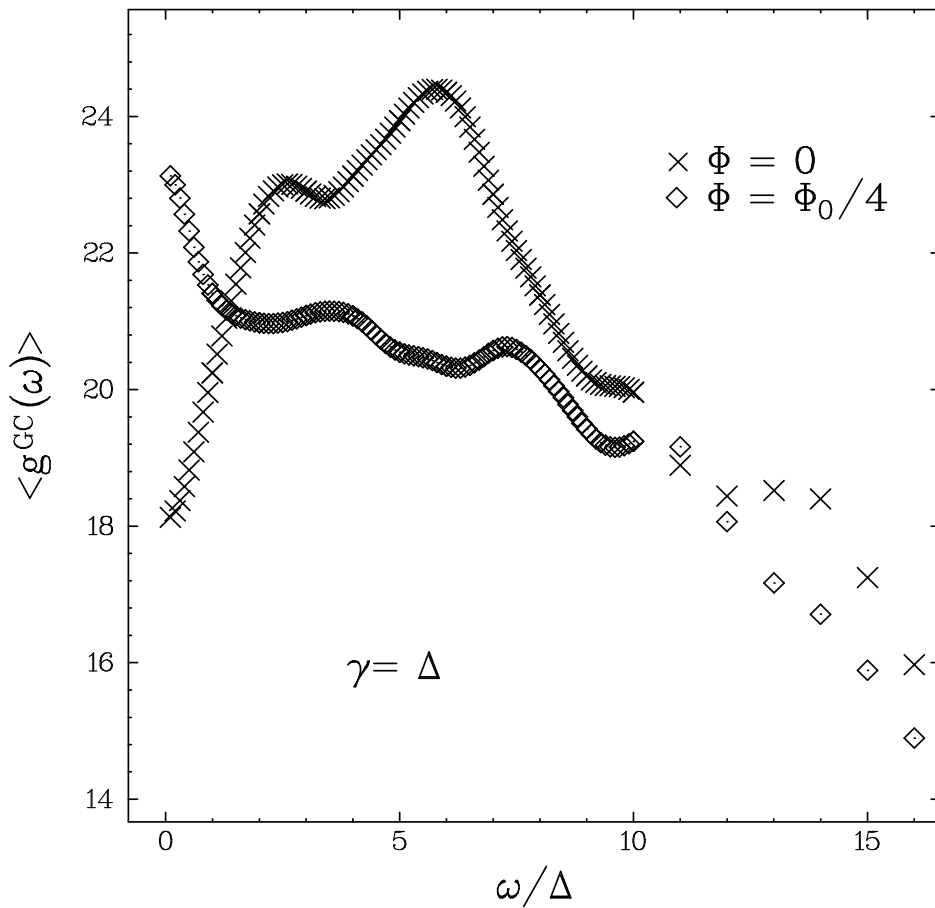


FIG. 25 – Dépendance en fréquence de la conductance totale grand canonique pour $\Phi = 0$ et $\Phi = \Phi_0/4$, et $\gamma = \Delta$. On remarque le changement de signe de la magnétoconductance qui survient pour $\omega = \gamma$.

2.2.8 Conclusion

Nous avons montré que la réponse d'un anneau mésoscopique traversé par un flux dépendant du temps dans la limite du spectre discret présente des comportements originaux qui peuvent être très différents de celle du même anneau connecté à des fils de mesure (la limite du continuum). Cette étude correspond à la situation expérimentale d'anneaux semi-conducteurs faits à partir d'une hétérojonction de *GaAs/GaAlAs* pour lesquels de récentes mesures spectroscopiques ont mis en évidence l'aspect discret du spectre [67]. Nous avons montré que l'ensemble statistique était déterminant sur la conductance AC de tels anneaux : en particulier le signe de la magnétoconductance peut s'inverser si l'on passe d'une situation à l'autre. Le même effet peut être produit par le biais de la température ou de la fréquence.

Ces résultats obtenus pour une géométrie de type Aharonov-Bohm peuvent être généralisées au cas de systèmes simplement connexes. Nous n'avons calculé que la moyenne de la conductance ; des résultats préliminaires concernant la distribution de cette quan-

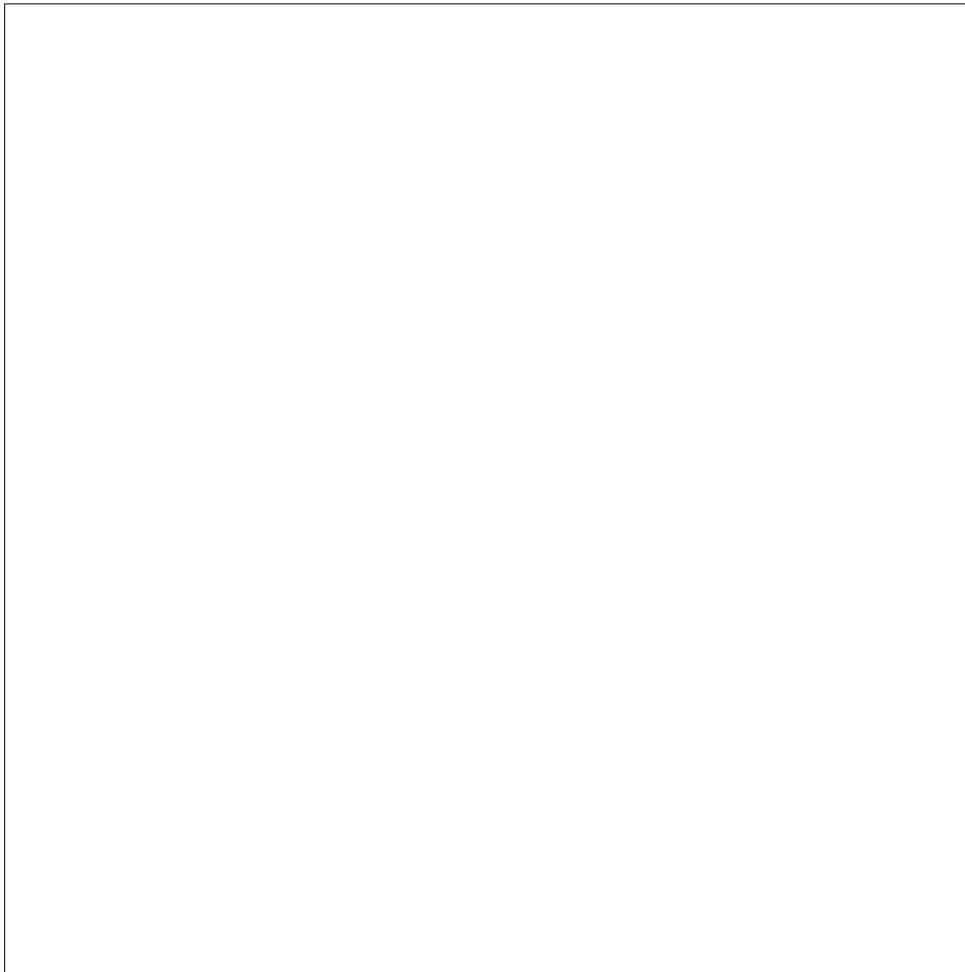


FIG. 26 – *Résumé schématique de la dépendance en flux des parties réelle et imaginaire de la conductance dans les cas canonique et grand canonique pour divers domaines de température et de fréquence. Les amplitudes sont données à des facteurs numériques près. (a) : $\gamma/\Delta \log(\Delta/\gamma)$ si $\omega \ll \gamma$; (b) : ω/Δ si $\gamma \ll \omega, \Delta$; (c) : valable uniquement si $\omega \ll \Delta$.*

tité semblent montrer des fluctuations non gaussiennes²⁰ importantes, différentes dans les ensembles canonique et grand canonique.

2.2.9 Du spectre discret au continuum

Le paramètre qui gouverne le passage du spectre discret au spectre continu est le rapport entre l'élargissement inélastique des niveaux et l'écart moyen entre deux niveaux successifs : γ/Δ . Pour $\gamma/\Delta \ll 1$, le spectre est discret et ce qui a été présenté précédemment s'applique ; pour $\gamma/\Delta \gg 1$ le spectre est continu, et l'approximation qui a consisté à calculer les éléments de matrice de l'opérateur P dans la base des vecteurs propres de l'anneau isolé est invalide. En revanche on peut effectuer les calculs de manière pertur-

²⁰. De telles fluctuations ont été prédites dans la référence [34] pour la conductance tunnel de “quantum dots” dans la limite du spectre discret.

bative par la technique diagrammatique. Ceci revient au calcul de Altshuler, Aronov et Spivak (AAS) [18]. Toutefois ce calcul est un développement en Δ/γ au premier ordre qui, dans l'ensemble canonique comme dans l'ensemble grand canonique, conduit à une magnétoconductance positive [75, 78]. Si maintenant on pousse ce calcul à l'ordre suivant, on observe que la différence entre conductance canonique et grand canonique donne une magnétoconductance négative. Lorsque γ diminue, le terme d'ordre 2 prend de l'importance, et on comprend bien qu'il puisse inverser les oscillations de AAS pour un spectre discret [75].

3 Etude expérimentale sur des anneaux isolés

Ce chapitre regroupe la partie expérimentale de notre travail. On y trouvera le but poursuivi, le principe de l'expérience mise en oeuvre et la nécessité de la conception et la fabrication d'un détecteur spécifique : un micro-résonateur supraconducteur. Ensuite sera présentée une étude de ce détecteur nu (fabrication, signaux parasites et sensibilité), suivie d'une série de mesures de caractérisation de l'échantillon (effet Hall, effet Shubnikov-de Haas, localisation faible et effet Aharonov-Bohm). Ces mesures nous ont amené à étudier le transport électronique dans le régime semi-balistique ($W < l_e < L$). Enfin la dernière partie expose les difficultés du couplage échantillon-détecteur, une expérience d'étalonnage à l'aide d'un ensemble d'anneaux supraconducteurs et les premiers résultats de la mesure de la susceptibilité orbitale et de la conductivité AC d'anneaux mésoscopiques semi-conducteurs isolés.

3.1 But de l'expérience et principe de détection

Dans ce premier paragraphe on va commencer par exposer le but expérimental que nous avons poursuivi et la méthode que nous employons à cette fin. En effet étant donnés les ordres de grandeur des signaux attendus, apparaît clairement la nécessité d'un détecteur spécifique qui se couple de manière astucieuse aux anneaux et dont on pourra mesurer les caractéristiques de manière extrêmement précise.

3.1.1 But et contraintes expérimentales

Après l'étude théorique exposée au chapitre précédent, il est clair que la configuration expérimentale qui offre les possibilités les plus riches quant aux effets que l'on peut espérer observer est la mesure des parties *réelle et imaginaire* de la conductance d'un ensemble d'anneaux *isolés* en présence d'un flux magnétique $\Phi = \Phi_{DC} + \delta\Phi(t)$, et ce en fonction de la température T , du flux statique Φ_{DC} (que l'on veut pouvoir faire varier de plusieurs Φ_0 afin de voir la périodicité) et de la fréquence excitatrice f (ou de la pulsation associée $\omega = 2\pi f$) de la partie oscillante du flux $\delta\Phi(t) = \delta\Phi \cos \omega t$ (étant donné que l'on s'intéresse à la réponse linéaire de l'échantillon, le champ alternatif peut être très faible : $\delta\Phi \ll \Phi_0$).

Examinons les conséquences immédiates du cahier des charges que nous nous sommes fixés : tout d'abord il faut que les anneaux soient cohérents ce qui nécessite l'obtention de *basses températures* et donc l'utilisation d'un *cryostat à dilution* $^3\text{He} - ^4\text{He}$. Le flux magnétique statique sera obtenu par un champ magnétique uniforme ; il faut donc que

les anneaux aient un bon rapport d'aspect. Les valeurs à atteindre (typiquement 10 à 100 Gauss) sont aisément accessibles. Quant à la partie oscillante du flux, elle ne pose elle non plus guère de problème en soi (la puissance nécessaire est très faible, et les fréquences intéressantes de l'ordre de 100 MHz à quelques GHz), si ce n'est qu'il faut amener l'onde créée à très basse température (ce qui nécessite une bonne thermalisation des câbles coaxiaux, notamment de l'âme centrale). La contrainte majeure provient du fait que l'on veut garder l'échantillon isolé de tout contact électrique : il faut donc avoir recours à une *détection magnétique par influence*. Se pose alors le problème du couplage entre le détecteur et l'échantillon, qui doit être optimisé.

3.1.2 Couplage entre le détecteur et l'échantillon

Le principe expérimental est le suivant : un circuit crée au niveau des anneaux un champ magnétique oscillant. En l'absence des anneaux il a une certaine impédance complexe Z_0 . L'oscillation du flux induit sur les anneaux un courant à la même fréquence, dont une partie est en phase avec le champ magnétique émis (la partie réactive) et l'autre en quadrature (la partie dissipative). Les anneaux créent à leur tour un champ magnétique oscillant qui peut être détecté soit par le circuit émetteur (dont l'impédance se trouve modifiée), soit par un autre circuit. Cette dernière possibilité, qui correspond à une expérience de susceptibilité classique, est très difficilement réalisable aux fréquences qui nous intéressent à cause des déphasages parasites inhérents à ce type de méthode et de la compensation nécessaire du détecteur qui dépend de la fréquence, lorsque la longueur d'onde associée devient comparable à la longueur du fil de la bobine détectrice. Le mécanisme de couplage du détecteur à l'échantillon décrit ci-dessus est un couplage par *induction mutuelle* : il fait intervenir le coefficient de mutuelle M entre le circuit d'émission-détection et chaque anneau, de sorte que ses composantes inductive L et résistive R sont affectées de la manière suivante :

$$\begin{aligned} L &\rightarrow L + \delta L & \delta L &= N_a M^2 \omega \Im \langle G \rangle \\ R &\rightarrow R + \delta R & \delta R &= N_a M^2 \omega^2 \Re \langle G \rangle \end{aligned} \quad (147)$$

où N_a désigne le nombre d'anneaux et $\langle G \rangle$ la conductance moyenne (complexe) par anneau. La sensibilité du détecteur sera d'autant meilleure que M est grand. Pour cela il faut que les anneaux soient le plus près possible du fil du détecteur. En effet, considérons à titre d'exemple le couplage entre une boucle macroscopique de rayon R et un anneau carré de côté $a \ll R$ situé en son centre (figure 27a). La mutuelle entre les deux vaut :

$$M = \frac{\mu_0 a^2}{2 R} \quad (148)$$

Si l'anneau se trouve maintenant non plus au centre de la boucle, mais à une distance de l'ordre de a (figure 27b), la mutuelle devient :

$$M \approx \frac{\mu_0 \log 3}{2\pi} a \quad (149)$$

qui est plus grande que la précédente d'un facteur $R/a \gg 1$ (typiquement $R \approx 1\text{mm}$, $a \approx 1\mu\text{m}$). De plus l'effet relatif de la présence de l'échantillon auprès du détecteur sera maximal si toute la longueur du circuit de détection est bordée d'anneaux (ce qui correspond à un coefficient de remplissage important). Ceci nous a conduit à considérer la solution suivante : le détecteur est un fil de longueur très grande devant la taille des

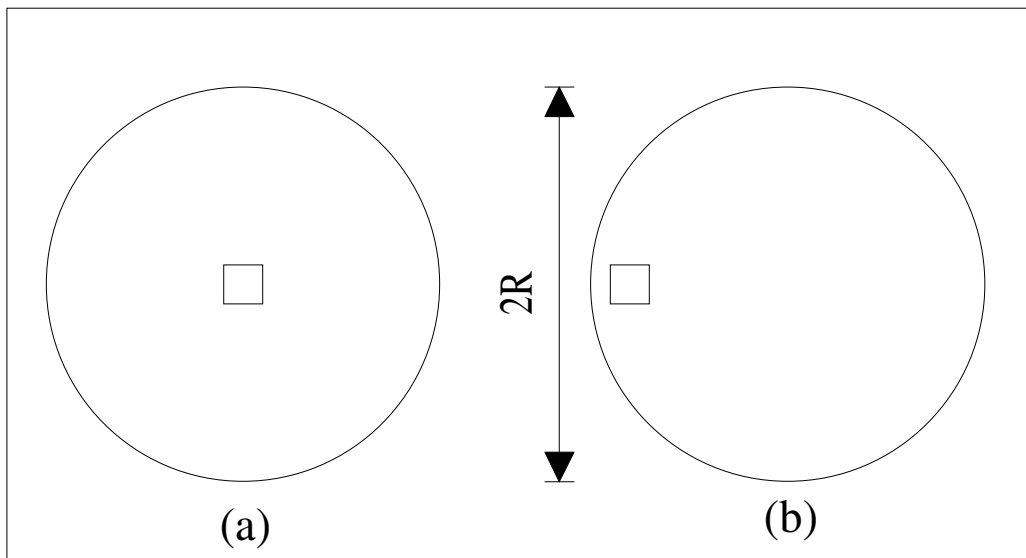


FIG. 27 – (a) : L’anneau est au centre du détecteur (macroscopique). (b) : L’anneau est très proche du détecteur, à une distance de l’ordre de la taille du carré.

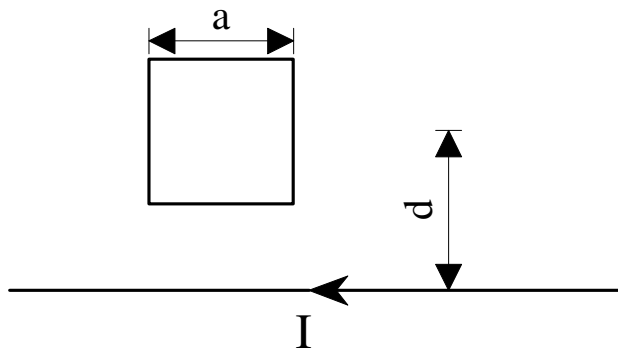


FIG. 28 – Représentation schématique du détecteur le plus simple : un fil unique.

anneaux (des carrés de côté a), et ceux-ci sont disposés le long du fil, à une distance d (voir figure 28). La mutuelle entre les deux est donnée par :

$$M = \frac{\mu_0}{2\pi} a \log \frac{2d + a}{2d - a} \quad (150)$$

Pour $d = a = 2\mu\text{m}$, on trouve $M = 6.6 \cdot 10^{-13} \text{H}^{21}$. De plus, afin de limiter le rayonnement du détecteur, on lui adjoint une ligne de masse, parallèle au premier fil, et qui transporte un courant opposé. Enfin, afin de réduire l’encombrement de l’ensemble (et de limiter encore le rayonnement), la ligne bifilaire que constitue le détecteur est repliée sur elle-même, comme il est présenté sur la figure 29.

²¹. Un calcul plus précis, esquissé à la fin du chapitre, donne une valeur de $1.5 \cdot 10^{-13} \text{H}$.

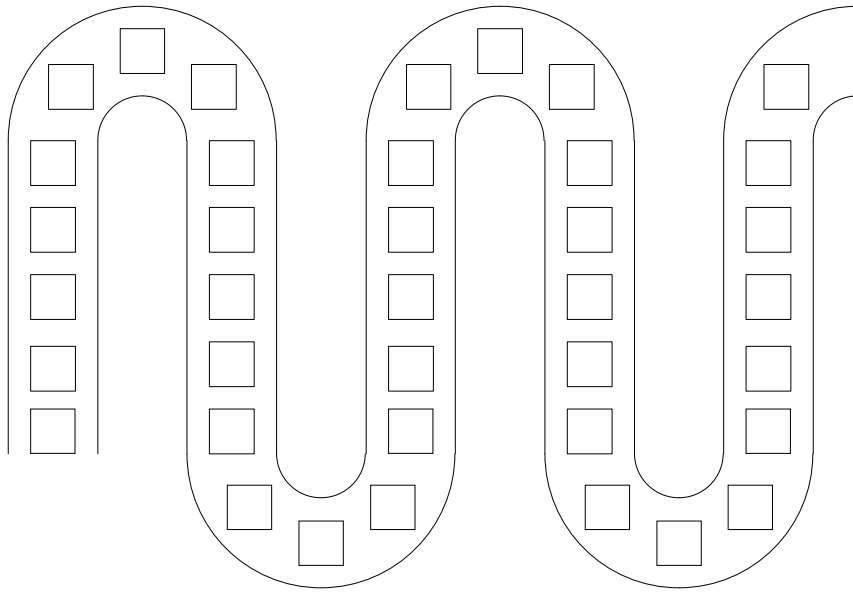


FIG. 29 – Représentation schématique du détecteur constitué d'une ligne bifilaire repliée.

3.1.3 Le choix d'une méthode résonante

Il s'agit maintenant de mesurer avec la plus grande précision possible la variation d'impédance de notre détecteur. Nous avons pour cela choisi d'utiliser une méthode résonante : la ligne bifilaire nue a une certaine résistance R , une inductance L et une capacité répartie C . Elle se comporte près de la résonance comme le circuit RLC présenté sur la figure 30, ayant une impédance Z définie par²² :

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R + iL\omega} + iC\omega \quad (151)$$

Ce circuit résonne à la fréquence f_0 définie par :

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (152)$$

pour laquelle $1/|Z_0|^2$ est minimum. Pour $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ avec $\delta\omega \ll \omega_0$ l'impédance du circuit s'écrit :

$$Z = \frac{RQ^2}{1 + 2iQ\frac{\delta\omega}{\omega_0}} \quad (153)$$

où facteur de qualité Q de cette résonance est donné par :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} \quad (154)$$

22. Les valeurs de la résistance, de l'inductance et de la capacité du circuit équivalent ne sont pas celles de la ligne ; cependant, pour ce qui nous concerne ici on peut assimiler les deux.

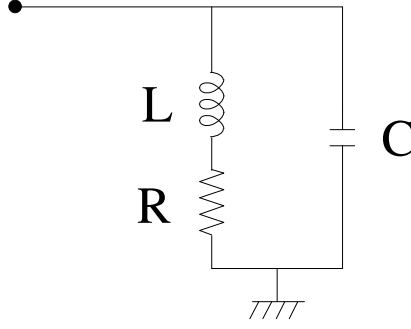


FIG. 30 – Circuit équivalent du résonateur près de la résonance (i.e. pour $\delta\omega \ll \omega_0$).

Pour mesurer $\delta Z_1 = \delta R + i\omega\delta L$ on mesure les variations de ω_0 et de Q , qui y sont reliés par :

$$\begin{aligned} \frac{\delta\omega_0}{\omega_0} &= -\frac{1}{2} \frac{\delta L}{L} \\ \frac{\delta Q}{Q} &= -\frac{\delta R}{R} + \frac{1}{2} \frac{\delta L}{L} \end{aligned} \quad (155)$$

De plus on a :

$$\frac{\delta R/R}{\delta L/L} = Q \frac{\Re \delta Z_1}{\Im \delta Z_1} \gg 1 \quad (156)$$

si $\Re \delta Z_1 \approx \Im \delta Z_1$. La variation de Q ne contient alors plus que la partie dissipative de δZ_1 :

$$\frac{\delta Q}{Q} \simeq -\frac{\delta R}{R} \quad (157)$$

ce qui permet de séparer les termes en $\delta\omega_0$ et δQ dans la mesure de δL et δR :

$$\begin{aligned} \Im \delta Z_1 &= \omega_0 \delta L = -2L\delta\omega_0 = -2L\omega_0 \frac{\delta\omega_0}{\omega_0} \\ \Re \delta Z_1 &= \delta R = -L\omega_0 \frac{\delta Q}{Q^2} \end{aligned} \quad (158)$$

Il reste maintenant à voir comment nous allons pouvoir mesurer les quantités $\delta\omega_0$ et δQ en fonction du champ magnétique et de la température.

3.1.4 Principe de la mesure de $\delta\omega_0(H, T)$ et $\delta Q(H, T)$

Les méthodes de mesure qui suivent sont valables quel que soit le type du résonateur utilisé, elles ne sont en aucun cas particulières à notre choix. Pour mesurer les caractéristiques d'un résonateur, il est bien-sûr nécessaire de le connecter à une source. Considérons donc un générateur de courant I à la pulsation ω connecté au résonateur. La puissance absorbée par ce dernier vaut :

$$\mathcal{P}_{abs} = \frac{I^2}{2} \Re Z_0(\omega) = \mathcal{P}_0 \eta(x) \quad (159)$$

où $\mathcal{P}_0 = \frac{1}{2}Q^2 RI^2$ désigne la puissance dissipée à la résonance et $\eta(x)$ est définie par (dans le cas $Q \gg 1$, $\delta x \ll 1$) :

$$\eta(x) = \frac{1}{1 + 4Q^2(\delta x)^2} \quad (160)$$

où $x = \omega/\omega_0$ désigne la pulsation réduite et $\delta x = \delta\omega/\omega_0$. Il s'agit d'une lorentzienne centrée en $\delta x = 0$ et de largeur Q^{-1} .

Si maintenant on a en plus $\delta x \ll Q^{-1}$ on peut linéariser $\eta(x)$ en :

$$\eta(x) \approx 1 - 4Q^2(\delta x)^2 \quad (161)$$

Une mesure de δx nous est simplement donnée par :

$$\frac{\partial\eta(x)}{\partial x} = -8Q^2\delta x \quad (162)$$

Cette mesure sera d'autant plus sensible que Q est grand. Pour y avoir accès expérimentalement il suffit de *moduler la fréquence du générateur* de manière sinusoïdale à la pulsation Ω_{FM} de sorte que²³ :

$$x = 1 + \delta x + a \sin \Omega_{FM}t \quad (163)$$

Pour $\Omega_{FM} \ll \omega_0/Q$, $\eta(x)$ s'écrit :

$$\eta(x) = 1 - 4Q^2(\delta x)^2 - 8Q^2\delta x a \sin \Omega_{FM}t - 4Q^2 \sin^2 \Omega_{FM}t \quad (164)$$

En mesurant la partie de $\eta(x)$ à la fréquence Ω_{FM} (à l'aide d'une détection synchrone) on a justement accès au terme voulu. Ce signal semble être d'autant plus grand que a est grand, et être indépendant de Ω_{FM} . Cependant si a est grand on sort de l'approximation effectuée ici, et on trouve qu'il y a un optimum pour les valeurs de a et Ω_{FM} : $\Omega_{FM} \approx \omega_0/2Q$ et $a \approx \Omega_{FM}$.

Dans le paragraphe précédent on a regardé la réponse du résonateur à une petite variation de la fréquence d'excitation. Ceci est équivalent à considérer une fréquence d'excitation fixe et une variation de la fréquence de résonance qui, pour le cas qui nous concerne, est associée à une modification δL de l'inductance de la ligne. Mais on a toujours supposé que le facteur de qualité n'était pas altéré (ce qui correspond, comme on l'a vu, à $\delta R=0$). Revenons maintenant sur cette dernière hypothèse en calculant la puissance absorbée pour une variation $\delta\omega_0$ de la fréquence de résonance et une variation δQ du facteur de qualité :

$$\frac{\mathcal{P}_{abs}}{\mathcal{P}_0} \approx 1 - 2\frac{\delta Q}{Q} - 4\left(\frac{\delta\omega_0 Q}{\omega_0}\right)^2 \quad (165)$$

qui est valable pour $\delta\omega_0 \ll \omega_0/Q$ et $\delta Q/Q \ll 1$. L'effet relatif des termes en δQ et $\delta\omega_0$ du développement précédent est donné par :

$$\frac{\delta Q/Q}{Q^2(\delta\omega_0/\omega_0)^2} \approx \frac{Q}{\delta Q} \gg 1 \quad (166)$$

en utilisant le fait que

$$\frac{\delta\omega_0}{\omega_0} \approx \frac{\delta L}{L} \approx \frac{1}{Q} \frac{\delta R}{R} \approx \frac{\delta Q}{Q^2} \quad (167)$$

23. Il s'agit en réalité d'une *modulation de phase* d'amplitude $\Delta\varphi = a\omega_0/\Omega_{FM}$: le spectre du générateur comporte des satellites de part et d'autre de ω_0 . On peut négliger cet effet et considérer une pulsation instantanée qui dépend du temps, comme il est présenté ici, si la rotation de phase provoquée par la modulation est faible, i.e. $a \ll \Omega_{FM}/\omega_0$.

L'effet de la variation de la fréquence de résonance a donc une influence négligeable sur la puissance absorbée en comparaison de celui de la variation du facteur de qualité. Corrélativement la puissance absorbée est une bonne mesure de δQ . Mais si l'on ajoute à tout cela une modulation de la fréquence du générateur, soit $\omega = \omega_0 + a \sin \Omega_{FM} t$, le signal mesuré devient :

$$\frac{\mathcal{P}_{abs}}{\mathcal{P}_0} \approx 1 - 2 \frac{\delta Q}{Q} - 4Q^2 \left(\frac{\delta\omega_0 - a \sin \Omega_{FM} t}{\omega_0} \right)^2 \quad (168)$$

On observe que la partie continue de la puissance absorbée est une mesure de δQ tandis que la partie modulée à Ω_{FM} est une mesure de $\delta\omega_0$. On a donc là une méthode de mesure qui permet de bien séparer les contributions de $\langle \Re G \rangle$ et de $\langle \Im G \rangle$.

Afin d'améliorer le rapport signal sur bruit de la mesure de δQ , on a intérêt à travailler à fréquence finie plutôt qu'à fréquence nulle. Pour cela il suffit de *moduler l'amplitude du générateur* à une fréquence Ω_{AM} telle que $\Omega_{AM} \ll \Omega_{FM}$. En filtrant les hautes fréquences (Ω_{FM}) on a accès à la composante à Ω_{AM} du signal (par détection synchrone) qui nous livre δQ . Une détection synchrone à Ω_{FM} ne sera pas affectée par la modulation d'amplitude et nous donnera accès à $\delta\omega_0$. De plus, on gagnera encore en rapport signal sur bruit en modulant un paramètre externe : le champ magnétique statique vu par la ligne.

Enfin, plutôt que de mesurer $\delta\omega_0$ sur le signal, on préférera *asservir le générateur sur la résonance*, de sorte que l'on ait toujours $\omega = \omega_0 + \delta\omega_0 + a \sin \Omega_{FM} t$. Pour cela on utilisera comme signal d'erreur le résultat de la démodulation à Ω_{FM} , qui comme on l'a vu (Cf équation (162)) fournit un signal proportionnel à l'écart à la résonance et dont le signe indique le sens de la correction à apporter. L'asservissement se fera à l'aide d'un montage à "Proportionnelle-Intégrale" classique. On trouvera sur la figure 31 un schéma du dispositif expérimental assurant l'asservissement du générateur HF sur la résonance de la ligne. Enfin, afin que l'asservissement suive la modulation du champ magnétique, il faut que la période de celle-ci soit grande par rapport à la constante de temps de la boucle d'asservissement, soit de l'ordre de la milliseconde. Cependant le chauffage dû aux courants de Foucault dans le porte-échantillon nous oblige à moduler le champ beaucoup plus lentement, à une fréquence de l'ordre du hertz.

Nous n'avons pas évoqué le problème de la mesure de la puissance absorbée. En réalité on préférera mesurer la puissance réfléchie par la ligne (la somme de ces deux dernières étant égale à la puissance émise par le générateur) : elle se fera (après amplification H.F., évidemment) à l'aide d'un mixeur, qui effectue le produit du signal du générateur par celui provenant du résonateur. On détecte alors la tension aux bornes du résonateur plutôt que la puissance qu'il absorbe, mais les conclusions précédentes restent valables. Un schéma de la méthode de mesure de la puissance réfléchie est donné sur la figure 32.

3.1.5 Le couplage générateur-résonateur

Nous n'avons pas abordé le problème du couplage entre le générateur et le résonateur. En effet, si l'on connecte directement l'un à l'autre, les pertes du circuit sont dues non seulement à la résistance R de la ligne seule, mais aussi à la résistance interne du générateur (sans compter celles du détecteur et des fils d'amenée) R_{ext} . Pour voir l'effet de R_{ext} utilisons la représentation de notre résonateur en un circuit RLC parallèle (dont la résistance est $Q^2 R$), donné sur la figure 33a. On voit aisément que, si la fréquence de

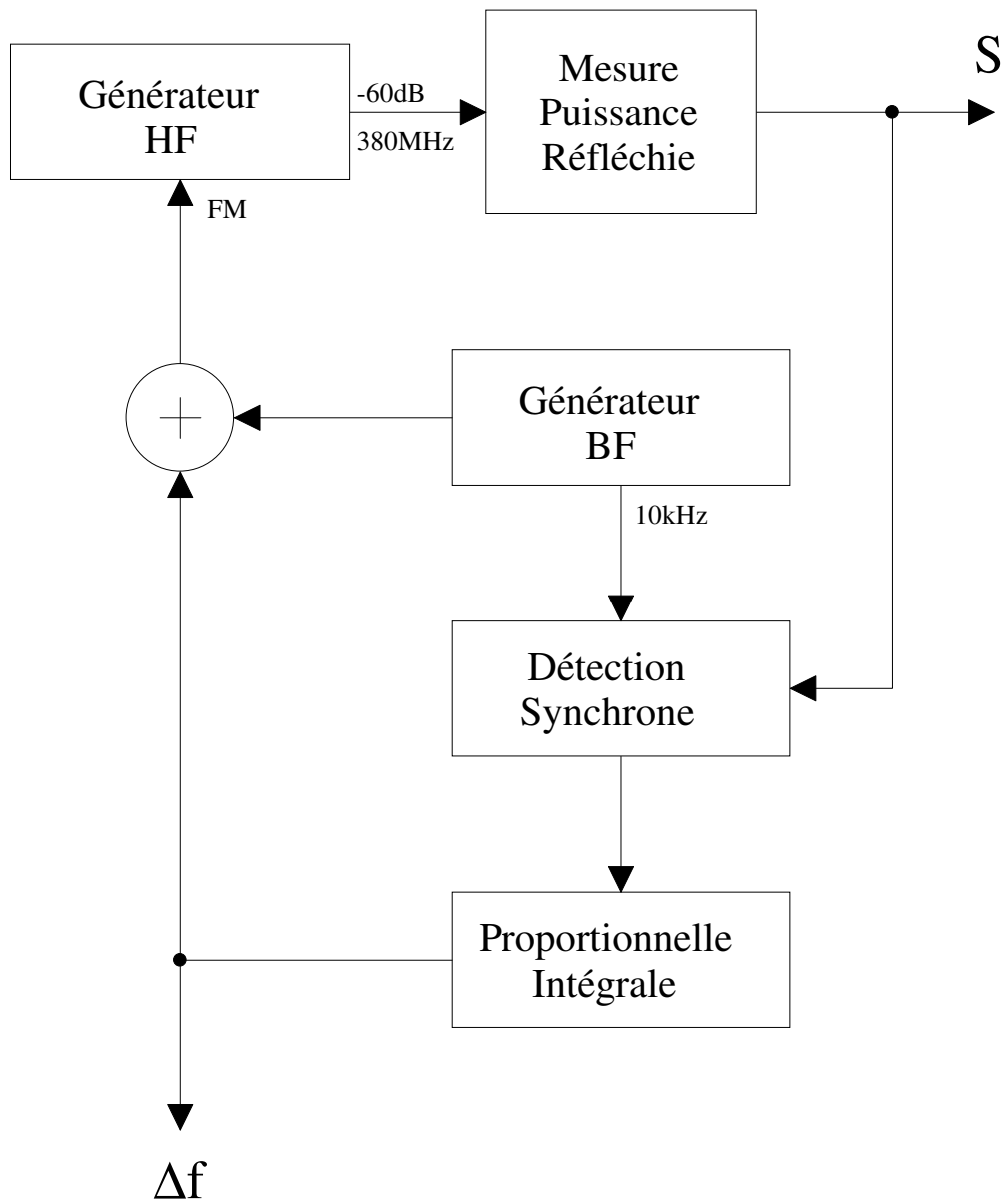


FIG. 31 – Schéma du dispositif expérimental permettant l'asservissement du générateur HF sur la résonance de la ligne.

résonance reste inchangée, la résistance responsable de la dissipation devient :

$$\frac{1}{R} \rightarrow \frac{1}{R} + \frac{Q^2}{R_{ext}} \quad (169)$$

Ceci a pour effet de modifier le facteur de qualité de la résonance de telle sorte que :

$$\frac{1}{Q'} = \frac{1}{Q} + \frac{1}{Q_{ext}} \quad (170)$$

où $Q = L\omega_0/R$ désigne le facteur de qualité du résonateur seul et $Q_{ext} = R_{ext}/L\omega_0$ celui du reste du circuit. Etant donné que $R_{ext} \ll Q^2R$ on voit que le facteur de qualité de l'ensemble est déterminé essentiellement par R_{ext} et non plus par le résonateur lui-même.

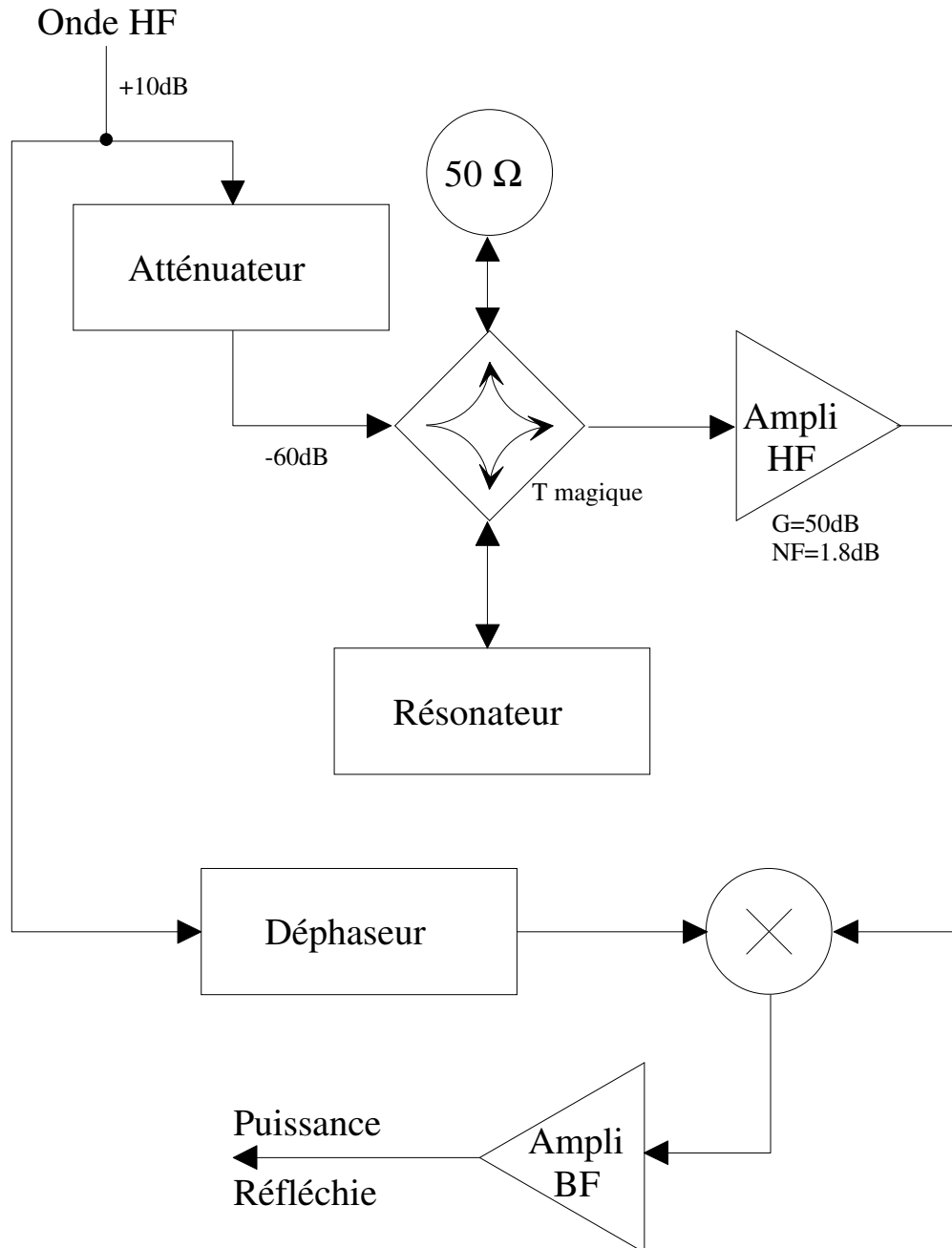


FIG. 32 – Schéma du dispositif expérimental assurant la mesure de la puissance réfléchie par la ligne à l'aide d'un mixeur.

Aussi, afin d'éviter ceci, on intercale un élément de couplage (capacitif ou inductif) entre le résonateur et le reste du circuit (voir la figure 33b). Ainsi le résonateur ne voit plus les éléments dissipatifs du circuit, et son facteur de qualité est restauré. Corrélativement, la puissance qu'il absorbe est réduite d'autant, et sa mesure devient plus délicate. Nous avons

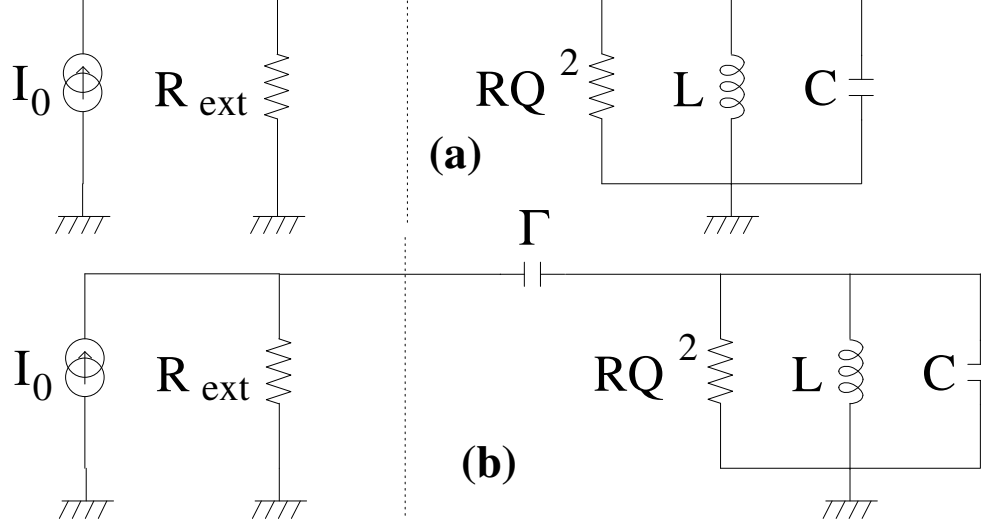


FIG. 33 – (a) : autre schéma électrique équivalent au résonateur pour une fréquence proche de la résonance (et $Q \gg 1$). La résistance qui entre en jeu ici est Q^2R au lieu de R dans le schéma précédent, R étant la résistance du résonateur, qui est petite devant $L\omega_0$ si $Q \gg 1$. (b) : schéma représentant le couplage du générateur hyperfréquence de résistance interne R_{ext} à la ligne résonante à travers une capacité Γ .

adopté la technique de *mesure par réflexion* qui consiste à mesurer la puissance réfléchie par la ligne. Celle-ci est minimale à la résonance, et sa valeur dépend du couplage choisi : le couplage optimum correspond à une annulation de la puissance réfléchie, et est obtenu pour une capacité de couplage Γ déterminée par :

$$\omega_1^2 \Gamma^2 R R_{ext} = 1 \quad (171)$$

où ω_1 est la nouvelle fréquence de résonance, légèrement déplacée par le couplage et déterminée par :

$$L(C + \Gamma)\omega_1^2 = 1 \quad (172)$$

Etant donné que la puissance réfléchie s'annule alors, la détection du signal dû à l'échantillon est une détection *sur fond noir*. De plus, le couplage optimum réalise l'adaptation d'impédance de la ligne, et correspond au minimum de la figure de bruit des amplificateurs HF.

Cependant il provoque une diminution du facteur de qualité d'un facteur 2. Aussi on pourra avoir intérêt à être sous-couplé, pour conserver le Q de la ligne. La puissance réfléchie fait alors intervenir l'écart à 50Ω de l'impédance de la ligne vue à travers la capacité de couplage Γ . La discussion concernant l'optimisation expérimentale de ce couplage sera faite ultérieurement.

3.1.6 Particularités de notre résonateur

On a jusqu'ici raisonné sur un circuit RLC ordinaire, qui est un bon modèle pour décrire la résonance de la ligne. Cependant cette dernière ne présente pas qu'une seule fréquence de résonance mais un ensemble, ou chacune des fréquences de résonance f_n est un multiple du fondamental f_0 :

$$f_n = (n + 1)f_0 \quad (173)$$

où $n = 0, 1, 2, \dots$. Pour des fréquences proches d'une fréquence f_n on peut modéliser le résonateur par un circuit RLC. Plus précisément, si la paire de fils est ouverte à chaque extrémité (ce qui correspond à notre configuration expérimentale), les points extrêmes des fils correspondent à des noeuds de courant, de sorte qu'il y a résonance chaque fois que $l = n\lambda_n/2$ ou l désigne la longueur des fils et λ_n la longueur d'onde à la fréquence f_n . On vérifie expérimentalement cette relation jusqu'à $n = 7$, ce qui prouve que le fait d'avoir replié la ligne sur elle-même a peu d'influence sur les modes de propagation de l'onde électro-magnétique, du moins pour les premiers modes du résonateur. La longueur de la ligne est calculée en fonction de la fréquence du fondamental désiré :

$$l = \lambda_0/2 \Rightarrow \omega_0 = \pi c / (l \sqrt{\epsilon_r^{eff}}) \quad (174)$$

où c désigne la vitesse de la lumière dans le vide et ϵ_r^{eff} la constante diélectrique effective du milieu. Si l'on considère que le substrat, de constante diélectrique ϵ_r , remplit un demi espace, on a [79] :

$$\epsilon_r^{eff} = \frac{1 + \epsilon_r}{2} \quad (175)$$

Pour $l = 20\text{cm}$, on trouve $f_0 = 320\text{MHz}$ pour un substrat de saphir pour lequel $\epsilon_r \approx 10$. On trouvera sur la figure 34 la courbe de résonance d'une ligne de niobium sur saphir.

L'inductance L et la capacité C de notre ligne bifilaire peuvent être estimées en modélisant les conducteurs par deux cylindres infinis parallèles de rayon a dont les génératrices sont séparés par une distance d . La capacité de ces deux cylindres est aisément calculable, et vaut dans le vide [80] :

$$C_{vide} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\arg \cosh \left(\frac{d^2}{2a^2} - 1 \right)} \approx \frac{\pi\epsilon_0 l}{\log(d/a)} \quad (176)$$

En présence du substrat, la capacité réelle de la ligne s'écrit $C = C_{vide}\epsilon_r^{eff}$. En prenant $a = 1\mu\text{m}$ et $d = 6\mu\text{m}$ on obtient $C \approx 20\text{pF}$. Pour calculer l'inductance, on utilise la relation $LC_{vide} = l^2/c^2$ valable²⁴ pour la propagation d'une onde TEM dans un guide multiplement connexe [80]. On obtient $L \approx 0.1\mu\text{H}$.

Si l'impédance du résonateur est adaptée (50Ω) à la résonance, il absorbe toute la puissance \mathcal{P}_G fournie par le générateur, soit :

$$\mathcal{P}_G = \frac{1}{2}Q^2 RI^2 = \frac{1}{2}LI^2 \frac{\omega_0}{Q} \quad (177)$$

Cette relation nous permet de calculer le courant I circulant dans la ligne à la résonance ; pour une puissance fournie de 1nW (-60dB) et un Q de 80000 , on trouve $I = 140\mu\text{A}$. Ceci nous permet de calculer le flux magnétique HF à l'intérieur de l'anneau : $\delta\Phi = MI$ où M est la mutuelle entre la ligne et l'anneau (qui vaut le double de celle entre un fil et l'anneau). A partir de la valeur de M calculée précédemment, on obtient que le flux alternatif vaut $\delta\Phi = 0.05\Phi_0$. On a donc bien $\delta\Phi \ll \Phi_0$, condition de validité de la réponse linéaire.

²⁴. Cette relation est valable en présence d'effet Meissner, i.e. pour un métal parfait ou un supraconducteur, ce qui correspond à notre situation expérimentale.

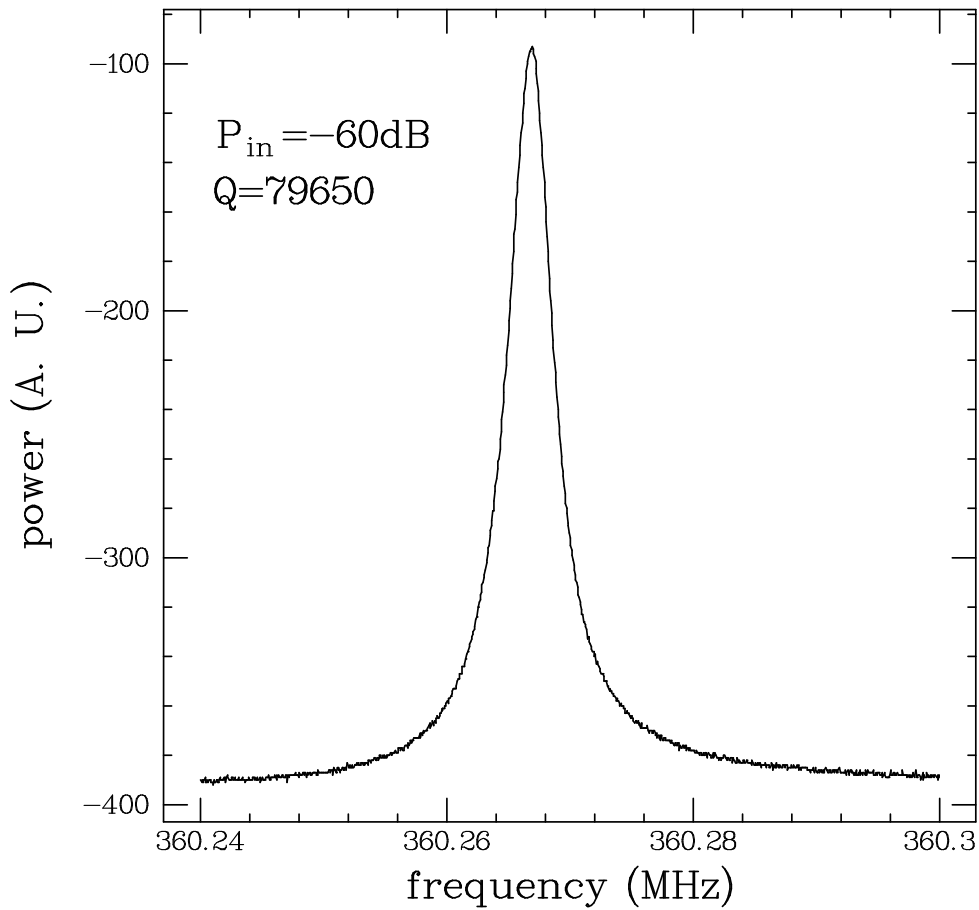


FIG. 34 – Courbe expérimentale de la puissance réfléchiée par une ligne résonante de niobium sur saphir à $T = 50\text{mK}$.

3.2 Etude du détecteur nu

Le but de cette partie est de présenter la réalisation de la ligne bifilaire ainsi que ses caractéristiques et performances.

3.2.1 Le choix du matériau constitutif

La volonté d’avoir un résonateur avec un haut facteur de qualité nous oblige à utiliser un matériau supraconducteur. A ce choix est associé un inconvénient majeur qu’il faut surmonter : le comportement du résonateur nu dépend de la température et du champ magnétique appliqué, via la longueur de pénétration de London (pour la fréquence) et le gap (pour ce qui est du facteur de qualité) du supraconducteur. Le type de matériau utilisé a des conséquences sur ce phénomène : on a intérêt à utiliser un supraconducteur ayant une température critique et un champ critique les plus élevés possibles. Ce pourquoi nous avons utilisé du niobium, dont les caractéristiques pour le matériau massif sont :

$$T_c = 9.2\text{ K} \quad H_{c1} \approx 1000\text{ G} \quad (178)$$

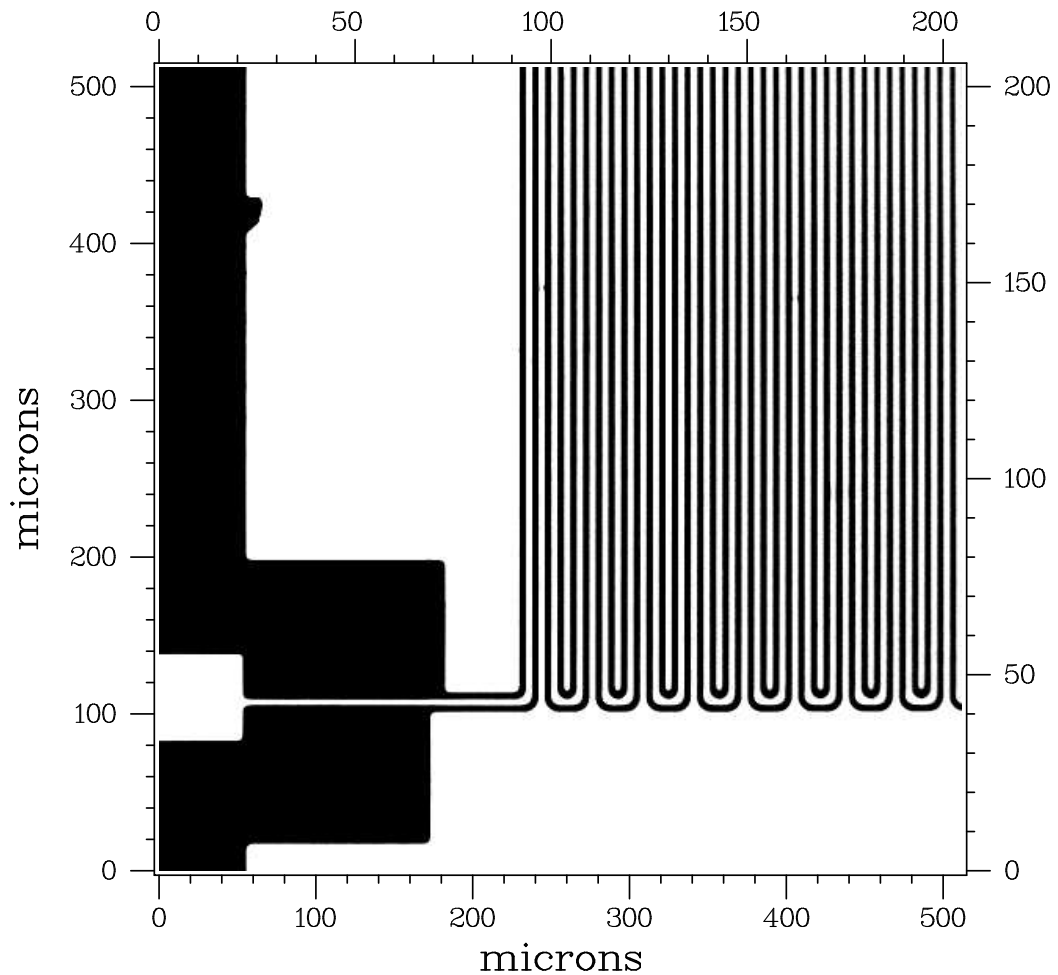


FIG. 35 – Photographie partielle de la ligne obtenue par microscopie optique.

De plus, des essais sont possibles à la température de l'hélium liquide, ce qui facilite la mise au point.

On peut noter que les supraconducteurs à haute température critique eussent été de bons candidats s'il eût été possible de faire des fils très fins à partir de couches minces. Il semble malheureusement difficile à l'heure actuelle d'avoir des fils de quelques microns de largeur.

3.2.2 Méthode de fabrication

Les lignes bifilaires que nous avons réalisées sont constituées de deux fils de niobium juxtaposés sur un substrat. Chaque fil a une longueur de 20cm, une largeur de $2\mu\text{m}$ et une épaisseur qui peut aller jusqu'à $1\mu\text{m}$. Deux fils adjacents sont séparés de $4\mu\text{m}$. Une vue partielle obtenue par microscopie optique en est donnée sur la figure 35. Nous avons nous-mêmes fabriqués ces résonateurs par lithographie optique dans la salle blanche du SPEC, CEA, Orme des Merisiers à Saclay, à partir d'un masque réalisé par D. Mailly au L2M à Bagnex. Les méthodes employées à cet effet sont schématiquement présentées

sur la figure 36. Une fois les lignes préparées il reste à tester leur intégrité à température ambiante (vérifier que chaque fil n'est pas coupé et que les deux fils ne se touchent pas) et leurs caractéristiques (facteur de qualité, fréquences de résonance) à l'hélium liquide. En effet les motifs réalisés sont très sensibles à la présence d'une seule poussière de taille micronique durant n'importe laquelle des étapes de lithographie, ceci car les fils sont à la fois très longs et très fins. D'où il résulte un taux d'échec important sur la fabrication : seule une ligne sur quatre passe l'étape de test à chaud.

3.2.3 Le couplage avec le monde extérieur

On a vu l'importance du couplage entre le résonateur et le circuit de mesure sur le facteur de qualité. A ce problème se rajoute celui de la stabilité mécanique du couplage, en particulier sa sensibilité aux vibrations. Afin de minimiser la microphonie du montage nous avons décidé de réaliser un couplage capacitif où l'élément de couplage est lui-aussi lithographié, sur le même substrat que le résonateur. De plus, il est commode de pouvoir varier le couplage, et ce pour deux raisons : d'une part pour pouvoir chercher l'optimum qui correspond aux conditions expérimentales ; d'autre part parce que la valeur du couplage adéquat dépend de Q , qui peut être notablement différent à 100mK et à 4.2K. Pour ce faire nous avons utilisé plusieurs capacités en série, avec la possibilité de se connecter au niveau voulu. Le lien entre le fil d'arrivée de l'onde HF et la capacité de couplage se fait à l'aide d'un fil d'aluminium de $30\mu\text{m}$ de diamètre qui est soudé par ultrasons sur la capacité.

3.2.4 Effet du champ magnétique

Il est un autre paramètre que le choix du supraconducteur quant à la sensibilité du résonateur au champ magnétique ambiant : il s'agit de la géométrie. En effet, dans le cas qui nous concerne, le champ magnétique statique que l'on applique est perpendiculaire au plan de la ligne. Or celui vu par le supraconducteur est augmenté de celui créé par les supercourants (le champ "démagnétisant") qui font en sorte que le champ magnétique total soit nul au coeur du matériau. De ce point de vue la géométrie épaisse est bien plus favorable que la géométrie de plaque fine. Or le fait que les caractéristiques du supraconducteur se dégradent avec le champ magnétique (du fait de la diminution du gap) se traduit sur le facteur de qualité. Afin de minimiser cet effet (i.e. de diminuer la sensibilité du résonateur au champ magnétique appliqué) on tâche d'augmenter l'épaisseur des fils de niobium. La technologie du lift-off permet d'atteindre facilement des épaisseurs de l'ordre de $0.1\mu\text{m}$, mais il est difficile d'atteindre $1\mu\text{m}$. Aussi nous avons adopté une autre méthode : partant d'un film de niobium épais ($1\mu\text{m}$) obtenu par pulvérisation, on vient déposer par dessus une ligne fine en aluminium, par lift-off. Après cela on opère une gravure ionique réactive ("RIE"), qui consiste à attaquer la surface de niobium par un plasma de SF_6 . L'ion fluorure réagit rapidement avec le niobium tandis que l'attaque de l'aluminium est beaucoup plus lente. Aussi le film est-il gravé partout sauf sous les lignes d'aluminium. A la fin du procédé ne subsistent que des lignes épaisses de niobium recouvertes d'aluminium, que l'on dissout dans la soude. On obtient par ce procédé des motifs dont l'épaisseur est celle de la couche de départ, c'est à dire $1\mu\text{m}$.

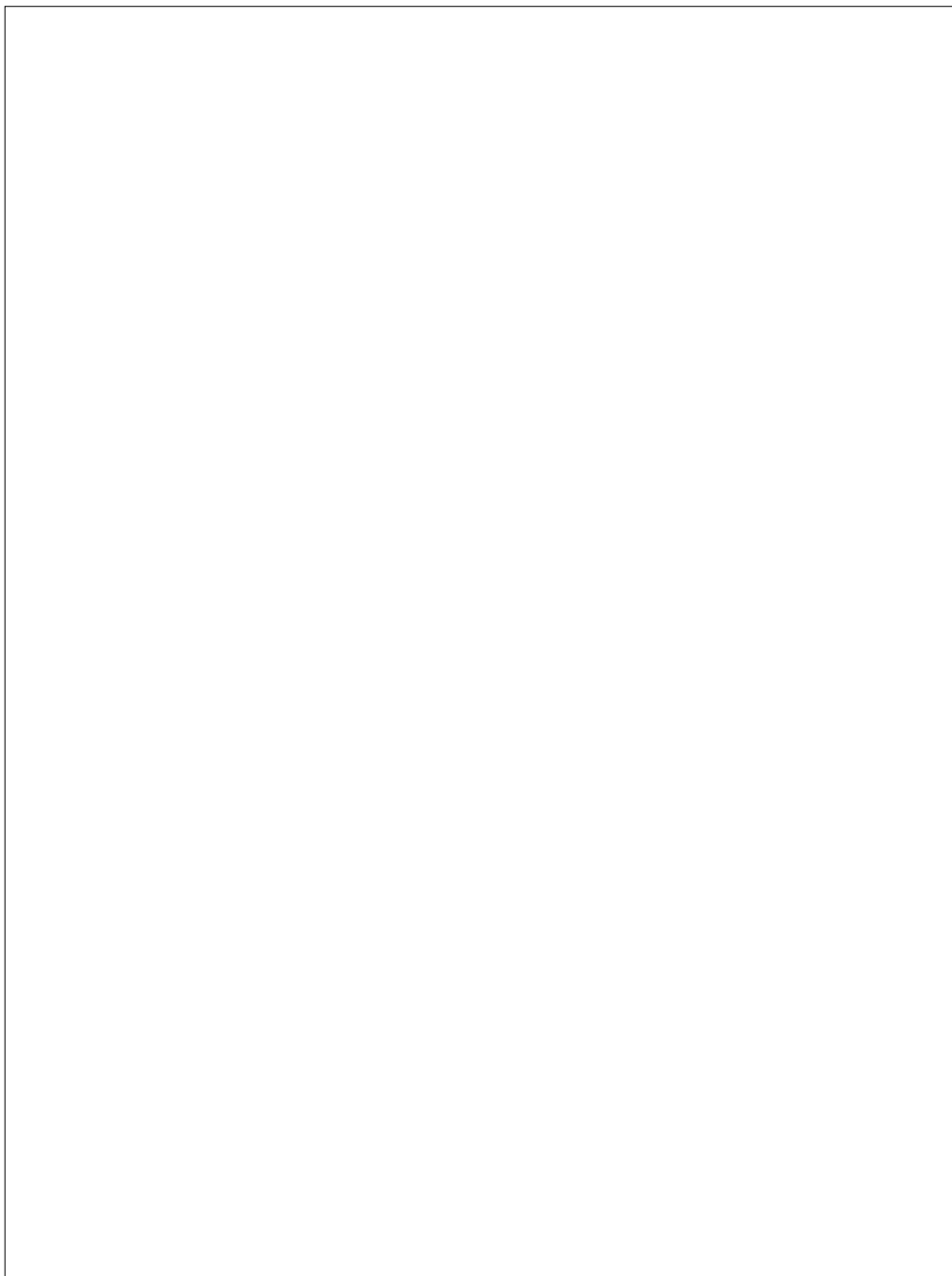


FIG. 36 – *Etapes de lithographie mises en oeuvre lors du procédé de lift-off.*

De plus les propriétés supraconductrices d'une couche épaisse sont meilleures que celles d'un film mince, tel qu'on peut l'obtenir par lift-off. En particulier la température de transition supraconductrice est proche de la valeur obtenue pour le matériau massif.

Une mesure de la sensibilité du résonateur au champ magnétique est donnée par le

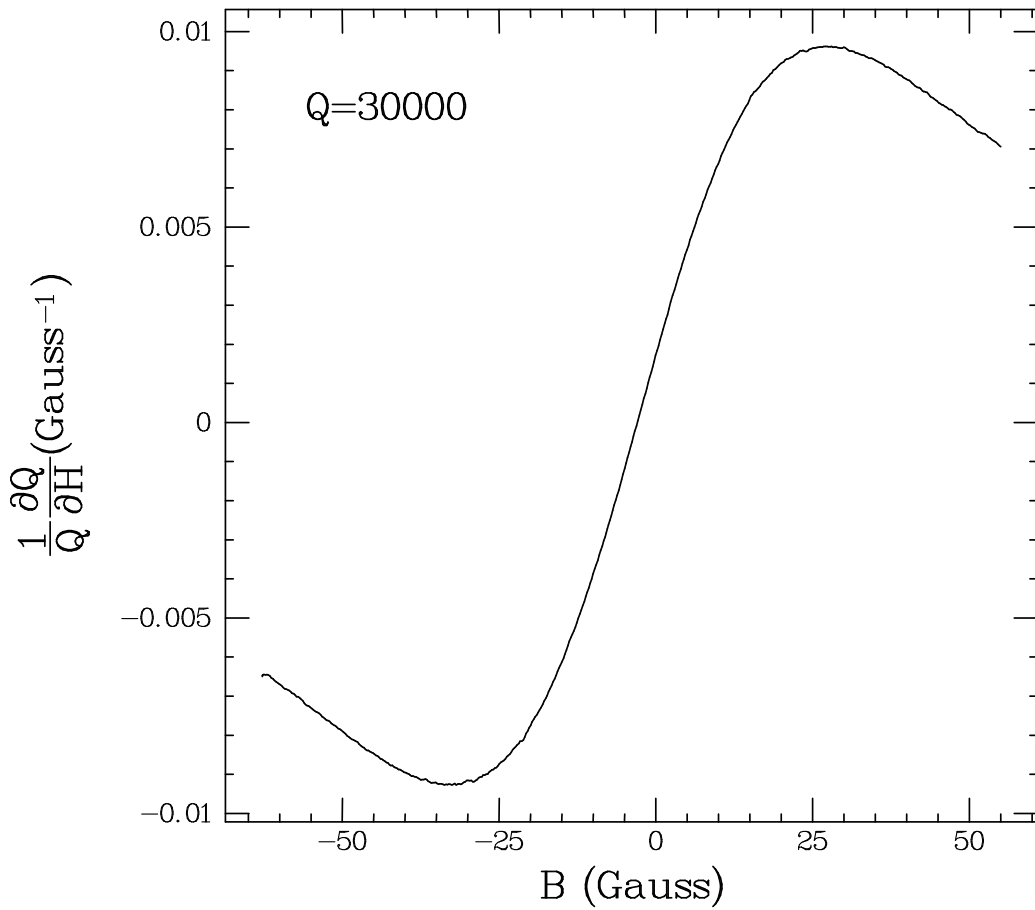


FIG. 37 – Evolution du facteur de qualité d'une ligne de niobium sur saphir en fonction du champ magnétique statique appliqué à $T = 4.2K$.

coefficient α défini comme suit :

$$\alpha = \left| \frac{\partial^2 Q}{\partial H^2} \right| \quad (179)$$

Le gain apporté par la fabrication de lignes épaisses vaut environ :

$$\frac{\alpha(0.1\mu\text{m})}{\alpha(1\mu\text{m})} \approx 10 \quad (180)$$

On trouvera sur la figure 37 l'effet résiduel du champ magnétique sur le facteur de qualité à 4.2K. Cette dépendance résiduelle est celle de la résistance de surface R_s du niobium qui, dans le cadre d'une théorie de Ginzburg-Landau est donnée par :

$$R_s(H) = R_s(0) \exp\left(\frac{1}{2} \frac{\Delta(0)}{T} \frac{H^2}{H_c^2}\right) \quad (181)$$

où $\Delta(0)$ désigne le gap du supraconducteur à température nulle et H_c sont champ critique. De plus, les résistances de surface que nous obtenons sont compatibles avec celles usuellement obtenues sur des couches minces.

Nous sommes intéressés par l'obtention d'un résonateur peu sensible au champ appliqué. Si à l'inverse on désire un détecteur très sensible au champ magnétique, il suffit de

faire un résonateur fin utilisant un supraconducteur à champ critique faible.

3.2.5 Effet de la température

La température est un autre facteur qui joue sur l'état supraconducteur du niobium, en changeant la longueur de pénétration de London. Lorsque la température diminue, le champ est mieux expulsé de sorte que le facteur de qualité augmente ; concomitamment le diamagnétisme s'améliore entraînant une augmentation de la fréquence de résonance. Ceci pour l'influence directe de la température. Mais cette dernière a aussi une influence sur l'environnement de la ligne : le substrat. En effet, si celui-ci contient des dipôles paramagnétiques ou paraélectriques, leur susceptibilité diverge comme $1/T$ à basse température, entraînant une diminution importante de la fréquence de résonance lorsque la température diminue. Il faut donc optimiser le choix du substrat sur lequel le dépôt de niobium est effectué. Nous avons essayé quatre types de matériaux différents :

- *la silice* : il s'agit d'un matériau amorphe qui contient de nombreux centres paraélectriques, et s'est avérée être un très mauvais candidat.
- *le silicium* : il contient peu d'impuretés, mais sa surface s'oxyde de sorte que la qualité du résonateur s'altère avec le temps.
- *l'arseniure de gallium* : la qualité du niobium obtenu sur ce substrat est mauvaise, de sorte que l'on est dominé par l'effet du diamagnétisme du supraconducteur. De plus, il est extrêmement difficile de faire adhérer la couche de niobium dessus.
- *le saphir* : c'est le matériau le meilleur que nous avons trouvé, qui contient quelques impuretés paramagnétiques mais en faible concentration. De plus c'est un substrat sur lequel le niobium fait des couches de très bonne qualité. C'est donc sur le saphir que nous avons fixé notre choix.

Les résultats obtenus pour la silice, le silicium oxydé et le saphir sont présentés sur la figure 38. On cherchait ici un substrat permettant au résonateur de dépendre peu de la température ; à l'inverse l'utilisation de la silice par exemple permet d'obtenir un thermomètre de très grande sensibilité.

Enfin la présence d'impuretés a permis d'estimer la puissance HF à partir de laquelle on chauffait l'échantillon : en effet, si la puissance HF envoyée est trop importante, la température du substrat est plus élevée que celle mesurée par le thermomètre, situé sur le porte-échantillon en cuivre. Dans ce cas la susceptibilité du substrat ne suit plus une loi de Curie en fonction de la température mesurée, mais une loi de la forme $\chi \propto 1/(T + T_0)$ où T_0 correspond au chauffage en question. La puissance à partir de laquelle cet effet disparaît dépend bien-sûr du substrat utilisé. Pour le silicium, on n'a plus de chauffage pour une puissance inférieure à -80dB .

3.2.6 Bruit et sensibilité ; signaux parasites résiduels

La fabrication de lignes en niobium épais sur saphir nous a permis d'obtenir des facteurs de qualité de l'ordre de 80000 à 100mK (soit 20000 à 4.2K). La fréquence de résonance varie de quelques MHz d'un échantillon à l'autre et pour un même échantillon d'un refroidissement à l'autre. Une valeur typique est $f_0 = 350\text{MHz}$. On observe les harmoniques de cette fréquence jusqu'à environ 2.5GHz. Le bruit sur la mesure de la

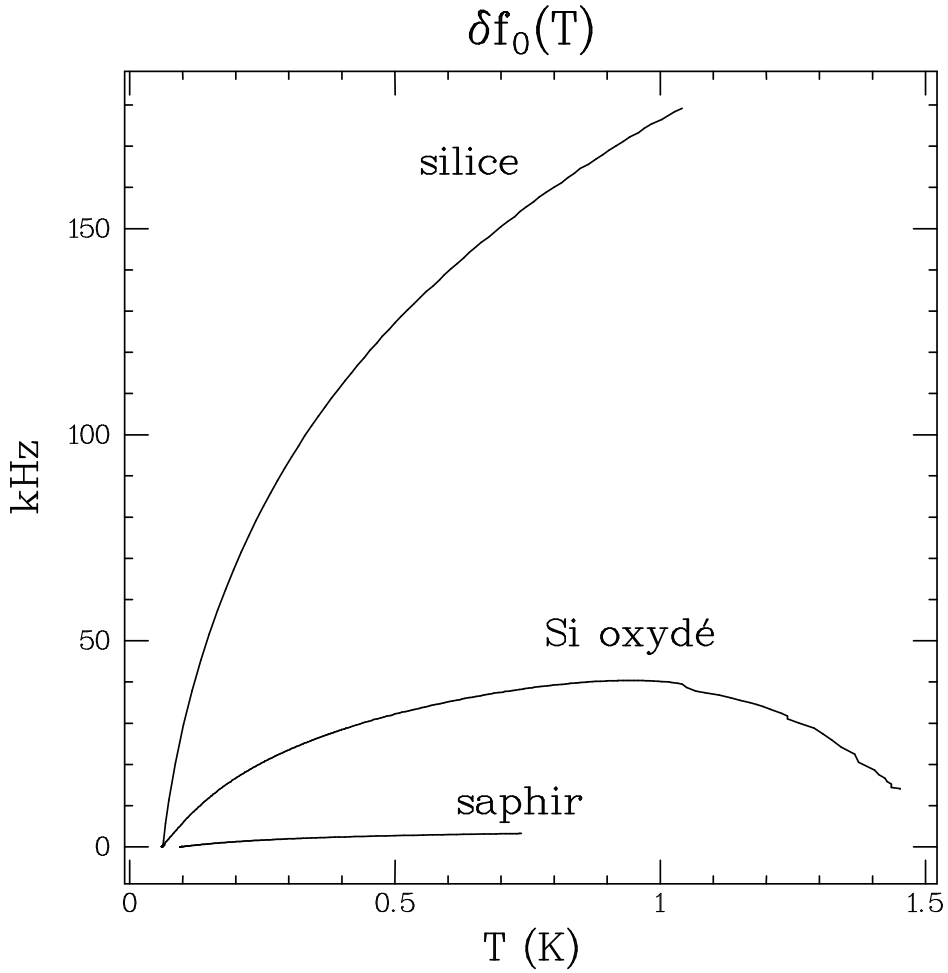


FIG. 38 – Evolution de la fréquence de résonance de la ligne en fonction de la température, pour différents substrats : la pente positive de la courbe à basse température correspond à l'effet paramagnétique (pour le saphir) ou paraélectrique (pour la silice et le silicium) des dipôles contenus dans le substrat. Dans le cas du silicium oxydé on notera la pente négative de la courbe à haute température, due au diamagnétisme du niobium.

fréquence est d'environ 0.3Hz tandis que celui sur Q est tel de l'ordre de $10^{-5}Q$. La sensibilité de notre détecteur est donc de :

$$\frac{\delta f_0}{f_0} \approx 10^{-9} \quad \frac{\delta Q}{Q^2} \approx 10^{-10} \quad (182)$$

Essayons d'estimer le signal attendu en présence des anneaux : pour ce qui est de la variation de fréquence, limitons-nous à l'effet de la susceptibilité des courants permanents. En supposant que seule la première harmonique du courant intervient (les autres étant supprimées par la perte de cohérence de phase), celui-ci s'écrit :

$$I_{per} \approx I_2 \sin 4\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (183)$$

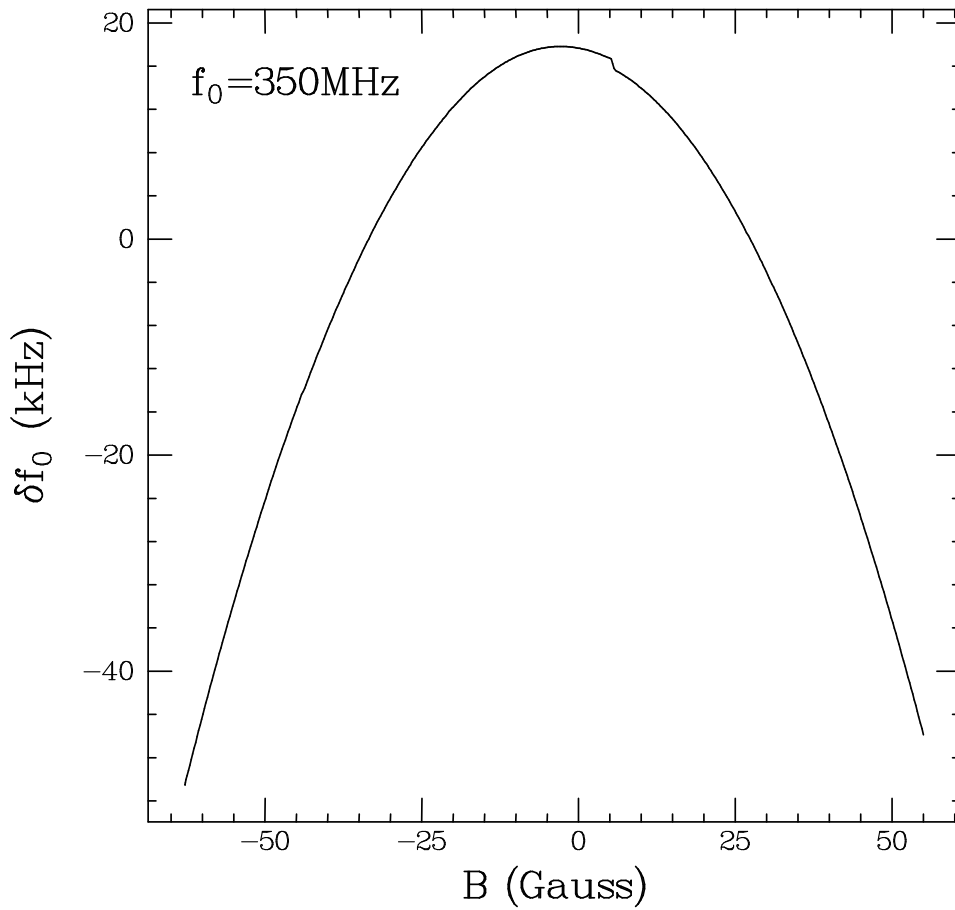


FIG. 39 – Evolution de la fréquence de résonance d'une ligne de niobium sur saphir en fonction du champ magnétique statique appliqué.

En prenant $I_2 = I_0 = ev_F/L \approx 5.2\text{nA}$ (v_F est obtenu par des mesures données dans le paragraphe suivant), on obtient une conductance par anneau de $\Im m G \approx 7 \cdot 10^{-3}\text{S}$ à 350MHz. Pour ce qui est de la partie réelle de la conductance, on va simplement estimer la valeur correspondant à la formule de Drude : à partir des données obtenues dans la section suivante, on obtient $G_0 \approx 6 \cdot 10^{-4}\text{S}$. Pour $N_a = 10^5$ anneaux couplés à la ligne avec une mutuelle de $2 \cdot 10^{-13}\text{H}$, on obtient la perturbation suivante :

$$\frac{\delta f_0}{f_0} \approx 2 \cdot 10^{-7} \quad \frac{\delta Q}{Q^2} \approx 4 \cdot 10^{-8} \quad (184)$$

Enfin il reste des signaux parasites dûs à la sensibilité résiduelle du résonateur au champ magnétique statique. L'effet du champ magnétique sur la fréquence du fondamental est présenté sur la figures 39 ; son effet sur le facteur de qualité à 50mK est très inférieur à celui à 4.2K présenté sur la figure 37.

3.3 L'échantillon

On a déjà insisté sur le fait que l'expérience présentée ici a un intérêt maximum pour un échantillon à spectre discret. Ceci nous amène à utiliser un semi-conducteur : en effet, dans le cas d'un métal l'écart entre deux niveaux est, pour un anneau de taille micronique, de l'ordre du microkelvin, soit toujours bien inférieur à la température et à l'élargissement inélastique. Il nous faut donc nous tourner vers les semi-conducteurs, et en particulier les hétérojonctions. On commencera par décrire ces objets, on précisera les grandeurs qui les caractérisent pour ensuite présenter les mesures que nous avons effectuées, en se concentrant uniquement sur la localisation faible et l'effet Aharonov-Bohm. On verra que nos échantillons ne s'inscrivent pas dans le cadre habituel de la localisation faible, mais que leur aspect semi-diffusif est à l'origine de courbes de magnétorésistance originales.

3.3.1 Présentation de l'hétérojonction $GaAs/GaAlAs$

La figure 40 présente les différentes couches semi-conductrices qui constituent l'hétérojonction[81]. Le $GaAs$ et le $GaAlAs$ sont deux semi-conducteurs de type III-V ayant des gaps différents. La présence d'impuretés de silicium en surface a un rôle double : le silicium étant un donneur dans ce contexte, il joue le rôle de dopant n ; de plus en créant une charge d'espace, il a pour effet de provoquer la stabilisation des électrons à l'*interface* entre le $GaAs$ et le $GaAlAs$, qui sont confinés dans un plan. On a affaire à un *gaz bidimensionnel d'électrons libres* dont la densité est de l'ordre de quelques 10^{11}cm^{-2} et dont la mobilité peut atteindre des valeurs de l'ordre de $10^6\text{cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$. Il s'agit réellement d'un plan, dont l'épaisseur est de l'ordre de λ_F .

A partir de ce plan conducteur, il suffit de graver par des techniques de lithographie électronique les motifs désirés : en enlevant une partie des donneurs situés en surface, on change le potentiel de confinement des électrons de sorte que, si la profondeur de gravure est suffisante, il n'y ait plus d'électrons sous les parties gravées. Cependant, étant donné que l'on n'agit ainsi pas directement sur le gaz électronique, mais que c'est par déplétion que l'on crée des canaux conducteurs, la largeur de ceux-ci n'est pas déterminé uniquement par la largeur du motif gravé. La "force" du potentiel de confinement intervient dans ce problème, et il faudra étalonner le processus de gravure pour obtenir un fil de largeur réelle donnée (la largeur réelle est toujours inférieure à la largeur gravée).

3.3.2 Paramètres caractéristiques

Les échantillons que l'on obtient par ce procédé sont caractérisés par un ensemble de paramètres électroniques. On peut diviser ces paramètres en deux groupes :

- ceux qui sont intrinsèques à l'hétérojonction : il s'agit de la masse effective m^* des électrons, de la densité électronique²⁵ n_e et de la vitesse de Fermi v_F .
- ceux qui peuvent être affectés par la gravure : le libre parcours moyen l_e , la longueur de cohérence de phase L_ϕ , et bien-sûr la largeur réelle du fil W (l'imprécision sur la longueur est négligeable tant qu'on s'intéresse à des fils longs).

²⁵ La gravure de l'hétérojonction provoque l'apparition de nombreux défauts cristallins ; ceux-ci peuvent être responsable du piégeage d'électrons, de sorte que la densité électronique du gaz gravé peut être légèrement inférieure à celle de l'hétérojonction initiale.

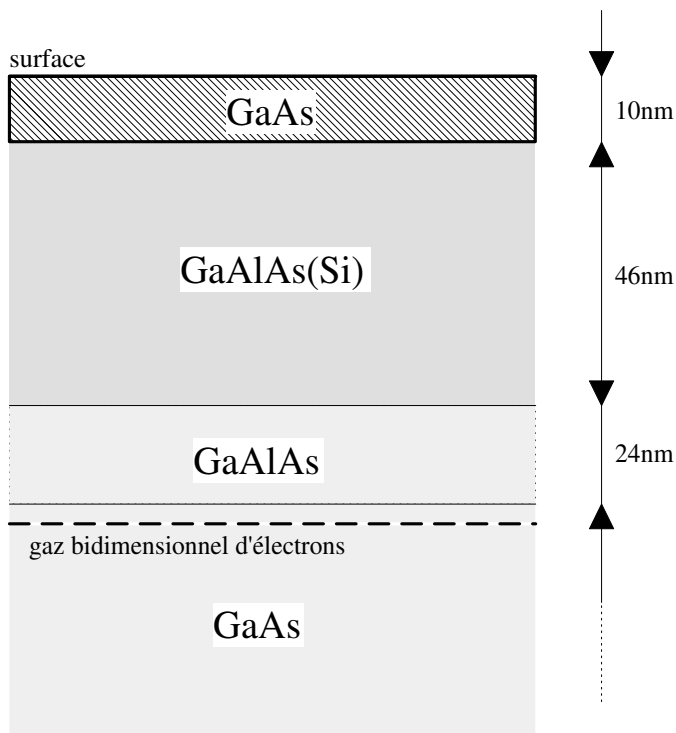


FIG. 40 – Vue en coupe des différentes couches semi-conductrices constitutives d'une hétérojonction. La couche superficielle (en haut) ne sert que de protection.

3.3.3 Mesures de transport

La détermination de ces paramètres pour les anneaux qui nous intéressent s'effectue par des expériences de transport. Ceci nous oblige à les connecter, ce qui est précisément ce que l'on s'est refusé de faire (le simple fait d'adjoindre des plots aux anneaux afin d'une éventuelle connexion brise la cohérence de phase). Aussi, au lieu de caractériser directement nos anneaux, on va effectuer les mesures sur d'autres échantillons *élaborés lors du même processus de fabrication*, de sorte que l'on ait l'assurance de l'identité du traitement subi.

La masse effective de l'électron est déterminée par la structure de bande du *GaAs* massif ; elle ne dépend pas de la fabrication de l'hétérojonction et vaut $m^* = 0.068 m_0$ où $m_0 = 9.10^{-31} \text{kg}$ désigne la masse de l'électron dans le vide. Pour connaître les autres paramètres, il faut effectuer un certain nombre de mesures que voici.

* *Mesure de la densité électronique*

Afin de déterminer la densité électronique n_e , on effectue des mesures d'effet Hall classique et quantique sur une croix d'une largeur de $20 \mu\text{m}$. La résistance de Hall à bas champ et les plateaux d'effet Hall quantique en champ fort (jusqu'à 5 Teslas) permettent de remonter à la densité électronique, soit : $n_e = 4.2 \cdot 10^{11} \text{cm}^{-2}$.

Afin de vérifier que ce chiffre ne dépend pas de la gravure, nous avons procédé à des mesures de magnétorésistance sur des fils fins en champ fort (effet Shubnikov-de Haas). La période des oscillations nous donne aussi accès à la densité de porteurs. On peut ainsi constater que n_e ne dépend pas trop de la gravure. Notons que les valeurs obtenues ainsi

tiennent naturellement compte du spin.

A partir de n_e on peut calculer les quantités liées au niveau de Fermi par :

$$k_F^2 = \frac{4}{s} \pi n_e \quad (185)$$

où $s = 2$ est la dégénérescence de spin. Ainsi pour le fil de $0.5\mu\text{m}$ on trouve $k_F^{-1} = 65\text{\AA}$ (soit $E_F = 150\text{K}$ et $v_F = 2.6 \cdot 10^5 \text{ms}^{-1}$).

* *Mesure du produit Wl_e*

Une mesure bien plus simple que la précédente consiste en la mesure de la conductance résiduelle (et donc à basse température) des fils en champ nul. Aux corrections de localisation faible près (qui sont négligeables), cette valeur est donnée par la formule de Drude :

$$G_0 = \frac{n_e e^2 \tau_e W}{m^* L} \quad (186)$$

où W désigne la largeur réelle du fil et L sa longueur. On peut réécrire cette formule en :

$$G_0 = \frac{s e^2}{2 \hbar} k_F W \frac{l_e}{L} \quad (187)$$

Cette mesure nous donne donc accès au produit Wl_e .

* *Mesure de W et L_ϕ*

Ces deux derniers paramètres sont déterminés par des expériences de localisation faible : on mesure la magnétoconductance d'un fil $G(B)$ pour diverses valeurs de la température T . A la valeur classique de Drude s'ajoute la correction de localisation faible $\delta G(B, T)$ qui s'écrit :

$$\frac{\delta G}{G_0} = -\frac{1}{\pi \hbar N(E_F)} \int_0^{+\infty} dt C(t) e^{-t/\tau_\phi} \left\langle \exp \left(2i\pi \frac{\Phi(t)}{\Phi_0} \right) \right\rangle \quad (188)$$

où $C(t)$ désigne la probabilité de retour à l'origine après un temps t , $\Phi(t)$ le flux enserré par une trajectoire fermée donnée et où la moyenne $\langle \dots \rangle$ désigne une moyenne sur toutes les trajectoires fermées (parcourues en un temps t). Pour un mouvement diffusif en dimension (effective) d , l'expression asymptotique de $C(t)$ est :

$$C(t) = (4\pi Dt)^{d/2} W^{d-3} \quad (189)$$

Pour les temps courts, cette probabilité doit s'annuler avec un temps caractéristique τ_e : on tient cet élément en compte en multipliant arbitrairement l'expression précédente par $1 - \exp(t/\tau_e)$. Si on a de plus :

$$\left\langle \exp \left(2i\pi \frac{\Phi(t)}{\Phi_0} \right) \right\rangle = \exp \left(-\frac{t}{\tau_B} \right) \quad (190)$$

on obtient l'expression suivante pour $d = 1$ ^{26 27 28} :

$$\delta G(B, T) = -\frac{e^2}{\pi \hbar L} \left[\left(\frac{1}{D\tau_\phi} + \frac{1}{D\tau_B} \right)^{-1/2} - \left(\frac{1}{D\tau_\phi} + \frac{1}{D\tau_B} + \frac{1}{D\tau_e} \right)^{-1/2} \right] \quad (191)$$

26. Les formules habituellement utilisées dans les métaux correspondent à $\tau_e \ll \tau_\phi$, ce qui n'est pas supposé ici. On retrouve bien l'expression courante en faisant tendre τ_e vers zéro.

27. Comme on l'a vu, la dimension effective d'un ruban d'épaisseur "nulle" et de largeur telle que $l_e \ll W \ll L_\phi$ ou telle que $W = 0$ est bien 1. Cependant le cas qui nous concerne correspond à $W < l_e \ll L_\phi$; la validité de la formule employée, qui d'après la référence [82] est correcte même pour les échantillons que nous avons étudiés, n'est expérimentalement pas si claire.

28. Dans la formule initialement dérivée dans la référence [83], le préfacteur π est remplacé par π^2 . Il semble que le bon facteur soit bien π .

Le facteur τ_B contient toute la dépendance en champ magnétique : il reflète l'atténuation de l'interférence des trajectoires électroniques déphasées par le champ magnétique. Il est donc inexistant en champ nul, et fait disparaître la correction de localisation faible en champ fort, soit :

$$\lim_{B \rightarrow 0} \frac{1}{D\tau_B} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{B \rightarrow \pm\infty} \left| \frac{1}{D\tau_B} \right| = +\infty \quad (192)$$

Notons $\delta\phi$ la phase acquise par un électron entre deux chocs. Dans le cas du métal ($W \gg l_e$), elle est de l'ordre de :

$$\delta\phi \approx 2\pi \frac{Bl_e^2}{\Phi_0} = \left(\frac{l_e}{l_m} \right)^2 \ll 1 \quad (193)$$

En effet, pour $l_e \approx 100\text{\AA}$ il faut atteindre un champ de 40T pour mettre un Φ_0 dans l_e^2 . L'incrément de phase entre deux chocs étant petit et aléatoire, on peut utiliser l'approximation gaussienne pour calculer la moyenne désirée, soit :

$$\left\langle \exp \left(2i\pi \frac{\Phi(t)}{\Phi_0} \right) \right\rangle = \exp -\frac{1}{2} \left\langle \left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 \right\rangle \quad (194)$$

Ceci conduit pour un métal à :

$$D\tau_B = 3l_m^4/W^2 \propto B^{-2} \quad (195)$$

où l_m est la longueur magnétique donnée par :

$$l_m = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}} \quad (196)$$

Cette longueur est telle que le champ magnétique crée un flux Φ_0 à travers la surface $2\pi l_m^2$.

Dans le cas d'un semi-conducteur pour lequel $W < l_e$, l'incrément de phase est donné par :

$$\delta\phi \approx 2\pi \frac{BWL_e}{\Phi_0} = \frac{Wl_e}{l_m^2} \quad (197)$$

En champ faible (correspondant à $Wl_e \ll l_m^2$, soit un champ tel que le flux à travers une surface de l'ordre de Wl_e soit petit devant Φ_0) on retrouve le cas du métal avec une largeur renormalisée :

$$D\tau_B = \frac{C_1 l_e l_m^4}{2 W^3} \propto B^{-2} \quad (198)$$

où la valeur de la constante C_1 dépend du fait que les réflexions des électrons sur les bords du fil sont spéculaires ($C_1 = 9.5$) ou non ($C_1 = 4\pi$). Il existe cependant un autre régime de champ (correspondant à $Wl_e \gg l_m^2$, soit $BWL_e \gg \Phi_0$) pour lequel les électrons sont notablement déphasés entre deux chocs. On a alors [82] :

$$D\tau_B = \frac{C_2 l_e^2 l_m^2}{2 W^2} \propto |B|^{-1} \quad (199)$$

où $C_2 = 24/5$ pour des chocs spéculaires sur les bords et $C_2 = 3$ sinon. Le passage d'un régime de champ à l'autre se fait pour un champ tel que $\frac{2}{m} \approx Wl_e$. En égalant les expressions de τ_B en champ faible et fort, on obtient un champ caractéristique de :

$$B_c = \frac{C_1 \hbar}{C_2 e W l_e} \quad (200)$$

soit 13G pour $Wl_e = 1\mu\text{m}^2$ et des réflexions spéculaires.

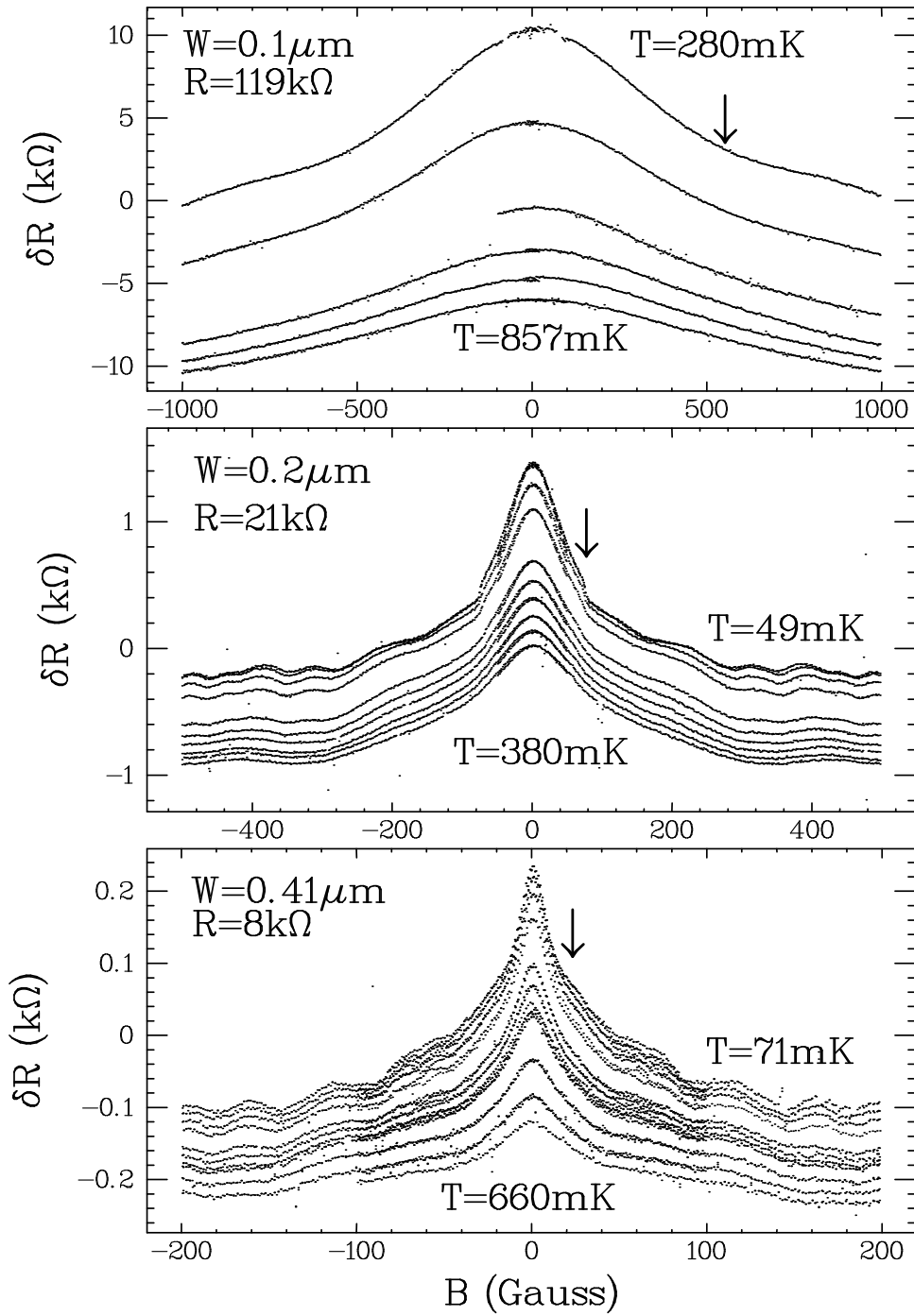


FIG. 41 – Courbes de magnétorésistance d’un ensemble de dix fils de longueur $100\mu\text{m}$ en parallèle. Ces fils, obtenus par gravure d’une hétérojonction GaAs/GaAlAs ont une largeur nominale de (de bas en haut) : $W = 0.88\mu\text{m}$, $W = 0.5\mu\text{m}$ et $W = 0.3\mu\text{m}$. Les largeurs réelles (indiquées sur la figure) sont plus faibles et déterminées expérimentalement. Les flèches indiquent le champ caractéristique B_c de passage du régime de champ faible au régime de champ fort.

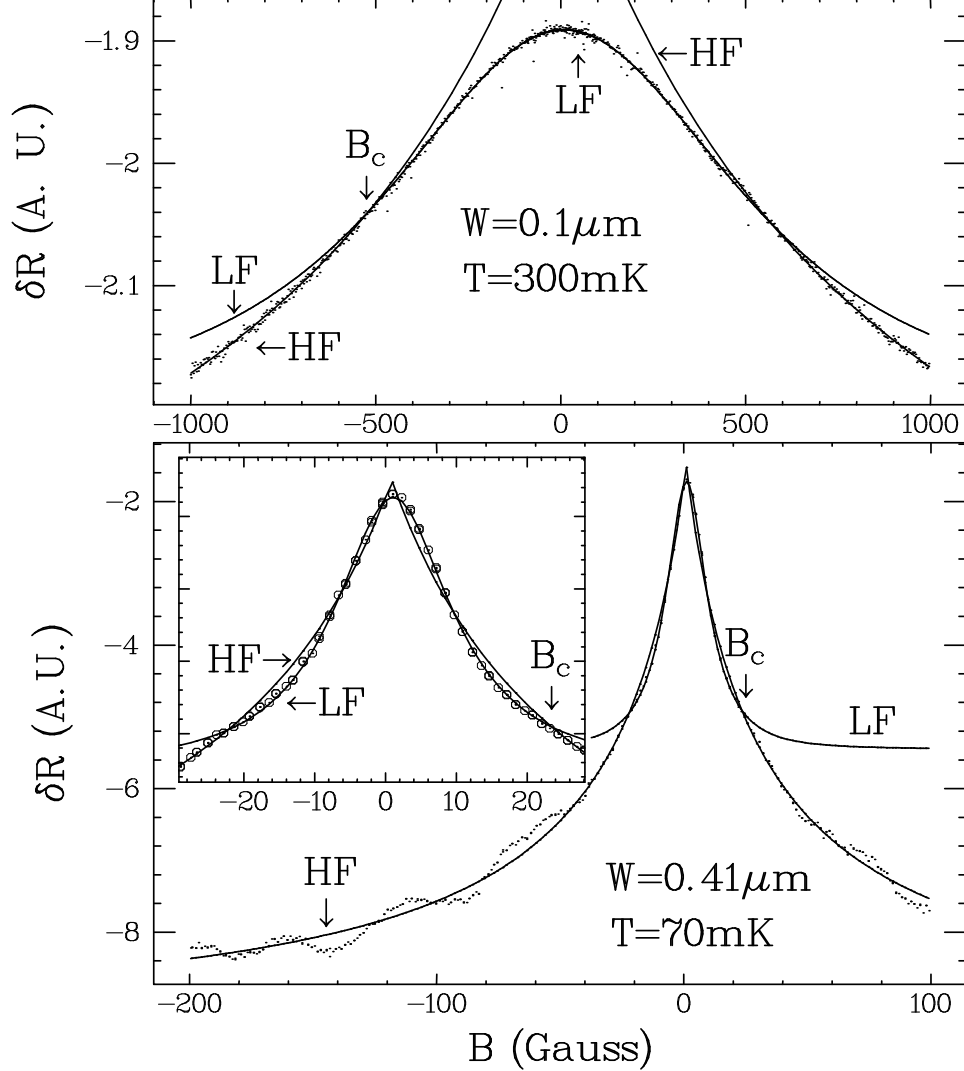


FIG. 42 – Exemples d’ajustements en champs faible et fort pour des fils de largeur $0.1\mu\text{m}$ et $0.41\mu\text{m}$ (pour ce dernier, la partie en champ faible est montrée en inset). La notation "LF" et "HF" correspond respectivement au champ faible et fort.

On n’a ici évoqué que les corrections de localisation faible ; il faut également tenir compte des interactions électron-électron. Leur premier effet est d’introduire des mécanismes inélastiques, ce qui est pris en compte dans le calcul de L_ϕ et se traduit par une certaine dépendance en température : dans le cas unidimensionnel, la longueur de cohérence de phase est donnée par [84, 85] :

$$L_\phi(T) = \left(\frac{DG_0 L \hbar^2}{2e^2 kT} \right)^{1/3} = \left(\frac{D^2 m^* W}{2\pi kT} \right)^{1/3} \quad (201)$$

Un autre effet provient de la partie quasi-élastique des interactions : les diffusions avec un faible transfert de moment. Elles sont responsables d’une correction à la conductance indépendante du champ magnétique et donnée par [84] :

$$\delta G_i(T) = -\frac{e^2}{\pi \hbar L} g_{1D} \sqrt{\frac{\hbar D}{2T}} \quad (202)$$

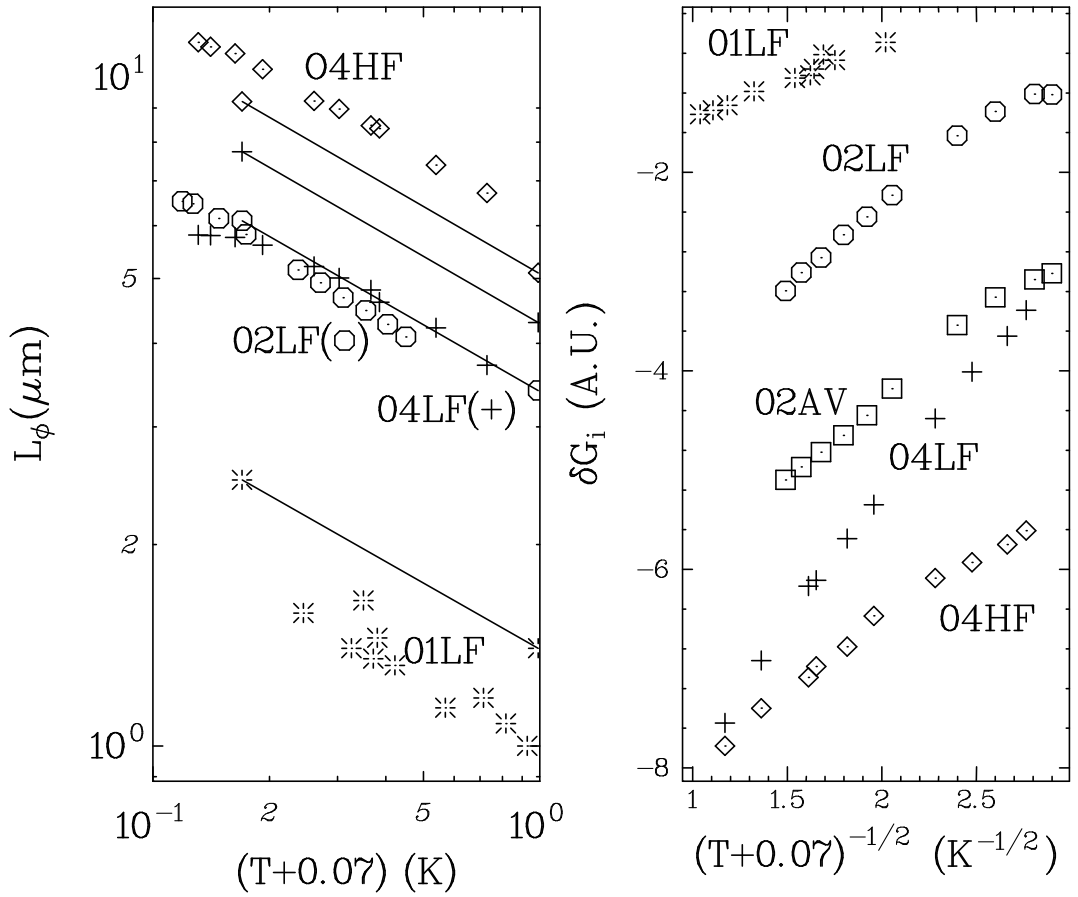


FIG. 43 – Evolution de L_ϕ et δG_i en fonction de la température. Les valeurs de L_ϕ sont comparées aux prédictions théoriques de l'eq. 201 (lignes continues). Les notations "04", "02" et "01" correspondent aux fils de largeur (réelle) $0.41\mu\text{m}$, $0.2\mu\text{m}$ et $0.1\mu\text{m}$. Les points notés "AV" sur la figure de droite correspondent à une évaluation directe à partir de l'asymptote en champ fort.

où g_{1D} est une constante associée à l'interaction. Cette formule est valable²⁹ tant que la longueur thermique l_T définie par :

$$l_T = \sqrt{\frac{\hbar D}{T}} \quad (203)$$

est supérieure à W .

Nous avons étudié la magnétorésistance de trois séries de fils de largeur (gravée) différente : $0.3\mu\text{m}$, $0.5\mu\text{m}$ et $0.88\mu\text{m}$. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 41. Chaque série comprend dix fils en parallèle, chaque fil ayant une longueur de $100\mu\text{m}$. Par ce biais on effectue une moyenne qui a pour but de diminuer l'amplitude des fluctuations de conductance et de rendre ainsi visible la localisation faible (on voit que les fluctuations de conductance sont néanmoins visibles à basse température sur les fils larges, voir figure

29. La condition $l_T \gg W$ est celle de l'unidimensionalité, du point de vue des interactions.

41). On note sur les courbes de la figure 41 un changement de comportement en fonction du champ magnétique (indiqué par une flèche), qui correspond aux régimes bas champ et haut champ précédemment décrits. On cherche, pour chaque température, les valeurs de W , L_ϕ et δG_i tels que la courbe théorique s'ajuste le mieux possible sur la courbe expérimentale : ceci est fait par la technique des moindres carrés, séparément pour les bas champs et les hauts champs. Un exemple d'un tel ajustement est présenté sur la figure 42. A partir de l'ensemble de ces courbes, on peut remonter à W et à la dépendance en température de L_ϕ et δG_i , présentées sur la figure 43. Nous omettrons ici la discussion des difficultés rencontrées et de l'ensemble des résultats obtenus (pour de plus amples détails, se référer à [86, 87]). Evoquons simplement le fait que les ajustements théoriques dans les régimes de champ faible et fort (respectivement "LF" et "HF" sur les figures 42 et 43) ne conduisent pas aux mêmes valeurs des paramètres cherchés (voir la figure 43). Notons également un petit effet de chauffage qui se traduit sur la figure 43 par un décalage de la température de 70mK.

Pour ce qui concerne le fil de $0.5\mu\text{m}$, qui correspond à la largeur des anneaux isolés étudiés, sa largeur réelle est de $0.2\mu\text{m}$ et le libre parcours moyen élastique vaut $l_e = 3\mu\text{m}$ ce qui correspond à $M = 17$ canaux, soit $M_{eff} = 4$ canaux effectifs. La longueur de cohérence de phase varie bien comme $T^{-1/3}$, comme on peut le voir sur la figure 43, et vaut $L_\phi = 7\mu\text{m}$ à $T = 50\text{mK}$. Ceci fixe la circonférence maximale des anneaux.

On a ainsi bouclé l'ensemble des paramètres à déterminer : l_e , D et E_c se déduisent aisément des résultats obtenus.

* *Une autre mesure de E_c*

A partir des données issues des expériences décrites précédemment, on peut déduire l'énergie de corrélation des anneaux $E_c = hD/L^2$ (L est ici la longueur de l'anneau). On peut avoir accès directement à cette mesure par un autre biais : l'étude de l'effet Aharonov-Bohm et des fluctuations de conductance sur un anneau (connecté, mais identique aux autres), dont l'amplitude dépend de la température avec une échelle caractéristique qui est justement E_c . On trouvera sur la figure 44 une photographie d'un anneau connecté obtenue par microscopie électronique, et une série de courbes de magnétorésistance effectuée sur cet anneau à différentes températures sur la figure 45. On observe clairement sur la figure 46 les pics correspondant aux oscillations de période h/e et $h/2e$ sur la transformée de Fourier de puissance de la courbe de magnétorésistance à basse température. En étudiant la dépendance en température (présentée en inset de la figure 46) de l'amplitude des oscillations en h/e et $h/2e$ (i.e. de la surface de chacun des pics de la figure 46) on peut déduire la valeur de E_c : l'amplitude de l'oscillation en h/e sature pour $T < E_c$ (pour l'oscillation de période $h/2e$ l'énergie caractéristique est $E_c/2$) et décroît comme $T^{-1/2}$ à plus haute température[14]. On obtient par conséquent une valeur de $E_c = 200\text{mK}$. La décroissance en $T^{-1/2}$ correspond au cas $L_T < L < L_\phi$: la conductance est déterminée par les propriétés spectrales de l'anneau sur une plage d'énergie T autour du niveau de Fermi. Or les dépendances en flux sont corrélées sur une tranche d'énergie E_c et décorrélées au-delà. Par conséquent, pour $T > E_c$ (i.e. $L < L_T$) les oscillations de conductance sont déterminées par T/E_c tranches d'énergie décorrélées³⁰ (et donc qui conduisent à des oscillations avec des phases décorrélées) : l'amplitude des oscillations de conductance

30. On remarquera que, comme nous l'avons démontré au chapitre 2, cet argument ne s'applique pas au calcul du courant typique.

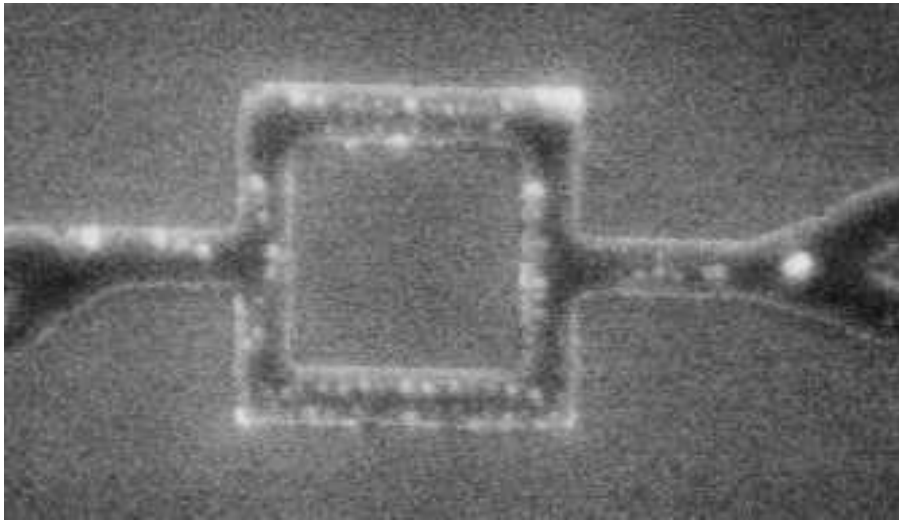


FIG. 44 – Photographie d'un anneau de $8\mu\text{m}$ de périmètre gravé dans une hétérojonction $\text{GaAs}/\text{GaAlAs}$, obtenue par microscopie électronique.

diminue alors comme l'inverse de la racine carrée du nombre de ces tranches, soit comme $(T/E_c)^{-1/2}$.

3.4 Etude de l'ensemble échantillon-détecteur

3.4.1 Cas idéal. Cas réel

Comme on l'a présenté lors de l'exposé du principe de détection, l'agencement idéal des anneaux par rapport au résonateur bifilaire correspond à la figure 29. Dans cette configuration tous les anneaux jouent un rôle équivalent, chacun voyant le même champ statique et le même champ oscillant. Or ceci nécessite la fabrication de la ligne sur l'hétérojonction dans laquelle ont été au préalable gravés les anneaux. Il faudrait donc déposer sur ceux-ci une couche de niobium, puis venir déposer par lift-off un masque en aluminium alors que les anneaux sont cachés. De plus il faudrait pouvoir arrêter la gravure ionique réactive juste au moment où le GaAs apparaît, en supposant que la RIE se fasse de manière homogène sur tout le wafer ... On voit bien que c'est manifestement irréalisable. Il faut donc disposer de deux substrats : l'un en saphir supportant la ligne, l'autre étant le GaAs avec l'hétérojonction, et venir les superposer. Le résultat est présenté sur la figure 47. Le problème de l'alignement des deux est délicat, mais peut-être soluble grâce à la transparence du saphir. Cependant la planéité des substrats n'est vraisemblablement pas meilleure que le micron, et toute poussière intercalée entre les deux plans vient interdire la possibilité pour les anneaux d'être dans la même configuration de champ.

Il faut donc renoncer au fait que les anneaux jouent tous le même rôle. Tout d'abord chacun d'entre eux est soumis à un flux RF différent. La réponse de l'ensemble des anneaux est une moyenne sur $\delta\Phi_{RF}$, mais ceci est sans conséquence tant que l'on s'intéresse à la *réponse linéaire* en $\delta\Phi_{RF}$: chaque anneau répond proportionnellement au flux RF auquel il est soumis, mais toutes les réponses sont en phases. Autrement dit la mutuelle d'un

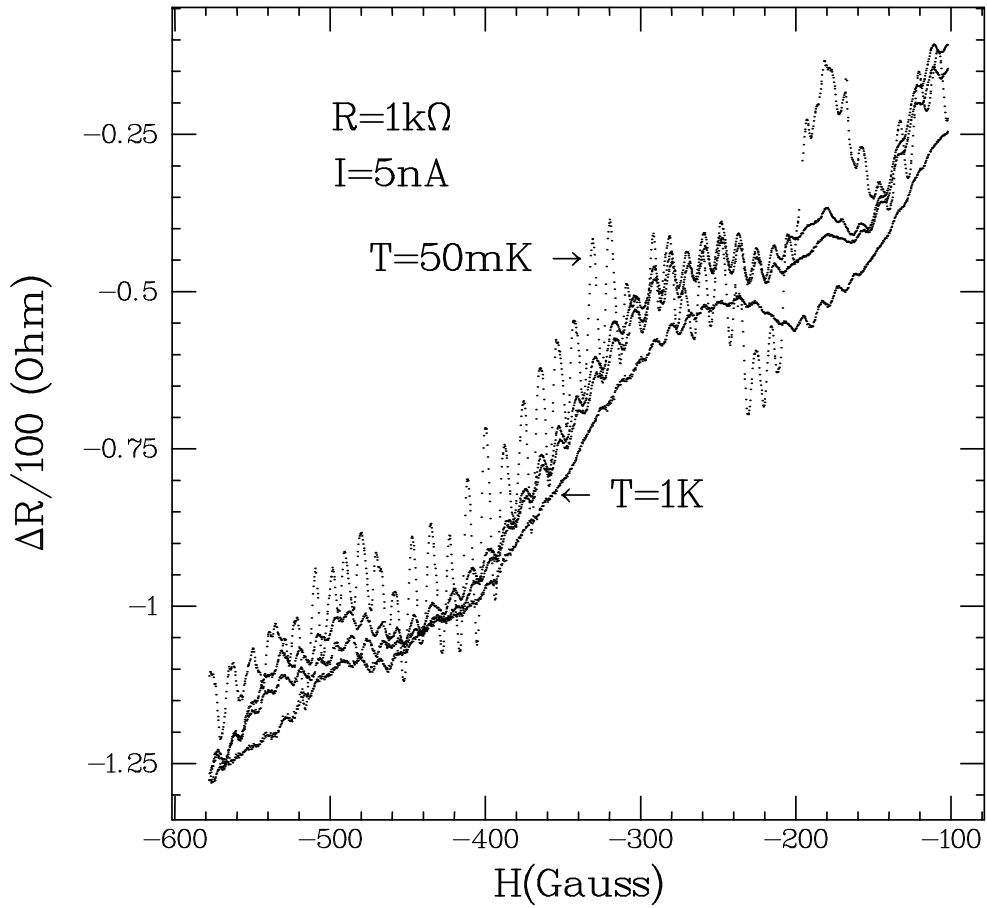


FIG. 45 – Oscillations de Aharonov et Bohm de la magnétorésistance d'un anneau carré de $8\mu\text{m}$ de périmètre gravé dans une hétérojonction GaAs/GaAlAs, pour différentes températures. Les oscillations lentes et la modulation de l'amplitude des oscillations rapides sont dues à la présence de fluctuations de conductance. La dépendance en température des oscillations de Aharonov-Bohm et des fluctuations de conductance nous renseigne sur E_c .

anneau avec la ligne n'est pas uniforme, et l'on a :

$$\delta Z_1 = \delta R + i\omega\delta L = \omega^2 \sum_{i=1}^{N_a} M_i^2 G_i \quad (204)$$

Comme la conductance G_i de l'anneau i et sa mutuelle M_i avec la ligne sont absolument décorréliées, on a :

$$\delta Z_1 = N_a \langle M_i^2 \rangle \langle G \rangle \quad (205)$$

Le seul effet de la disparité de la mutuelle est de la renormaliser en sa valeur typique $M_{typ} = \sqrt{\langle M_i^2 \rangle}$. Pour maximiser la valeur de M_{typ} on aura intérêt à plaquer les anneaux le plus près possible de la ligne.

On a supposé ci dessus que le flux statique enserré par chaque anneau était le même. Or la présence des fils supraconducteurs a pour effet de modifier la configuration locale des lignes de champ statique, par effet Meisner. Ainsi en supposant que l'exclusion est

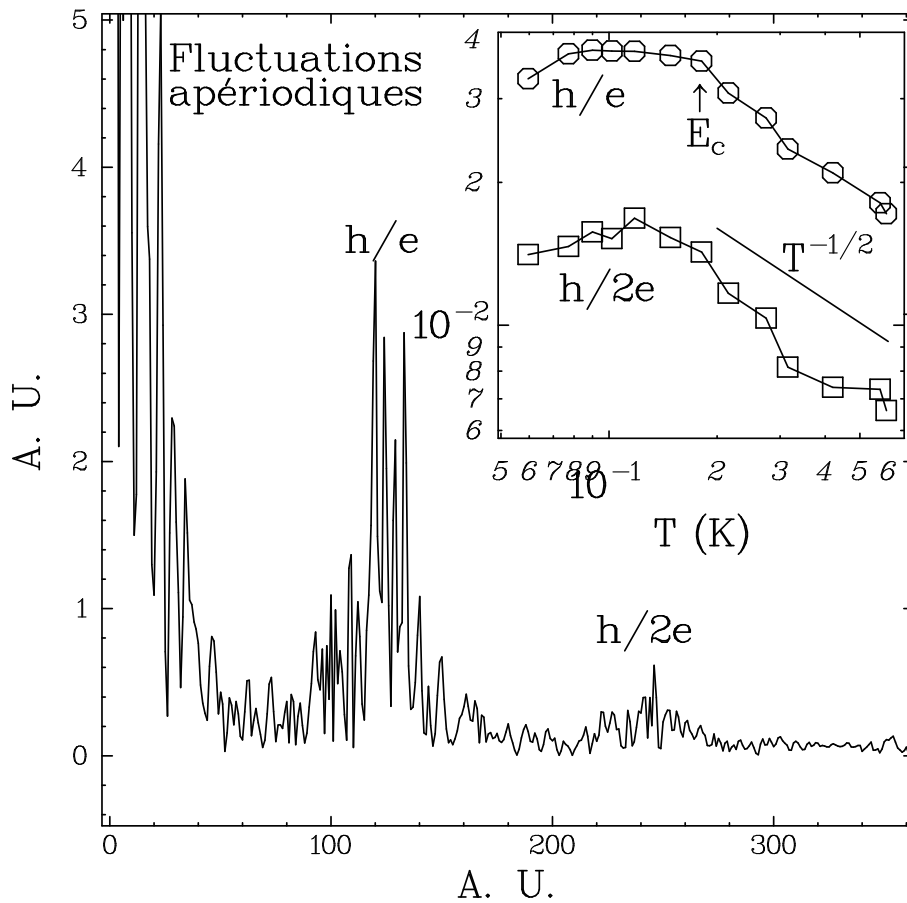


FIG. 46 – *Transformée de Fourier de puissance du signal de magnétorésistance à 50mK. On observe nettement les pics correspondant aux périodes h/e et $h/2e$. Inset : Evolution de l'amplitude des oscillations en h/e et $h/2e$ en fonction de la température. On observe une saturation pour $T < E_c$ et une décroissance en $T^{-1/2}$ à haute température.*

parfaite, le champ entre deux lignes vaut-il $4/3$ du champ appliqué. Par conséquent, si le champ statique est trop distribué au niveau des anneaux, on ne mesure plus que la moyenne sur le flux de la conductance complexe, perdant ainsi la périodicité en flux, qui est notre critère majeur pour la discrimination du signal par rapport à tout autre signal parasite. Il importe donc que les anneaux ne soient pas trop près de la ligne. Il faut donc trouver un compromis entre la décroissance du champ RF lorsqu'on s'éloigne de la ligne et l'inhomogénéité du champ statique lorsque l'on s'en approche.

3.4.2 Optimisation de la distance détecteur-échantillon

Le but poursuivi est de déterminer la distance minimale à partir de laquelle l'inhomogénéité du champ magnétique statique est acceptable. Or les anneaux eux-mêmes ne sont géométriquement pas tous identiques, mais leur surface est distribuée, ayant une fluctuation de l'ordre de 10% due à l'imprécision de la lithographie électronique. On ne cherchera donc pas une homogénéité meilleure que 10%. On ne cherchera donc pas non

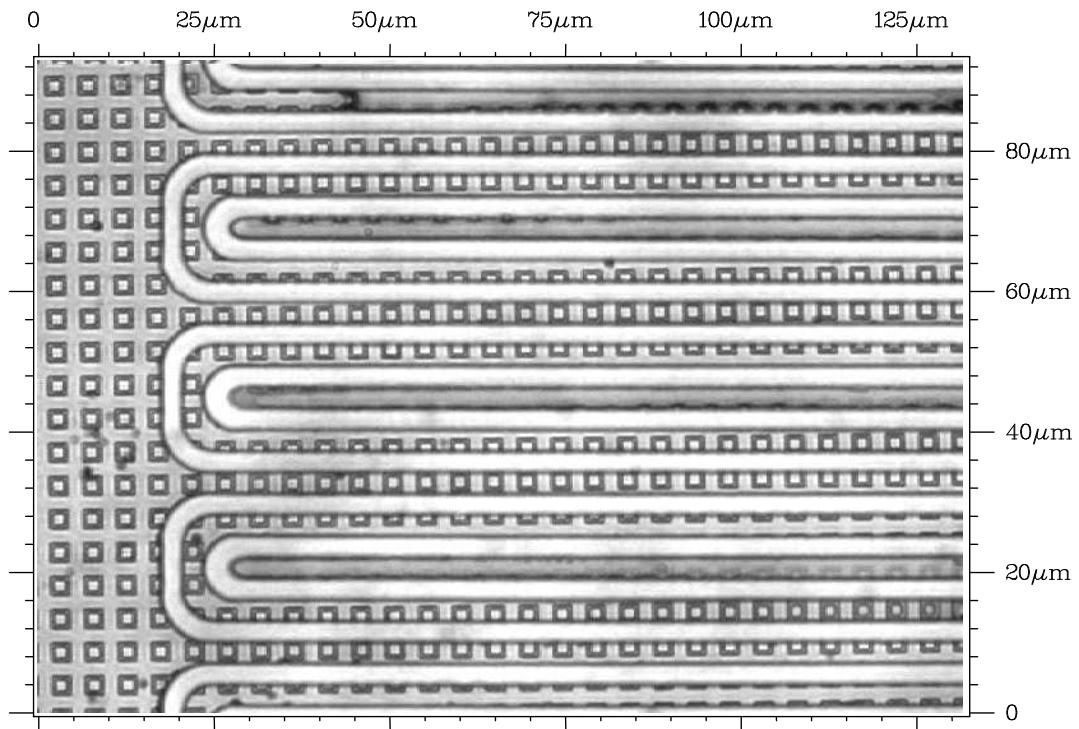


FIG. 47 – Photographie de la ligne résonante sur saphir posée sur les anneaux gravés dans l'hétérojonction GaAs/GaAlAs, obtenue par microscopie optique. Aucun alignement n'a été effectué.

plus à faire le calcul du champ démagnétisant avec une très grande précision, mais on se contentera d'un modèle simple.

** Calcul simple du champ démagnétisant*

Afin de calculer le champ magnétique au dessus de la ligne, on va utiliser l'analogie électrostatique : on cherche alors quel est le champ électrostatique auprès d'un conducteur (la ligne, considérée ici comme étant un métal parfait) polarisé par un champ électrique extérieur uniforme. Ceci est valable tant que l'on ne s'intéresse pas à des distances plus petites que la longueur de pénétration de London, de l'ordre de 1000\AA pour le niobium. De plus, au lieu de calculer de manière auto-cohérente la distribution de charge sur le conducteur, on va supposer qu'elle est uniforme, et l'ajuster de manière à annuler le champ au centre du fil. Enfin on ne tiendra pas compte des effets de bord, considérant le problème d'une infinité de fils rectangulaires parallèles infiniment longs, de largeur $2\mu\text{m}$, d'épaisseur $1\mu\text{m}$ et séparés les uns des autres de $4\mu\text{m}$. Le problème considéré est donc invariant par translation le long des fils, et périodique de période $6\mu\text{m}$ orthogonalement aux fils et dans le plan de la ligne. En utilisant la périodicité pour décomposer la distribution de charge en série de Fourier, on peut aisément calculer le champ électrique au dessus de la ligne. A grande distance du plan de la ligne, on peut se contenter de la première harmonique de cette distribution : le champ décroît alors exponentiellement avec une longueur caractéristique donné par la période de la distribution ($6\mu\text{m}$) divisée par π .

En effectuant complètement le calcul, on trouve que la distance minimale est de l'ordre

de $2\mu\text{m}$.

* *Séparation détecteur-échantillon de $2\mu\text{m}$*

Afin de fixer la distance entre la ligne et l'échantillon d'anneaux à environ $2\mu\text{m}$, il convient d'intercaler entre les deux un matériau dont les caractéristiques HF à basse température soient excellentes. Pour cela, nous intercalons un film de mylar d'épaisseur voulue ($1.2\mu\text{m}$), et de coller l'ensemble sur les bords par du PMMA. La difficulté de ce procédé réside dans l'obtention d'un film non frippé, mais sa tenue mécanique est bonne.

3.4.3 Le champ magnétique rayonné

On vu que l'homogénéité du champ magnétique statique implique qu'il faut laisser au moins $2\mu\text{m}$ entre le détecteur et l'échantillon. Or, comme on l'a déjà souligné, la géométrie de notre résonateur est telle que le champ rayonné est confiné proche de la surface de la ligne. Il convient donc d'estimer la valeur du champ magnétique rayonné à une distance d'environ $2\mu\text{m}$ au dessus de la ligne. Pour cela on va modéliser la ligne comme suit : on la suppose parcourue par un courant surfacique constant, et on néglige les effets de bord. Ce calcul est très proche de celui qui nous a conduit au champ démagnétisant. Ici aussi, si l'on s'en tient à la première harmonique du champ rayonné, on obtient une décroissance exponentielle avec une longueur caractéristique qui est donné par la périodicité du problème divisée par π . Cependant, la périodicité des courants n'est pas de $6\mu\text{m}$ mais de $12\mu\text{m}$ puisque deux fils adjacents sont parcourus par des courants opposés. Il en résulte que, si le champ démagnétisant est déjà bien affecté à $2\mu\text{m}$, il n'en est rien du champ rayonné. On peut de plus estimer la valeur de la mutuelle moyenne entre la ligne et les anneaux situés à $2\mu\text{m}$ au dessus de la ligne : on trouve $M_{typ} = 1.5 \cdot 10^{-13}\text{H}$, inférieure à celle estimée simplement.

3.4.4 Le champ électrique rayonné

On ne s'est jusqu'ici intéressé qu'au champ magnétique créé par le résonateur. Or à ce champ est bien-sûr associé un champ électrique. Pour l'évaluer, calculons la tension présente entre les deux fils de la ligne à la résonance. On utilise pour cela que si la ligne a une impédance de 50Ω à la résonance, elle absorbe intégralement la puissance émise \mathcal{P}_G par le générateur. On a donc :

$$\mathcal{P}_G = \frac{1}{2}Q^2RI^2 = \frac{1}{2}CV^2\frac{\omega_0}{Q} \quad (206)$$

Ainsi pour une puissance fournie de 1nW (-60dB), un Q de 80000 et une capacité $C = 20\text{pF}$, on trouve une différence de tension $V = 60\text{mV}$ entre les fils de la ligne, soit un champ électrique³¹ de 16kV/m . A titre de comparaison la f.e.m. induite dans chaque anneau par le flux oscillant vaut $e = 0.4\mu\text{V}$! Il y a heureusement une différence de taille entre le champ extérieur à l'anneau et le champ électromoteur induit : le premier est au moins partiellement écrané par les électrons de conduction, alors que le second est réellement celui vu par ceux-ci. Etant donné que les échantillons que nous considérons sont conducteurs, l'écranage devrait y être très bon (même à deux dimensions [88]) de

31. Il s'agit d'une valeur maximale, qui ne tient pas compte du fait que l'anneau est au dessus de la ligne et non pas entre les deux fils.

sorte que le champ électrique rayonné devrait vraisemblablement avoir une influence faible sur les anneaux. Ceci n'a cependant rien d'évident et reste à confirmer. Pour cela, il serait nécessaire de brancher une capacité en parallèle au résonateur, afin de réduire le champ électrique dans ce dernier.

Afin de vérifier que la présence de l'onde HF ne perturbe pas les propriétés électroniques des anneaux, nous avons effectué une expérience d'effet Aharonov-Bohm (à basse fréquence) en présence d'une radiation grossièrement équivalente à celle présente dans la configuration de notre détecteur. Nous n'avons pas noté d'effet de la présence de l'onde sur la magnétorésistance de l'anneau. A très forte puissance, il y a néanmoins des effets de chauffage.

Enfin on peut noter qu'il faut appliquer un champ électrique statique bien plus élevé sur un anneau pour faire disparaître les oscillations de Aharonov-Bohm [89].

3.4.5 Etalonnage : mesure du diamagnétisme d'anneaux supraconducteurs

Afin d'étalonner le détecteur que nous avons conçu dans des conditions proches de celles de la mesure effectuée sur des anneaux mésoscopiques isolés, nous avons étudié le diamagnétisme d'anneaux supraconducteurs de même taille que les anneaux mésoscopiques (soit des carrés de $2\mu\text{m}$ de côté et de largeur $0.5\mu\text{m}$) et d'épaisseur 500\AA . Dans la mesure où leur épaisseur et leur largeur sont inférieures à la longueur de London $\lambda_0(T)$ ces anneaux (au nombre de 10^5) produisent un signal réactif proportionnel au nombre de paires de Cooper $n_S(T)$ pour $T < T_c$. Nous avons commencé cette étude pour des anneaux en titane dont la température de transition (300mK) est compatible avec l'utilisation d'un cryostat à dilution. Cependant la réactivité du titane a provoqué son oxydation immédiate de sorte que nous n'avons pu observer aucun signal. Nous avons répété cette expérience avec de l'aluminium. Sa température critique (1.16K) est peu favorable à notre cryostat dont la température est très instable dans cette gamme. Nous avons cependant pu observer le signal attendu, présenté sur les figures 48 et 49. Afin d'en extraire la susceptibilité des anneaux, il est nécessaire de soustraire le signal du résonateur, ce qui conduit à la courbe de la figure 49. Pour le comprendre il suffit de relier la susceptibilité des anneaux à l'évolution en température de la longueur $n_S(T)$. Le courant circulant dans chaque anneau est donné par :

$$I = -n_S(T)S \frac{e^2 \Phi}{m L} \quad (207)$$

où S est la section transverse de l'anneau. La longueur d'onde de London est reliée à $n_S(T)$ par :

$$n_S(T) = \frac{1}{\lambda_0^2} \frac{m}{e^2 \mu_0} \quad (208)$$

Quant à la dépendance en température de λ_0 , elle est donnée par :

$$\lambda_0(T) = \lambda_0(0)(1 - t^4)^{-1/2} \quad \text{avec} \quad t = \frac{T}{T_c} \quad (209)$$

En réalité l'aluminium constitutif des anneaux contient de nombreux défauts, de sorte que $l_e < \lambda_0$. La longueur de London est alors renormalisée en une longueur effective donnée par :

$$\lambda_{eff} = \lambda_0 \sqrt{\frac{\xi}{l_e}} \quad (210)$$

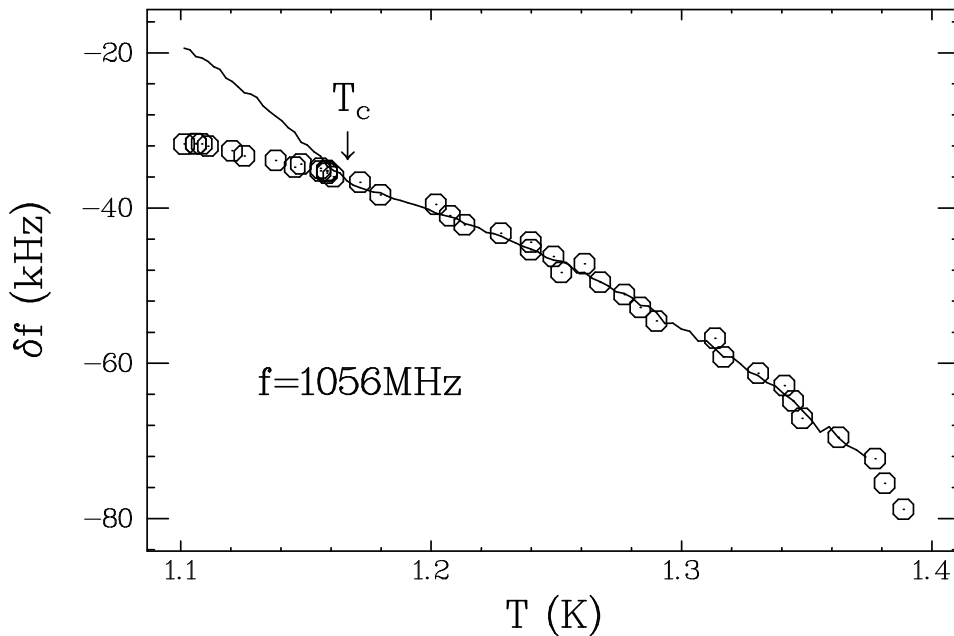


FIG. 48 – *Effet des anneaux d'aluminium sur la fréquence de l'harmonique 2 de la ligne. Le démarrage est linéaire près de T_c . Les cercles correspondent au résonateur à vide, le trait plein au résonateur en présence des anneaux d'aluminium.*

où $\xi = 1.6\mu\text{m}$, $\lambda_0 = 157\text{\AA}$ et $l_e \approx 100\text{\AA}$. On déduit des expériences réalisées une longueur de London effective de 5000\AA environ, alors que la valeur calculée à partir des grandeurs de l'aluminium est 2000\AA . Cependant le raisonnement effectué ci-dessus n'est valable que tant que la longueur de pénétration du champ magnétique est supérieure aux dimensions transverses de l'anneau. Si l'on avait $\lambda_{eff} = 2000\text{\AA}$ on devrait observer une saturation du diamagnétisme à basse température, ce qui n'arrive pas ; la valeur de 2000\AA est donc probablement sous-estimée.

Cette expérience permet d'estimer la sensibilité de notre détecteur : il est capable de mesurer une susceptibilité de quelques $10^{-13}\text{emu}\cdot\text{G}^{-1}$, et donc plus performant que les meilleurs SQUIDS commerciaux de deux ordres de grandeur.

3.4.6 Etude d'anneaux semi-conducteurs

Alors que nous avons vérifié que l'arseniure de gallium n'induisait pas de pertes HF à basse température, il s'est avéré que le substrat dans lequel étaient gravés les anneaux opposait une absorption parasite considérable au rayonnement de la ligne. Ceci est dû au fait que la gravure de l'hétérojonction n'enlève pas tous les porteurs, mais qu'il subsiste une conductance finie entre échantillons isolés. Ceci est peu gênant pour une mesure à basse fréquence tant que l'on s'intéresse à des échantillons peu résistifs. En revanche cette conduction parallèle est source d'une dissipation importante à haute fréquence. Pour éliminer cet effet il a été nécessaire d'accroître la durée de la gravure de manière à ôter tous les électrons qui avaient échappé à la gravure normale, et d'effectuer une oxydation

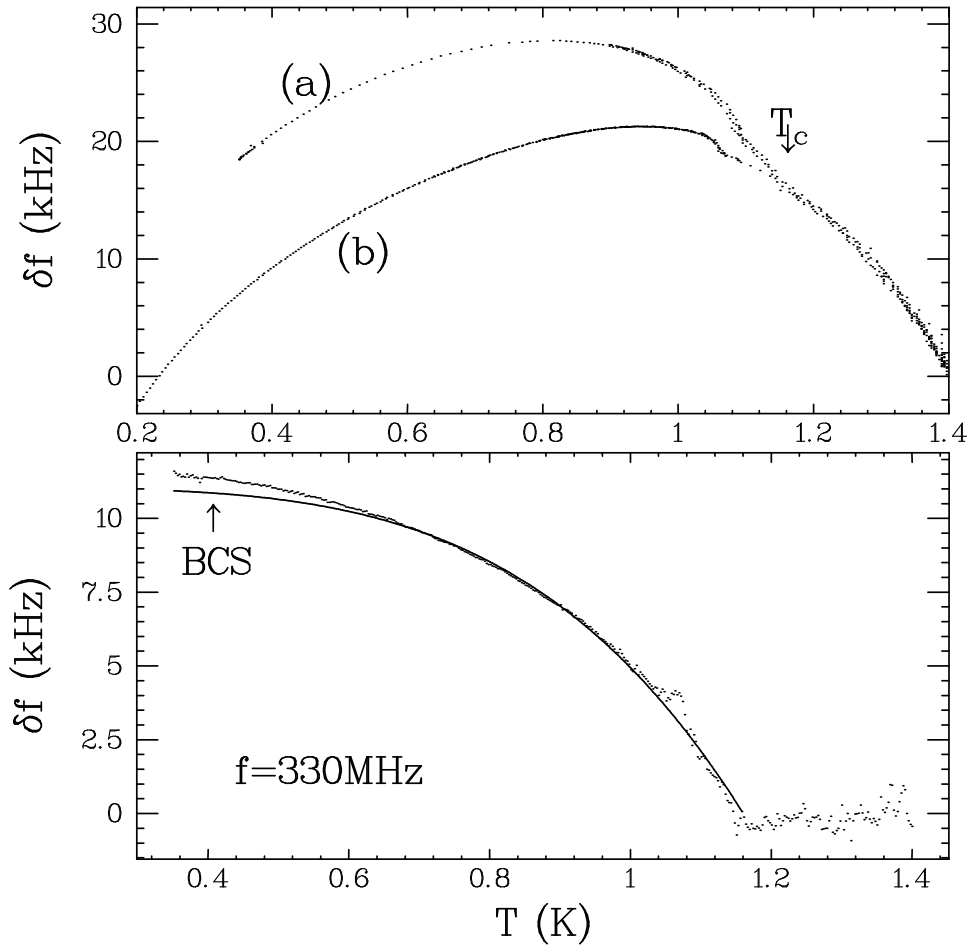


FIG. 49 – *En haut* : évolution de la fréquence du fondamental de la ligne avec des anneaux d'aluminium (a) et à vide (b). La différence entre les courbes donne accès à $\lambda_0(T)$. Le saut présent sur la courbe à vide est dû au fait que les fils d'amenée de l'onde HF sont eux-mêmes en aluminium : le saut correspond à leur transition supraconductrice. *En bas* : susceptibilité orbitale des 10^5 anneaux d'aluminium, après soustraction de la courbe à vide ; une variation de la fréquence de résonance de 10kHz correspond à une susceptibilité totale de $2 \cdot 10^{-9} \text{emuG}^{-1}$. La courbe en trait plein correspond à un ajustement analytique sur l'équation (209).

de la surface à l'aide d'un plasma d'oxygène. Ceci risque bien-sûr d'avoir pour effet de diminuer le libre parcours moyen des électrons dans les fils gravés, ainsi que de modifier la largeur réelle des fils. Il a donc été nécessaire de réétalonner la gravure dans ces conditions inhabituelles, en effectuant de nouveau des expériences de transport à basse température.

A l'heure actuelle le facteur de qualité de nos lignes est encore notablement affecté par cette absorption parasite : les résultats qui suivent ont été obtenus pour $Q = 1650$. Cette limitation nous interdit pour l'instant d'effectuer des mesures sur des harmoniques du fondamental (310MHz). Les mesures ont été effectuées sur deux résonateurs différents, conduisant au même résultat. Le champ magnétique statique a été modulé à 3Hz avec une

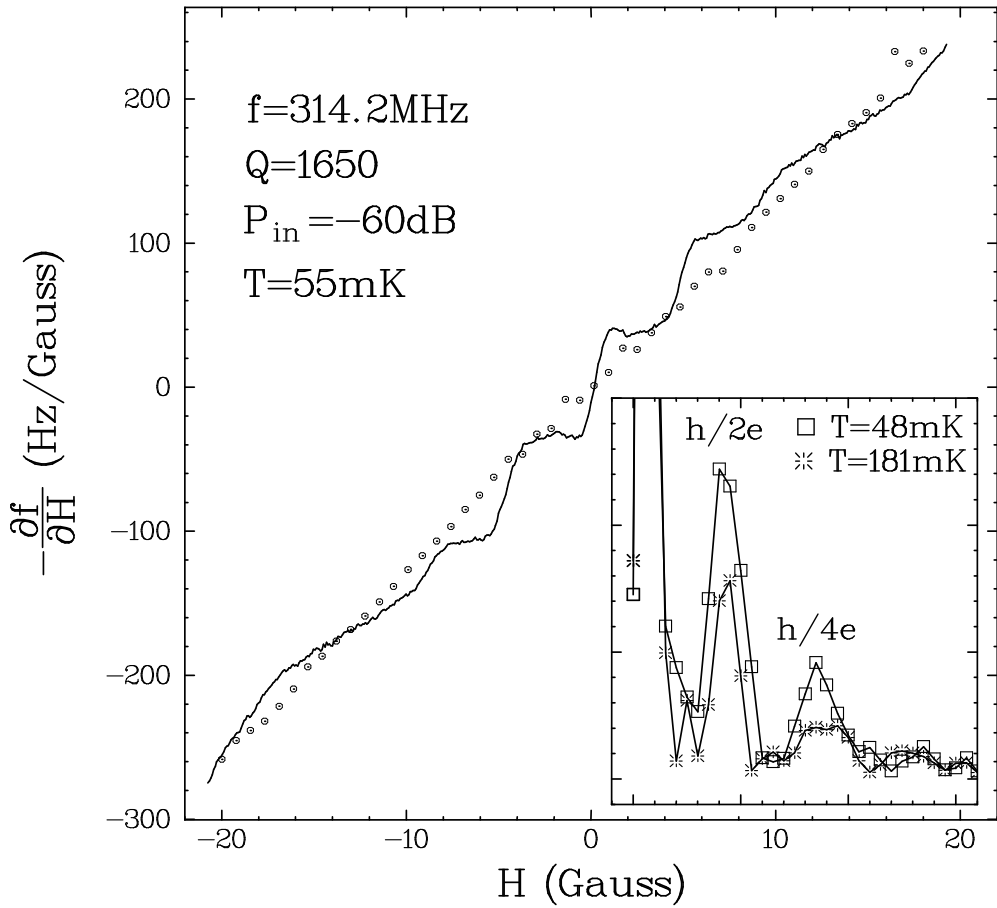


FIG. 50 – Evolution de la dérivée de la fréquence de résonance de la ligne en fonction du champ magnétique statique. Le signal résiduel linéaire (pointillés) correspond au diamagnétisme du niobium, sur le se superposent les oscillations de période $\Phi_0/2$ dues aux anneaux mésoscopiques (en trait plein). Cette courbe est moyennée 40 fois. Inset : transformée de Fourier du signal en présence des anneaux pour deux températures.

amplitude de 1 Gauss, ce qui fait que ce sont les dérivées de la fréquence de résonance f_0 et du facteur de qualité Q par rapport au champ statique qui sont mesurées. On voit sur la figure 50 la dépendance en champ magnétique de $-\frac{\partial f_0}{\partial H}$ moyenné 40 fois. Les oscillations visibles en champ faible sont le reflet de la partie imaginaire de la conductance moyenne complexe des anneaux, tandis que le signal résiduel linéaire est dû au diamagnétisme du niobium constitutif du résonateur. La période de 5 Gauss correspond à un flux de $\Phi_0/2$ dans chaque anneau. Les oscillations s'évanouissent pour un champ supérieur à 10 Gauss à cause du rapport d'aspect plutôt faible des anneaux, $1 \Phi_0$ dans la surface des fils correspondant à un champ de 1 Gauss. On déduit de la figure 50 :

$$-\frac{\partial f_1}{\partial H} = \alpha H + \beta_1 \sin 4\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} + \beta_2 \sin 8\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (211)$$

avec $\alpha = 13\text{Hz/Gauss}^2$, $\beta_1 = 27 \pm 2\text{Hz/Gauss}$ et $\beta_2 = 10 \pm 2\text{Hz/Gauss}$. Ceci correspond à une conductance imaginaire de l'ordre de $2.5 \cdot 10^{-3}\Omega^{-1}$ par anneau, dont la conductance de

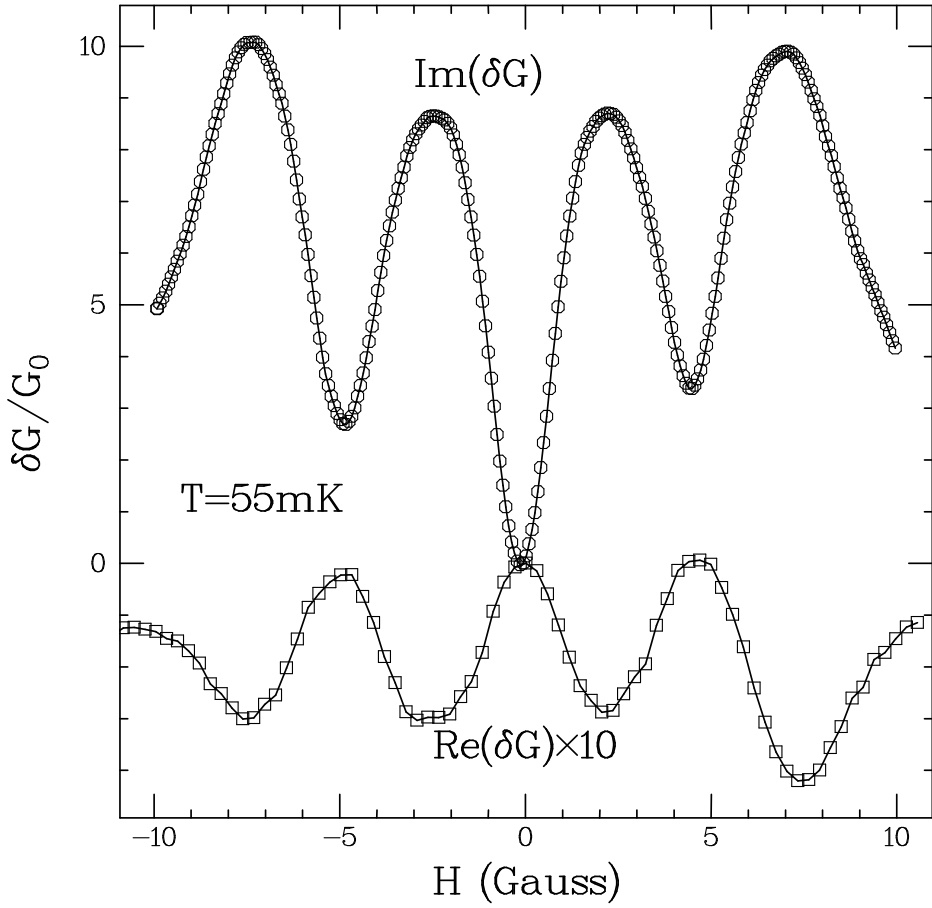


FIG. 51 – *Dépendance en champ magnétique des parties réelle et imaginaire de la conductance moyenne des anneaux, en unités de la conductance de Drude G_0 . Ces deux courbes ont été obtenues par intégration de $\partial f/\partial H$ et $\partial Q/\partial H$ après soustraction du signal résiduel.*

Drude vaut $G_0 = 5 \cdot 10^{-4} \Omega^{-1}$. Ceci est clairement démontré sur la figure 51. La dépendance en température de la composante en $h/2e$ de ces oscillations (voir la figure) est compatible avec une décroissance exponentielle avec une énergie caractéristique de 200mK (i.e. E_c) sur une plage de température correspondant à $2\Delta - 2E_c$.

Etant donné que la fréquence est inférieure à l'écart moyen entre niveaux, on s'attend à ce que la conductance imaginaire soit simplement proportionnelle à la dérivée du courant permanent par rapport au flux statique. Dans ce cas l'amplitude du courant est de 1.5nA par anneau, i.e. de l'ordre de $2E_c/\Phi_0 = 1.4\text{nA}$ (le facteur 2 correspondant au spin), à comparer à $2\sqrt{E_c\Delta}/\Phi_0 = 0.5\text{nA}$ ou $2\Delta/\Phi_0 = 0.2\text{nA}$. Cependant, sous cette hypothèse, nos résultats impliquent un courant permanent diamagnétique en champ nul ! Nous n'avons pour l'instant pas d'explication satisfaisante de cet effet. Une possibilité serait d'invoquer l'effet d'une interaction attractive entre électrons, peu crédible dans une hétérojonction *GaAs/GaAlAs*. D'autre part, on ne peut écarter l'hypothèse que l'on soit dans le régime $\gamma < \omega$, impliquant une contribution possible du terme de relaxation à la conductance

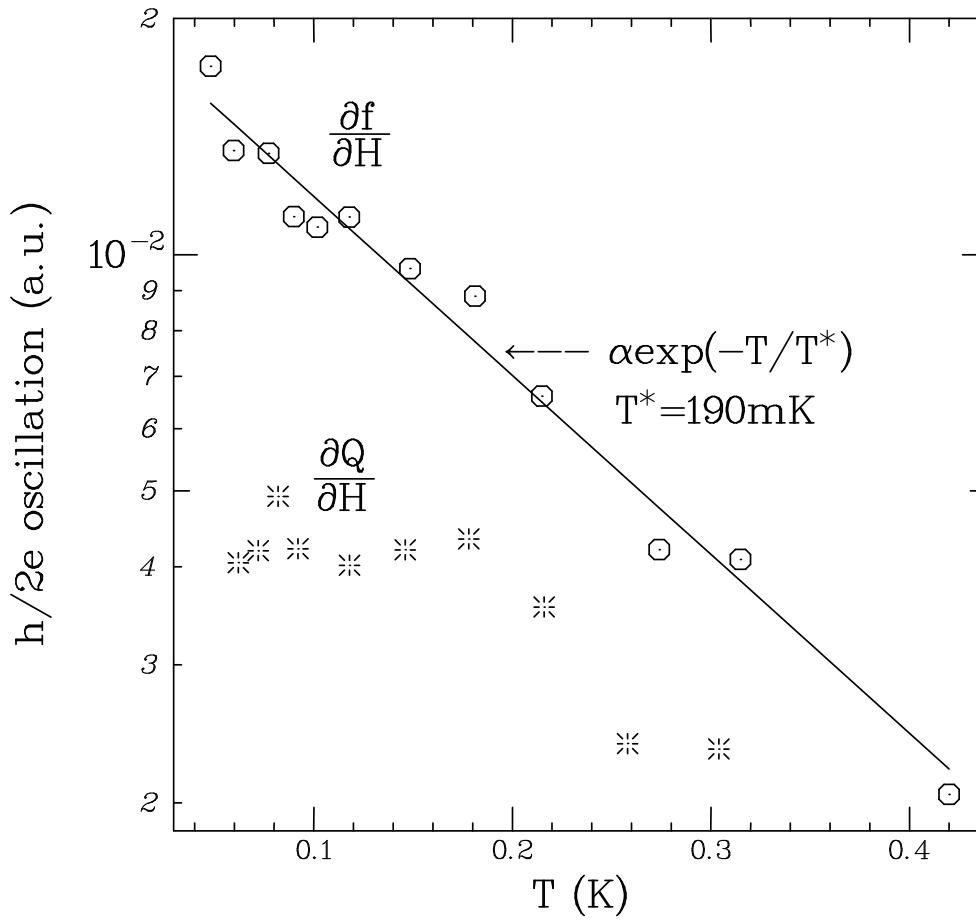


FIG. 52 – Dépendance en température de la composante oscillant à $\Phi_0/2$ de $\partial f_0/\partial H$ et $\partial Q/\partial H$.

imaginaire. Cependant, d'après les résultats du chapitre précédent cette hypothèse ne rend pas compte de l'effet observé.

Les oscillations de la conductance dissipative, obtenues par intégration de $\frac{\partial Q}{\partial H}$, sont présentées sur la figure 51. Leur période est aussi $h/2e$ et leur amplitude, qui est d'un ordre de grandeur inférieure à celle de $\Im m(G)$, correspond à $0.2G_0$, soit 10 fois supérieure aux oscillations en $h/2e$ (localisation faible) de la magnétoconductance que nous avons mesurées sur un anneau identique à ceux étudiés ici, mais connecté. La dépendance en température de la composante périodique en $h/2e$ de $\frac{\partial Q}{\partial H}$ est présentée sur la figure 52. On remarque qu'elle est très différente de celle de $\frac{\partial f_0}{\partial H}$: elle est indépendante de T jusqu'à $200mK$ puis décroît brutalement. Le signe de $\frac{\partial Q}{\partial H}$ correspond à une magnétoconductance *negative*, i.e. opposée à la localisation faible (AAS). Cette observation d'une magnétoconductance négative pour $T > \Delta$ renforce l'hypothèse $\omega > \gamma$. Dans ce régime la conductance dissipative est dominée par les mécanismes d'absorption qui, comme on l'a vu, conduisent à une magnétoconductance positive pour un système à spectre discret.

Conclusion

Nous nous sommes intéressé dans cette étude aux courants permanents et la la conductance AC complexe d'anneaux mésoscopiques, et ce sur les plans théorique et expérimental.

L'étude théorique a consisté en le calcul de la conductance AC complexe d'anneaux, isolés ou non, en présence d'un flux magnétique dont une partie est statique et l'autre alternative, qui induit un courant dissipatif. Ceci nous a permis de montrer que la conductance peut être tout à fait non conventionnelle, donnant lieu à des oscillations en fonction du flux statique dont le signe change avec la température ou la fréquence. A basse température et basse fréquence, l'amplitude de ces oscillations peut devenir bien plus grande que la conductance de Drude, attendu qu'elle est proportionnelle au temps de collision inélastique. Nous avons montré que le paramètre qui gouverne le passage de la localisation faible traditionnelle à ce régime est le rapport entre l'écart moyen entre deux niveaux d'énergie successifs et l'élargissement inélastique de ces niveaux : pour $\Delta \ll \gamma$ le spectre de l'anneau est continu (ce qui correspond au cas de l'anneau métallique) et sa conductance est conforme aux résultats de la localisation faible, pour $\Delta \gg \gamma$ le spectre est discret (ceci correspond au cas d'un anneau semi-conducteur, que nous explorons expérimentalement) et on obtient l'effet décrit ci-dessus.

L'étude expérimentale développée a eu pour but la mesure des quantités précédemment calculées. Ceci a nécessité la fabrication d'un détecteur adapté au problème, dont les performances ont été optimisées et vérifiées, et qui devrait permettre très bientôt la mesure convoitée : il s'agit d'une ligne à méandres supraconductrice qui est couplée inductivement aux anneaux. La mesure des variations de sa fréquence de résonance et de son facteur de qualité en fonction du champ magnétique statique et de la température nous renseigne respectivement sur les parties imaginaire et réelle de la conductance complexe moyenne d'un anneau. En plus de sa sensibilité, le détecteur doit montrer une faible dépendance de ses caractéristiques propres en fonction des paramètres extérieurs lorsqu'aucun échantillon ne lui est apposé. Les caractéristiques obtenues nous ont permis de mesurer la conductance AC complexe d'un ensemble d'anneaux mésoscopiques isolés fabriqués dans une hétérojonction *GaAs/GaAlAs*. Nous avons mis en évidence la présence d'oscillations de période $\Phi_0/2$ à la fois sur la partie réelle (dissipative) et la partie imaginaire (la susceptibilité magnétique orbitale) de la conductance dynamique des anneaux. Le signe des oscillations de la partie réactive correspond à du diamagnétisme en bas champ, ce qui reste pour l'instant incompris. La partie dissipative oscille avec une amplitude dix fois supérieure à sa valeur observée pour les mêmes anneaux connectés, et son signe est opposé à celui de la localisation faible.

Remerciements

Cet article est issu de ma thèse de doctorat réalisée au Laboratoire de Physique des Solides (associé au CNRS, URA 2) de l'Université Paris-Sud (Orsay). Des résultats plus récents y ont été ajoutés, et j'ai tenté d'augmenter la cohésion de l'ensemble autour du problème de la conductance AC. J'ai également enrichi la bibliographie de références

générales (articles de revue) ; aussi j'espère que le présent article permettra à ceux qui le souhaitent de s'intéresser à la physique des systèmes mésoscopiques (pour des articles de vulgarisation, voir les références [90, 91, 92]).

Je remercie Monsieur le Professeur Michel Héritier, directeur du laboratoire, de m'avoir permis d'effectuer ce travail dans les meilleures conditions et pour l'intérêt soutenu qu'il y a porté.

L'intégralité du travail présenté ici a été le fruit d'une étroite collaboration avec Hélène Bouchiat, mon directeur de thèse, qui m'a suivi et guidé avec compétence, patience, compréhension et une extrême gentillesse. Je tiens à la remercier chaleureusement pour tout ce qu'elle m'a apporté, à la fois sur les plans scientifique et humain.

Je tiens également à remercier tous ceux qui m'ont aidé, avec qui j'ai collaboré ou simplement échangé des idées. Je citerai notamment D. Mailly, Y. Gefen, G. Montambaux, M. T. Béal-Monod, H. Hurdequint et A. Kamenev.

Enfin je voudrais remercier NoËlle pour l'aide inestimable qu'elle m'a apportée par son soutien dévoué de chaque jour, sa compréhension sans égal et sa confiance inébranlable.

Références

- [1] P. W. Anderson, Phys. Rev **109**, 1492 (1958).
- [2] P. A. Lee and T. V. Ramakrishnan, Rev. of Mod. Phys. **57**, 287 (1985).
- [3] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello and T. V. Ramakrishnan, Phys. Rev. Lett. **42**, 673 (1979).
- [4] Mott, J. Non Crystalline Solid **1**, 1 (1968).
- [5] D.J. Thouless, Phys. Rep. **13**, 93 (1974).
- [6] G. Bergmann, Phys. Rep. **107**, 1 (1984).
- [7] S. Chakravarty and A. Schmid, Phys. Rep. **140**, 193 (1986)
- [8] R. Landauer, Phil. Mag. **21**, 863 (1970)
- [9] B. J. van Wees, H. van Houten, C. J. Beenaker, J. G. Williamson, L. P. Kouwenhoven, D. van der Marel and C. T. Foxon, Phys. Rev. Lett. **60**, 848 (1988). D. A. Wharam, T. J. Thornton, R. Newbury, M. Pepper, H. Ahmed, J. E. F. Frost, D. G. Hasko, D. C. Peacock, D. A. Ritchie and G. A. C. Jones, J. Phys C **21**, L209 (1988).
- [10] Y. Imry, Europhys. Lett. **1**, 249 (1986).
- [11] J.-L. Pichard and G. Sarma, J. Phys. C **14**, L127 (1981).
- [12] Y. Gefen, Y. Imry, and M. Y. Azbel, Phys. Rev. Lett. **52**, 129 (1984).
- [13] P. A. Lee, A. D. Stone and H. Fukuyama, Phys. Rev. **B35**, 1039 (1987).
- [14] S. Washburn and R. A. Webb, Adv. in Phys. **35**, 395 (1986).
- [15] S. Feng, P. A. Lee and A. D. Stone, Phys. Rev. Lett. **56**, 1960 (1986).
- [16] M. T. Béal-Monod, Phys. Rev. **B50**, 4275 (1994).
- [17] D. Mailly and M. Sanquer, Journal de Physique I France **2**,357 (1992).
- [18] B. L. Altshuler, A.G. Aronov and B. Z. Spivak, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **33**, 101 (1981) [JETP Lett. **33**, 94 (1981)].
- [19] D. Y. Sharvin and Y. V. Sharvin, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **34**, 285 (1981) [JETP Lett. **34**, 272 (1981)].

- [20] B. Pannetier, J. Chaussy, R. Rammal and P. Gandit, Phys. Rev. Lett. **53**, 718 (1984) and Phys. Rev. B **31**,3209 (1985).
- [21] Hund, Analen den Physik Leipzig **32**, 102 (1938).
- [22] I. O. Kulik, ZhETF Pis. Red. **11**, 407 (1970) [JETP ,275 (1970)].
- [23] F. Bloch, Phys. Rev. **137**, A787 (1965).
- [24] M. BÅttiker, Y. Imry and R. Landauer, Phys. Lett. **96A**, 365 (1983).
- [25] H.-F. Cheung, Y. Gefen, E. K. Riedel and W.-H. Shih, Phys. Rev. B **37**, 6050 (1988).
- [26] H.-F. Cheung and E. K. Riedel, Phys. Rev. B **40**, 9498 (1989).
- [27] E. K. Riedel and H.-F. Cheung, Physica Scripta **25**, 357 (1989).
- [28] H.-F. Cheung, E. K. Riedel and Y. Gefen, Phys. Rev. Lett. **62** 587 (1989).
- [29] B. L. Altshuler and B. Schklovskii, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **91**, 220 (1986) [Sov. Phys. JETP **64**, 127 (1986)].
- [30] M. L. Mehta, *Random Matrices and the Statistical Theory of Energy Levels*. New York : Academic Press 1967.
- [31] N. Dupuis and G. Montambaux, Phys. Rev. B **43**, 14390 (1991).
- [32] B. L. Altshuler, Y. Gefen and Y. Imry, Phys. Rev. Lett. **66**, 88 (1991).
- [33] K. B. Efetov, Phys. Rev. Lett. **66**, 2794 (1991).
- [34] K. B. Efetov and S. Iida, Phys. Rev. B **47**, 15794 (1993).
- [35] H. Bouchiat, G. Montambaux and D. Sigeti, Phys. Rev. B **44**, 1682 (1991).
- [36] H. Bouchiat and G. Montambaux, J. de Physique **50**, 2695 (1989).
- [37] L. P. Lévy, G. Dolan, J. Dunsmuir and H. Bouchiat, Phys. Rev. Lett. **64**, 2074 (1990).
- [38] B. L. Altshuler and B. Z. Spivak, Sov. Phys. JETP **65**, 343 (1987).
- [39] V. Chandrasekhar, R. A. Webb, M. J. Brady, M. B. Ketchen, W. J. Gallagher and A. Kleinsasser, Phys. Rev. Lett. **67**, 3578 (1991).
- [40] D. Mailly, C. Chapelier and A. Benoit, Phys. Rev. Lett. **70**, 2020 (1993).
- [41] D. Braun and G. Montambaux, Phys. Rev. B **50**,7776 (1994).
- [42] B. Reulet and H. Bouchiat, Phys. Rev. B **50**, 2259 (1994).
- [43] S. Oh, A. Yu. Zyuzin and R. A. Serota, Phys. Rev. B **44**, 8858 (1991).
- [44] R. A. Serota and A. Yu. Zyuzin, Phys. Rev. B **47**, 6399 (1993).
- [45] B. L. Altshuler, Y. Gefen, Y. Imry and G. Montambaux, Phys. Rev. B **47**, 10335 (1993).
- [46] L. P. Lévy, D ; H. Reich, L. Pfeiffer and K. West, Physica B **189**, 204 (1993).
- [47] A. Schmid, Phys. Rev. Lett. **66**, 80 (1991).
- [48] E. A. Akkermans, Europhys. Lett. **15**, 709 (1991)
- [49] N. Argaman and Y. Imry, Phys. Scr. **T49**, 333 (1993).
- [50] V. Ambegaokar and U. Eckern, Phys. Rev. Lett. **65**, 381 (1990).
- [51] P. Kopietz, Phys. Rev. Lett. **70**, 3123 (1993).
- [52] U. Eckern, Z. Phys. B **82**, 393 (1991).
- [53] G. Bouzerar, D. Poilblanc and G. Montambaux, Phys. Rev. B **49**, 8258 (1994).
- [54] H. Kato and D. Yoshioka, Phys. Rev. B **50**,4943 (1994).

- [55] M. Ramin, B. Reulet and H. Bouchiat, Phys. Rev. B **51**, 5582 (1995).
- [56] U. Eckern and A. Schmid, Europhys. Lett. **18**, 457 (1992). U. Eckern and A. Schmid, Ann. Physik (Leipzig) **2**, 180 (1993).
- [57] R. A. Smith and V. Ambegaokar, Europhys. Lett. **20**, 161 (1992).
- [58] E. K. Riedel and F. von Oppen, Phys. Rev. B **47**, 15449 (1993).
- [59] R. Landauer and M. Büttiker, Phys Rev. Lett. **54**, 2049 (1985).
- [60] Y. Imry and N. S. Shiren, Phys. Rev. B **33**, 7992 (1986).
- [61] N. Trivedi and D. A. Browne, Phys. Rev. B **38**, 9581 (1988).
- [62] L. P. Gor'kov and G. M. Eliashberg, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **48**, 1407 (1965) [Sov. Phys. -JETP **21**, 940 (1965)].
- [63] D. S. Fisher and P. A. Lee, Phys. Rev. B **23**, 6851 (1981).
- [64] Y. Imry, in *Directions in Condensed Matter Physics*, edited by G. Grinstein and G. Mazenko (World Scientific, Singapore, 1986), pp. 221–236.
- [65] M. Büttiker, *New Techniques and Ideas in Quantum Measurement Theory*, edited by D. N. Greenberger, Ann. N. Y. Acad. Sci. **480**, 194 (1986).
- [66] Y. Gefen and O. Entin-Wohlman, Ann. Phys. **206**, 68 (1991).
- [67] U. Sivan, F. P. Milliken, K. Milkove, S. Rishton, Y. Lee, J. M. Hong, V. Boegli, D. Kern and M. deFranza, Europhysics Letters **25**, 605 (1994).
- [68] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc and G. Grynberg, *Processus d'interactions entre photons et atomes*, Intereditions et Editions du CNRS, Paris 1988.
- [69] P. Debye, *Polar Molecules*, Chemical Catalog Co., New York (1929) Chap. 5. J. H. Van Vleck and V. F. Weisskopf, Rev. Mod. Phys. **17**, 227 (1945).
- [70] W. Kohn, Phys. Rev. **133**, A171 (1964).
- [71] B. I. Shklovskii, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **36**, 287 (1982) [JETP Lett. **36**, 352 (1982)].
- [72] N. F. Mott, Phil. Mag. **22**, 7 (1970).
- [73] K. Frahm, B. Mühlischlegel and R. Nemeth, Z. Phys. B - Condensed Matter **78**,91 (1990).
- [74] U. Sivan and Y. Imry, Phys. Rev. B **35**, 6074 (1987).
- [75] A. Kamenev, R. Reulet, H. Bouchiat and Y. Gefen, Europhys. Lett. **28**, 391 (1994).
- [76] J. T. Edwards and D. J. Thouless, J. Phys. C **5**, 807 (1972). D. J. Thouless, Phys. Rev. Lett. **39**, 1167 (1977).
- [77] E. Akkermans and G. Montambaux, Phys. Rev. Lett. **68**, 642 (1992).
- [78] A. Kamenev and Y. Gefen, à paraître.
- [79] K. C. Gupta, R. Garg and I. J. Bahl, *Microstrip Lines and Slotlines*, Dedham Massachusetts, Artech House Inc. (1979).
- [80] L. Landau et E. Lifchitz, *Electrodynamique des milieux continus*, éditions MIR, Moscou 1969.
- [81] C. W. J. Beenaker and H. van Houten, Solid State Physics vol.**44**, edited by H. Ehrenreich and D. Turnbull, Academic Press, pp. 1–228 (1991).
- [82] C. W. J. Beenaker and H. van Houten, Phys. Rev. B **38**, 3232 (1988).

- [83] B. L. Altshuler and A. G. Aronov, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **33**, 515 (1981) [JETP Lett. **33**, 499 (1981)].
- [84] B. L. Altshuler, A. G. Aronov and D. E. Khmel'nitskii, *J. Phys. C* **15**, 7367 (1982).
E. L. Altshuler, B. L. Altshuler and A. G. Aronov, *Solid State Commun.* **54**, 617 (1985).
K. K. Choi, D. C. Tsui and S. C. Palmateer, *Phys. Rev. B* **33**, 8216 (1986).
- [85] T. J. Thornton, M. Pepper, H. Ahmed, D. Andrews and G. J. Davies, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1198 (1986)
- [86] B. Reulet, Thèse de Doctorat, Université Paris–Sud, non publié (1994).
- [87] B. Reulet, H. Bouchiat and D. Mailly, à paraître.
- [88] C. Glatli (1993), communication privée. T. Ando, A. B. Fowler and F. Stern, *Rev. of Mod. Phys.* **54**, 437 (1982).
- [89] P. G. N. de Vegvar, G. Timp, P. M. Mankiewich, R. Behringer and J. Cunningham, *Phys. Rev. B* **40**, 3491 (1989).
- [90] A. Benoît et J. L. Pichard, *Images de la Physique* (1988).
- [91] G. Montambaux, H. Bouchiat et L. P. Lévy, *Images de la Physique* (1991).
- [92] D. Mailly, C. Chapelier et A. Benoît, *Images de la Physique* (1994).